Veprimet në bashkësinë ℕ dhe metodika e relacioneve

Prof. As. Dr. Siditë Duraj · Universiteti i Malit të Zi, Podgoricë · 2026–2027

IDEJA E LEKSIONIT

> «Nuk bëhet» është fjali për bashkësinë, jo për veprimin: 5 − 8 nuk ka rezultat në $\mathbb{N}_0$, por ka në bashkësi më të gjera. Katër veprimet formojnë një sistem me dy çifte veprimesh të kundërta. Relacioni është një bashkësi çiftesh të renditur, dhe vetë shenja e barazimit është një relacion. Ekuivalenca klasifikon, renditja rreshton.

PAS KËTIJ LEKSIONI DUHET TË DINI

1. Të dalloni ℕ nga $\mathbb{N}_0$ dhe të shpjegoni çfarë është veprim i brendshëm;
2. Të formuloni vetitë e katër veprimeve me kushtet e tyre;
3. Të shpjegoni pse nuk pjesëtojmë me zero;
4. Të zgjidhni ekuacionet e thjeshta duke përdorur veprimet e kundërta;
5. Të argumentoni rendin e veprimeve dhe rolin e kllapave;
6. Të përkufizoni çiftin e renditur, relacionin binar dhe relacionin e kundërt;
7. Të paraqitni një relacion në disa mënyra dhe të kaloni nga njëra te tjetra;
8. Të kontrolloni vetitë refleksive, simetrike, antisimetrike dhe kalimtare;
9. Të dalloni relacionin e ekuivalencës nga relacioni i renditjes;
10. Të lidhni klasifikimin dhe seriimin në klasë me këto relacione.

PJESËT THELBËSORE

Veprimi i brendshëm

Një veprim është i brendshëm në një bashkësi kur rezultati i çdo çifti elementesh mbetet në atë bashkësi. Në $\mathbb{N}_0$ mbledhja dhe shumëzimi janë të brendshme; zbritja $a - b$ përcaktohet vetëm kur $a \geq b$, pjesëtimi $a : b$ vetëm kur $b \neq 0$ dhe b e plotpjesëton a.

Pjesëtimi me zero

$a : b = q$ do të thotë $b \times q = a$. Për $a \neq 0$, asnjë q nuk plotëson $0 \times q = a$. Për $a = 0$, çdo q e plotëson $0 \times q = 0$, prandaj rezultati nuk është i vetëm. Në të dyja rastet $a : 0$ nuk përcaktohet. Ndërsa $0 : b = 0$ për $b \neq 0$.

Zbritja në kllapa

$a - (b + c) = a - b - c$. $a - (b - c) = a - b + c$, kur shprehjet janë të përcaktuara në $\mathbb{N}_0$. Heqja e kllapave pas shenjës «−» ndryshon shenjat brenda tyre.

Veprimet e kundërta dhe ekuacionet

Mbledhja dhe zbritja, shumëzimi dhe pjesëtimi janë dy çifte veprimesh të kundërta. $x + 7 = 12 \rightarrow x = 12 - 7 = 5$. $x - 7 = 12 \rightarrow x = 12 + 7 = 19$. $20 - x = 12 \rightarrow x = 20 - 12 = 8$. $x : 4 = 6 \rightarrow x = 24$. $24 : x = 6 \rightarrow x = 4$.

Rendi i veprimeve
Pa kllapa, shumëzimi dhe pjesëtimi kryhen para mbledhjes dhe zbritjes; veprimet e së njëjtës shkallë kryhen nga e majta në të djathtë: $20 - 8 + 2 = 14$ dhe $24 : 6 \times 2 = 8$. Kllapat e ndryshojnë rendin: $20 - (8 + 2) = 10$.

Relacioni
Çifti i renditur (a, b) ndryshon nga (b, a) kur $a \neq b$. Relacioni binar nga A te B është nënbashkësi e $A \times B$. Relacioni i kundërt përmban çiftet (b, a): i kundërti i «është dyfishi i» është «është gjysma e». Paraqitjet: fjali, listë çiftesh, tabelë, diagram me shigjeta, rrjetë koordinative.

Vetitë e relacionit në A
Refleksiv: a R a për çdo a. Simetrik: nga a R b del b R a. Antisimetrik: nga a R b dhe b R a del a = b. Kalimtar: nga a R b dhe b R c del a R c. Ekuivalenca: refleksiv, simetrik, kalimtar; ndan bashkësinë në klasa. Renditja: refleksiv, antisimetrik, kalimtar; «≤» në $\mathbb{N}_0$ është renditje e plotë, «plotpjesëton» është renditje e pjesshme.

Kujdes
- «Nga 5 nuk hiqet 8» mësohet më mirë si «në $\mathbb{N}_0$ nuk mund ta bëjmë»: fjalia e saktë përgatit numrat negativë që do të vijnë.
- Rregulli «më parë mbledhja, pastaj zbritja» është i gabuar; mbledhja dhe zbritja janë të së njëjtës shkallë dhe kryhen nga e majta.
- Kur thuhet «Ana ka 3 më shumë se Besa», relacioni i kundërt është «Besa ka 3 më pak se Ana»; drejtimi i relacionit ka rëndësi.

GABIMET TIPIKE

Puna e nxënësit	Hipoteza	Pyetja që e provon
$20 - 8 + 2 = 10$.	Kryen mbledhjen para zbritjes, sepse mendon se mbledhja ka përparësi.	«Lexoje si histori: kishe 20, dhe 8, more 2. Sa ke?» Krahaso me $20 - (8 + 2)$.
$x - 7 = 12 \rightarrow x = 5$.	Zbret gjithmonë numrin më të vogël nga më i madhi; nuk e njeh të zbritshmin e panjohur.	«Kontrollo: sa është 5 − 7? A del 12?» Pastaj shiriti pjesë-tërësi.
«5 : 0 = 0, sepse nuk ka asgjë.»	Ngatërron 5 : 0 me 0 : 5.	«Me çfarë duhet shumëzuar 0 që të dalë 5?»
Pranon «është motra e» si relacion simetrik në një grup fëmijësh.	Kontrollon vetëm çifte vajzash; nuk kërkon rastin kur i dyti është djalë.	«Kush është motra e kujt? Shkruaj të dy çiftet dhe kontrollo secilin».

Hipoteza nuk është diagnozë: ajo provohet me pyetjen ose me një detyrë të re.

FJALËT KYÇE

$\mathbb{N}$ dhe $\mathbb{N}_0$ · veprim i brendshëm · veprim i kundërt · rendi i veprimeve · çift i renditur · prodhim kartezian · relacion binar · relacion i kundërt · refleksiv · simetrik · antisimetrik · kalimtar · relacion ekuivalence · relacion renditjeje

PYETJE VETËKONTROLLI

1. A është zbritja veprim i brendshëm në $\mathbb{N}_0$? Argumentoni.
2. Pse $7 : 0$ nuk përcaktohet?
3. Zgjidhni $x - 9 = 14$ dhe kontrolloni.
4. Llogaritni $30 - 10 + 5$ dhe $30 - (10 + 5)$.
5. A janë $(2, 5)$ dhe $(5, 2)$ i njëjti çift?
6. Në $A = \{1, 2, 3\}$, a është relacioni «<» refleksiv? Kalimtar?
7. Pse «ka të njëjtën ngjyrë me» është relacion ekuivalence?
8. Pse «plotpjesëton» në $\{1, 2, 3, 6\}$ është renditje e pjesshme dhe jo e plotë?

Vazhdoni me: **Leksioni i plotë (PDF)** · **Laboratori i Javëve XIII–XV** · **Kuizi i Leksionit 7**

PËRGJIGJET E PYETJEVE TË VETËKONTROLLIT

1. **A është zbritja veprim i brendshëm në $\mathbb{N}_0$? Argumentoni.**
   Jo. $5 - 8$ nuk ka rezultat në $\mathbb{N}_0$; mjafton një kundërshembull.
2. **Pse $7 : 0$ nuk përcaktohet?**
   Do të duhej q me $0 \times q = 7$, por $0 \times q = 0$ për çdo q.
3. **Zgjidhni $x - 9 = 14$ dhe kontrolloni.**
   $x = 14 + 9 = 23$; $23 - 9 = 14$.
4. **Llogaritni $30 - 10 + 5$ dhe $30 - (10 + 5)$.**
   25 dhe 15.
5. **A janë $(2, 5)$ dhe $(5, 2)$ i njëjti çift?**
   Jo, çifti është i renditur dhe $2 \neq 5$.
6. **Në $A = \{1, 2, 3\}$, a është relacioni «<» refleksiv? Kalimtar?**
   Nuk është refleksiv ($1 < 1$ nuk vlen); është kalimtar.
7. **Pse «ka të njëjtën ngjyrë me» është relacion ekuivalence?**
   Është refleksiv, simetrik dhe kalimtar; ndan objektet në klasa sipas ngjyrës.
8. **Pse «plotpjesëton» në $\{1, 2, 3, 6\}$ është renditje e pjesshme dhe jo e plotë?**
   Është refleksiv, antisimetrik dhe kalimtar, por 2 dhe 3 nuk krahasohen: asnjëri nuk plotpjesëton tjetrin.

© 2026 Prof. As. Dr. Siditë Duraj · Metodika e Matematikës 3 · Përmbledhja e Leksionit 7