METODIKA E MATEMATIKËS 3

Leksioni 7 · Java XIII dhe Java XV

Veprimet në bashkësinë ℕ dhe metodika e relacioneve

Mbledhja dhe zbritja në bashkësinë ℕ · Shumëzimi dhe pjesëtimi · Metodika e njohjes me përmbajtjen e relacioneve

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Material universitar për formimin fillestar të mësuesve të arsimit fillor

Temat e Javës XIII dhe të Javës XV · 4 × 45 minuta

Viti akademik 2026–2027

Metodika e Matematikës 3 · Leksioni 7 · Java XIII dhe Java XV

Mbledhja dhe zbritja në bashkësinë ℕ. Shumëzimi dhe pjesëtimi në bashkësinë ℕ. Metodika e njohjes me përmbajtjen e relacioneve

Autorja: Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Destinacioni: studentët e programit të formimit fillestar të mësuesve të arsimit fillor. Materiali mbulon Javën XIII dhe Javën XV të programit, për katër orë akademike dhe për studim të pavarur.

SI TË LEXOHET KY MATERIAL

▪ Përkufizimet, pohimet dhe vetitë paraqiten në kuti me sfond të kaltër të lehtë; vërtetimet vijojnë menjëherë pas tyre dhe mbyllen me shenjën ■.

▪ Njësitë profesionale, me shirit të errët në krye, ndjekin gjithmonë të njëjtat shtatë hapa: shembulli i zgjidhur, paraqitja në klasë, pyetja diagnostikuese, përgjigja e mundshme e nxënësit, analiza didaktike, alternativa metodike dhe pyetja reflektuese.

▪ Kapitujt 2–14 mbyllen me kutinë «Idetë kryesore të kapitullit», që shërben për përsëritje dhe vetëkontroll.

▪ Dialogët, përgjigjet e nxënësve dhe rastet e gabimeve janë simulime didaktike dhe nuk paraqiten si të dhëna empirike. Figurat, problemet, sekuencat mësimore dhe rubrikat janë hartuar posaçërisht për këtë leksion.

© 2026 Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Përmbajtja

Hyrje 5
Si të studiohet ky leksion 5
Pyetja hyrëse 5
1. Vendi në program dhe rezultatet e të nxënit 6
1.1 Roli i leksionit në vazhdimësinë e programit 6
1.2 Rezultatet e të nxënit 6
1.3 Organizimi i katër orëve akademike 7
2. Bashkësia e numrave natyrorë si strukturë 9
2.1 Nga llogaritja te struktura 9
2.2 ℕ dhe $\mathbb{N}_0$ 9
2.3 Veprimi i brendshëm 9
2.4 «Nuk bëhet» apo «nuk bëhet këtu»? 10
2.5 Njësi profesionale: «nga 5 nuk hiqet 8» 11
3. Mbledhja dhe zbritja në bashkësinë ℕ 12
3.1 Mbledhja si numër elementesh 12
3.2 Vetitë e mbledhjes 12
3.3 Zbritja si veprim i kundërt 13
3.4 Vetitë e zbritjes 14
3.5 Njësi profesionale: zbritja në kllapa 15
4. Shumëzimi dhe pjesëtimi në bashkësinë ℕ 17
4.1 Dy përkufizime të shumëzimit 17
4.2 Vetitë e shumëzimit 18
4.3 Pjesëtimi si veprim i kundërt 19
4.4 Pse nuk pjesëtojmë me zero 19
4.5 Vetitë e pjesëtimit 19
4.6 Njësi profesionale: pjesëtimi me zero 20
5. Katër veprimet si një sistem 22
5.1 Dy çifte veprimesh të kundërta 22
5.2 Gjashtë trajta të ekuacionit të thjeshtë 23
5.3 Njësi profesionale: i zbritshmi i panjohur 23
6. Rendi i veprimeve 25
6.1 Pyetja që duhet bërë 25
6.2 Pse «nga e majta» ka rëndësi 26
6.3 Kllapat si mjet 26
6.4 Njësi profesionale: nga e majta në të djathtë 26
7. Nga veprimet te relacionet 28
7.1 Çfarë është relacioni për nxënësin 28
7.2 Çifti i renditur 28
7.3 Relacioni binar 28
7.4 Relacioni i kundërt 29
7.5 Njësi profesionale: drejtimi i relacionit 29
8. Paraqitjet e relacionit 31
8.1 Pesë mënyra për të thënë të njëjtën gjë 31
8.2 Relacioni në një bashkësi 32
8.3 Rregulli i fshehtë 32
8.4 Njësi profesionale: rregulli i fshehtë 32
9. Vetitë e relacioneve në një bashkësi 34
9.1 Katër veti 34
9.2 Shembuj 34
9.3 Kalimtaria në klasë 35
9.4 Njësi profesionale: krahasimi pa e parë 35
10. Relacioni i ekuivalencës dhe klasifikimi 37

10.1 Klasifikimi si matematikë 37
10.2 Numri si klasë 38
10.3 Veprimet me klasat 39
10.4 Njësi profesionale: klasifikimi me dy kritere 39
11. Relacioni i renditjes dhe renditja në varg 41
11.1 Renditja e plotë dhe e pjesshme 41
11.2 Renditja në varg 42
11.3 Njësi profesionale: renditja e shkopinjve 43
12. Shenja e barazimit si relacion 44
12.1 Çfarë thotë shenja = ... 44
12.2 Nivele të kuptimit 44
12.3 Vargu i barazimeve 45
12.4 Mendimi relacional 45
12.5 Njësi profesionale: 8 + 4 = □ + 5 45
13. Gabimet si burim informacioni 47
13.1 Modeli diagnostik 47
13.2 Përmbledhje e rasteve 47
13.3 Një bisedë diagnostikuese e modeluar 48
13.4 Si zgjedhim ndërhyrjen 48
14. Hartimi i mësimit: nga teoria te klasa 49
14.1 Një orë 45-minutëshe: shenja e barazimit 49
14.2 Një sekuencë e shkurtër: klasifikimi 49
14.3 Diferencimi 50
15. Punëtoria universitare: detyra me analizë 51
15.1 Detyra 1: veprimi i brendshëm 51
15.2 Detyra 2: rregullat e zbritjes 51
15.3 Detyra 3: vetia shpërndarëse dhe drejtimi 51
15.4 Detyra 4: rendi i veprimeve 51
15.5 Detyra 5: vetitë e një relacioni 51
15.6 Detyra 6: renditja e pjesshme 52
15.7 Dymbëdhjetë detyra me zgjidhje 52
16. Vlerësimi përmbyllës dhe vetëvlerësimi 54
16.1 Kriteret e vlerësimit 54
16.2 Tri situata për seminar 54
16.3 Test përmbledhës (30 minuta, 20 pikë) 54
16.4 Çelësi orientues i testit 55
16.5 Rubrikat 55
17. Përmbledhje dhe punë e pavarur 57
17.1 Sinteza e leksionit 57
17.2 Punë individuale pas leksionit 57
18. Bankë problemesh për studim të pavarur 58
19. Përgjigje të shkurtra për kontrollin e punës 59
Bibliografia 60
Shënim mbi përdorimin e burimeve 60
Literatura e cituar 60
Shtojca A. Katër plane për orët në auditor 61
A.1 Ora I (Java XIII): veprimet e kryeshme, mbledhja dhe zbritja, kapitujt 2–3 61
A.2 Ora II (Java XIII): shumëzimi, pjesëtimi, ekuacionet dhe rendi i veprimeve, kapitujt 4–6 61
A.3 Ora III (Java XV): relacioni, paraqitjet dhe vetitë, kapitujt 7–9 62
A.4 Ora IV (Java XV): ekuivalenca, renditja, shenja e barazimit dhe diagnostikimi, kapitujt 10–13 62
Shtojca B. Varianti B i testit përmbledhës 63
B.1 Detyrat 63
B.2 Çelësi orientues 63

LEKSIONI 7

Hyrje

Si të studiohet ky leksion

Ky leksion ka dy pjesë, që në program ndahen nga kolokviumi i dytë. Java XIII i kthehet aritmetikës që studentët e njohin, por me një pyetje tjetër. Deri tani pyetëm si llogaritet. Tani pyesim çfarë janë veprimet, ku kanë kuptim dhe cilat veti i lidhin me njëra-tjetrën. Java XV kalon te një ide që nxënësi e përdor çdo ditë pa e emërtuar: krahason, grupon, rendit dhe thotë se dy gjëra janë «njësoj». Këto janë relacione.

Lexoni kapitujt sipas radhës. Kapitulli 7 mbështetet te produkti i dy bashkësive që del në kapitullin 4, dhe kapitulli 12 i kthehet shenjës së barazimit me mjetet e kapitujve 9 dhe 10. Përkufizimet provojini me shembuj tuajt, përpara se të lexoni vërtetimin. Për çdo veti pyesni veten: ku e ka hasur tashmë nxënësi këtë, edhe pa e ditur emrin?

Ndjekim marrëveshjet e leksioneve të mëparshme. Shumëzimin e shënojmë me ×, pjesëtimin me dy pika (:), dhe në $m \times n$ faktori i parë numëron grupet ose rreshtat. Me $\mathbb{N}$ shënojmë numrat natyrorë pozitivë, $\{1, 2, 3, \ldots\}$, dhe me $\mathbb{N}_0$ bashkësinë $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Renditjen e marrim siç u përkufizua në Javën XII: $a \leq b$ kur ekziston $c \in \mathbb{N}_0$ i tillë që $a + c = b$. Dialogët dhe rastet e nxënësve janë simulime didaktike, jo të dhëna nga studime empirike.

Pyetja hyrëse

Në dy klasa të ndryshme, dy mësues shkruajnë në fletoret e nxënësve këto korrigjime. Mësuesi i parë shënon pranë një detyre: «5 − 8 nuk bëhet.» Mësuesja e dytë i lë pa korrigjuar rreshtat ku nxënësi ka shkruar 8 + 4 = 12 + 5 = 17, sepse «rezultati i fundit është i saktë».

Çfarë është e saktë dhe çfarë mungon në secilën fjali? Çfarë mund të ndërtojë nxënësi nga këto fjali në vitet që vijnë? Shkruani përgjigjen tuaj dhe rikthehuni te ajo pas kapitullit 2 dhe kapitullit 12.

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 1

1. Vendi në program dhe rezultatet e të nxënit

NË KËTË KAPITULL

– Roli i leksionit në vazhdimësinë e programit
– Rezultatet e të nxënit
– Organizimi i katër orëve akademike

1.1 Roli i leksionit në vazhdimësinë e programit

Në Javën XI dhe në Javën XII studentët justifikuan strategjitë me gojë dhe algoritmet me shkrim me anë të shkrimit dhjetor. Kështu mbetet pa u thënë një gjë: pse veprimet sillen ashtu siç sillen, pavarësisht nga mënyra si i shkruajmë numrat. Përgjigjja nuk varet nga sistemi dhjetor. Ajo varet nga struktura e bashkësisë $\mathbb{N}_0$ me dy veprime dhe një renditje.

Java XIII e ngre këtë strukturë në plan të parë. Ajo përkufizon katër veprimet në $\mathbb{N}$ dhe $\mathbb{N}_0$, tregon ku janë të kryeshme dhe ku jo, i lidh në dy çifte veprimesh të kundërta dhe shpjegon pse kemi nevojë për marrëveshje për rendin e veprimeve. Java XV bën hapin tjetër. Barazimi, renditja dhe pjesëtueshmëria, që u përdorën gjatë gjithë lëndës, shihen tani si raste të një koncepti të vetëm, relacionit. Programi e quan këtë temë «metodika e njohjes me përmbajtjen e relacioneve», dhe fjala «njohje» ka peshë: në arsimin fillor nxënësi nuk mëson përkufizimin e relacionit. Ai punon me relacione, dhe mësuesi duhet të dijë çfarë po ndërton.

Dy javët lidhen nga një ide e përbashkët. Shumëzimi na jep produktin e dy bashkësive, $A \times B$. Relacioni është një pjesë e këtij produkti. Shenja e barazimit, me të cilën shkruajmë çdo veprim, është vetë një relacion, me veti që nxënësi duhet t'i përjetojë herët. Bashkimi i dy javëve në një leksion nuk është pra vetëm çështje orari.

Materiali mbështetet te njohuri të leksioneve të mëparshme: te bashkësitë dhe numri i elementeve (Leksioni 1), te kuptimet e veprimeve (Leksionet 2–4), te varësitë dhe teorema e pjesëtimit me mbetje (Leksioni 5), te renditja në $\mathbb{N}_0$ (Leksioni 6).

1.2 Rezultatet e të nxënit

Në përfundim të punës në auditor dhe të studimit individual, studenti duhet të jetë në gjendje:

- të përkufizojë katër veprimet në $\mathbb{N}$ dhe $\mathbb{N}_0$, të dallojë veprimet që janë të kryeshme në çdo rast nga ato që kërkojnë kusht dhe ta formulojë këtë dallim në gjuhën që i flet nxënësit;
- të vërtetojë vetitë themelore të veprimeve dhe të tregojë me kundërshembuj cilat veti nuk vlejnë;
- të shpjegojë pse pjesëtimi me zero nuk ka kuptim dhe t'ia tregojë këtë nxënësit me kontrollin me shumëzim;

- të zgjidhë dhe të arsyetojë gjashtë trajtat e ekuacioneve të thjeshta me lidhjet ndërmjet përbërësve të veprimeve;
- të dallojë në rendin e veprimeve çfarë është marrëveshje dhe çfarë del nga vetitë;
- të paraqesë një relacion me fjalë, me çifte, me diagram shigjetash, me tabelë dhe në rrjetë, dhe të kalojë nga njëra paraqitje te tjetra;
- të përcaktojë vetitë e një relacioni, me vërtetim ose kundërshembull;
- të vërtetojë lidhjen ndërmjet relacionit të ekuivalencës dhe ndarjes së bashkësisë dhe ta përdorë për të analizuar një veprimtari klasifikimi;
- të dallojë renditjen e plotë nga renditja e pjesshme dhe të hartojë veprimtari renditjeje në varg;
- të analizojë mendimin e nxënësit për shenjën e barazimit dhe të hartojë detyra që e zhvillojnë kuptimin e saj si relacion.

1.3 Organizimi i katër orëve akademike

Dy orët e para i përkasin Javës XIII, dy të fundit Javës XV. Ndërmjet tyre është Java XIV, me kolokviumin e dytë. Kjo ndërprerje ka një përfitim: në fillim të Javës XV studentët mund të rimarrin nga kolokviumi vetitë e veprimeve dhe t'i përdorin si shembuj të parë relacionesh.

Tabela 1. Organizimi orientues i katër orëve akademike

Ora	Bërthama	Puna e studentit	Çfarë prodhon studenti
I · 45 min (Java XIII)	Veprimet e kryeshme në ℕ dhe ℕ₀; mbledhja dhe zbritja	Kundërshembuj; vetitë e zbritjes	Tabelë vetish me argumente
II · 45 min (Java XIII)	Shumëzimi dhe pjesëtimi; ekuacionet e thjeshta; rendi i veprimeve	Pjesëtimi me zero; analiza e shprehjeve	Shpjegim për nxënësin; shprehje të analizuara
III · 45 min (Java XV)	Relacioni dhe paraqitjet e tij; vetitë	Kalim ndërmjet paraqitjeve; «rregulli i fshehtë»	Një relacion në katër paraqitje
IV · 45 min (Java XV)	Ekuivalenca, renditja, shenja e barazimit; diagnostikimi	Analizë klasifikimi; punë me 8 + 4 = □ + 5	Fletë diagnostike dhe plan ndërhyrjeje

Për menaxhimin e ngarkesës, materiali ndahet në tri shtresa:

- Në auditor trajtohen detyrimisht kapitujt 2–12, pa vërtetimet e plota, dhe seksioni 13.1.
- Në seminar punohen vërtetimet, njësitë profesionale, rastet e kapitullit 13, kapitulli 14 dhe detyrat 15.1–15.6.
- Në studim individual mbeten detyrat e seksionit 15.7, banka e problemeve në kapitullin 18 dhe puna e pavarur në 17.2; testi i kapitullit 16 përdoret për vetëkontroll ose për vlerësim.

Teksti nuk është menduar të lexohet i tëri në auditor. Ndarja mund të përshtatet me orarin e lëndës. Shtojca A e zbërthen Tabelën 1 në plane me minuta për secilën orë.

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 2

2. Bashkësia e numrave natyrorë si strukturë

NË KËTË KAPITULL

– Nga llogaritja te struktura
– ℕ dhe $\mathbb{N}_0$
– Veprimi i brendshëm
– «Nuk bëhet» apo «nuk bëhet këtu»?
– Njësi profesionale: «nga 5 nuk hiqet 8»

2.1 Nga llogaritja te struktura

Nxënësi i klasës së dytë di të thotë sa bën 7 + 5. Pyetja «a bën gjithmonë dy numra natyrorë të mblidhen?» duket e çuditshme, sepse përgjigjja është aq e natyrshme sa nuk vihet re. Por pyetja e njëjtë për zbritjen nuk është më e natyrshme. Pikërisht aty fillon ajo që këtu e quajmë strukturë: bashkësia e numrave, veprimet që kryhen në të dhe rregullat që vlejnë për të gjithë numrat, jo vetëm për ata që provuam.

Dallimi ka rëndësi për mësuesin për një arsye praktike. Disa pohime që i thotë në klasën e parë janë të vërteta vetëm brenda numrave që nxënësi njeh. Nëse mësuesi nuk e di se ku është kufiri, ai i paraqet si të vërteta të përgjithshme dhe i duhet t'i rrëzojë më vonë.

2.2 ℕ dhe $\mathbb{N}_0$

Në literaturë dhe në tekste shkollore, bashkësia e numrave natyrorë përfshin ose nuk përfshin zeron, sipas marrëveshjes. Programi flet për bashkësinë ℕ. Ne i mbajmë të dyja, sepse dallimi na shërben: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ është bashkësia e numrave me të cilët numërojmë, dhe $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ është bashkësia ku përgjigjja e pyetjes «sa janë?» mund të jetë edhe «asnjë».

Zeroja nuk është një numër si të tjerët për nxënësin. Ai numëron nga 1 dhe zeroja i del kur heq gjithçka ose kur i duhet të shënojë një rend bosh. Në strukturë, roli i saj është i qartë: ajo është numri që nuk ndryshon asgjë kur mblidhet. Për mësuesin mjafton që, kur përdor fjalën «numër natyror», të dijë nëse zeroja përfshihet dhe të jetë i njëjtë me tekstin që përdor klasa.

2.3 Veprimi i brendshëm

> **Përkufizimi 2.1.** Le të jetë S një bashkësi. Një veprim në S i shoqëron çdo çifti (a, b) me $a, b \in S$ një element të vetëm të S. Kur kjo ndodh, themi se veprimi është i brendshëm, ose se S është e mbyllur ndaj veprimit.

Përkufizimi kërkon dy gjëra: që rezultati të ekzistojë për çdo çift dhe që të qëndrojë brenda S. Mbledhja dhe shumëzimi i plotësojnë të dyja në ℕ dhe në $\mathbb{N}_0$. Zbritja dhe pjesëtimi jo.

Pohimi 2.1. (i) Mbledhja dhe shumëzimi janë veprime të brendshme në $\mathbb{N}$ dhe në $\mathbb{N}_0$.
(ii) Zbritja nuk është veprim i brendshëm as në $\mathbb{N}$, as në $\mathbb{N}_0$.
(iii) Pjesëtimi nuk është veprim i brendshëm në $\mathbb{N}$. Në $\mathbb{N}_0$, përveç kësaj, ai nuk është i përkufizuar për pjesëtuesin zero.

Vërtetim. (i) Do ta shohim te kapitujt 3 dhe 4, nga përkufizimi i shumës dhe i prodhimit si numër elementesh të një bashkësie të fundme. Për $\mathbb{N}$ shtojmë se shuma e dy numrave pozitivë dhe prodhimi i dy numrave pozitivë janë pozitivë. (ii) Mjafton një kundërshembull: në $\mathbb{N}_0$ nuk ka numër c me $5 + c = 3$, sepse $5 + c \geq 5$. Në $\mathbb{N}$ pengesë është edhe $5 - 5$, sepse rezultati 0 nuk i përket $\mathbb{N}$. (iii) Nuk ka numër natyror c me $2 \times c = 7$: sipas renditjes së plotë në $\mathbb{N}_0$ (Leksioni 6, seksioni 9.1), ose $c \leq 3$, ose $c \geq 4$; sipas pajtueshmërisë së renditjes me shumëzimin (vetia (iv) e pohimit 9.1 të Leksionit 6), në rastin e parë $2 \times c \leq 2 \times 3 = 6 < 7$, dhe në të dytin $2 \times c \geq 2 \times 4 = 8 > 7$. Në $\mathbb{N}_0$ shtohet çifti $(a, 0)$, për të cilin do të flasim në kapitullin 4. ■

Figura 1 e tregon këtë dallim në boshtin numerik. Mbledhja me një numër pozitiv lëviz djathtas dhe nuk del nga numrat natyrorë. Shumëzimi në $\mathbb{N}_0$ paraqitet më mirë me grupe të barabarta ose me një rrjetë sesa si lëvizje, por edhe rezultati i tij mbetet numër natyror. Zbritja lëviz majtas dhe mund të kalojë zeron. Pjesëtimi mund të na çojë në një pikë ndërmjet numrave.

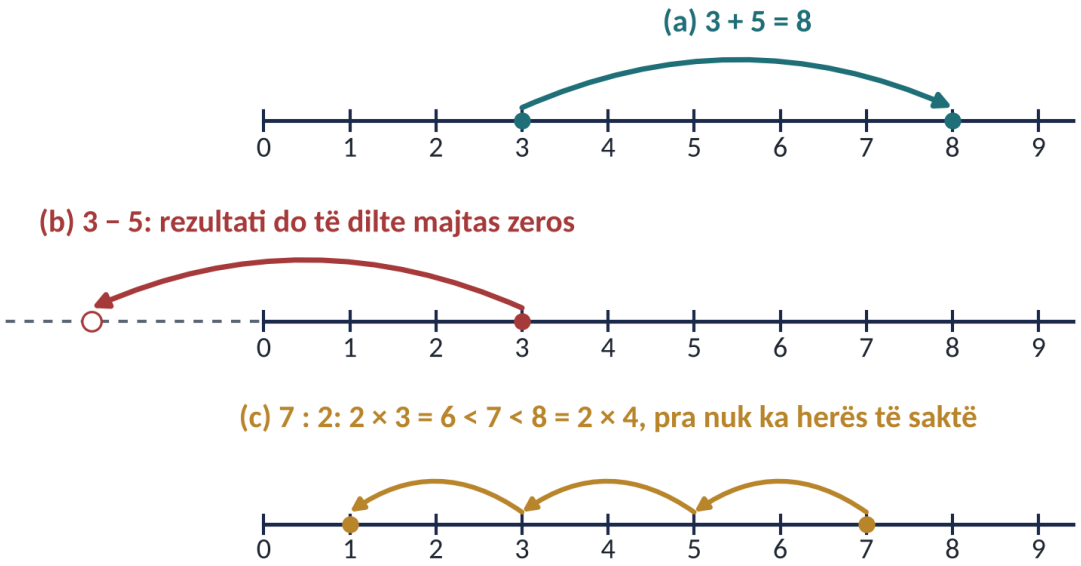


Figura 1. Pse zbritja dhe pjesëtimi nuk janë gjithmonë të kryeshme në $\mathbb{N}_0$: (a) $3 + 5$ qëndron në $\mathbb{N}_0$; (b) $3 - 5$ do të dilte majtas zeros; (c) $7 : 2$ do të binte ndërmjet 3 dhe 4.

2.4 «Nuk bëhet» apo «nuk bëhet këtu»?

Ky rezultat ka pasojë të drejtpërdrejtë për gjuhën e klasës. Fjalia «$5 - 8$ nuk bëhet» është e saktë për nxënësin që njeh vetëm numrat natyrorë, por është fjali për bashkësinë, jo për veprimin. Disa vjet më vonë i njëjti nxënës do të mësojë se $5 - 8 = -3$. Nëse mësuesi i ka thënë «nuk bëhet kurrë», numrat e plotë do të duken si kundërshtim i asaj që iu mësua.

E njëjta gjë vlen për «pjesëtimi e zvogëlon numrin», «shumëzimi e rrit numrin» ose «numri më i vogël nuk zbritet nga më i madhi». Këto janë të vërteta vetëm brenda disa kufijve. Shumëzimi me 1 nuk e rrit numrin, dhe shumëzimi me 0 e zvogëlon çdo numër pozitiv. Mësuesi nuk ka pse t'i shpjegojë nxënësit të klasës së parë numrat negativë. Mjafton t'i formulojë fjalitë në mënyrë që të mos jenë të rreme: «Me numrat që dimë tani, nga 5 nuk mund të heqim 8.»

2.5 Njësi profesionale: «nga 5 nuk hiqet 8»

Shembull matematikor i zgjidhur. Në $\mathbb{N}_0$ ekuacioni $5 + c = 8$ ka zgjidhje, $c = 3$, ndërsa ekuacioni $8 + c = 5$ nuk ka, sepse $8 + c \geq 8 > 5$. Prandaj $8 - 5$ ekziston dhe $5 - 8$ nuk ekziston në $\mathbb{N}_0$.

Paraqitja në klasë. Mësuesi kërkon një situatë me objekte: Liria ka 5 kartolina dhe duhet t'i japë 8. Pastaj kërkon një situatë tjetër: në termometër janë 5 gradë dhe temperatura bie 8 gradë. Nxënësit e klasave të larta të arsimit fillor mund të tregojnë ku shkon treguesi, pa llogaritje të reja.

Pyetje diagnostikuese. «A mund të heqësh 8 kartolina nga 5? Po në termometër, a mund të bjerë temperatura 8 gradë nga 5 gradë?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Kartolinat jo, se nuk i kam. Termometri po, se shkon nën zero.»

Analiza didaktike. Nxënësi dallon një situatë ku sasia nuk mund të bëhet negative nga një situatë ku shkalla vazhdon nën zero. Ky dallim është më i rëndësishëm se llogaritja. Nëse nxënësi përgjigjet «termometri nuk bën», mund të mos e ketë parë vetë nën zero, ose mund të ketë mësuar «nuk bëhet» si rregull të përgjithshëm. Pyetja «Ku e ke parë temperaturën nën zero?» i dallon të dy rastet.

Alternativë metodike. Mësuesi e zëvendëson fjalinë e ndalimit me një fjali të kushtëzuar: «Me numrat që njohim tani nuk mund ta bëjmë. Më vonë do të mësojmë numra të tjerë.» Për kontroll në rast të ri: «Sa bën $3 - 7$?» në klasën ku fjalia e re është përdorur disa javë.

Pyetje reflektuese për studentin. Gjeni në një tekst shkollor të arsimit fillor një fjali që është e vërtetë vetëm në $\mathbb{N}_0$. Si do ta riformulonit pa e ngarkuar nxënësin?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

► Veprimi është i brendshëm kur rezultati ekziston për çdo çift dhe mbetet në bashkësi.
► Mbledhja dhe shumëzimi janë të brendshme në $\mathbb{N}$ dhe $\mathbb{N}_0$; zbritja dhe pjesëtimi jo.
► «Nuk bëhet» është fjali për bashkësinë, jo për veprimin; formulimi i mësuesit duhet ta lërë derën të hapur.
► Disa pohime të klasës («shumëzimi e rrit») kanë kufij që mësuesi duhet t'i njohë.

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 3

3. Mbledhja dhe zbritja në bashkësinë ℕ

NË KËTË KAPITULL

– Mbledhja si numër elementesh
– Vetitë e mbledhjes
– Zbritja si veprim i kundërt
– Vetitë e zbritjes
– Njësi profesionale: zbritja në kllapa

3.1 Mbledhja si numër elementesh

Në klasën e parë mbledhja nis nga bashkimi i dy grupeve objektesh. Në gjuhën e bashkësive, nëse A dhe B janë bashkësi të fundme pa element të përbashkët, me $|A| = a$ dhe $|B| = b$, atëherë

$$a+b=¿\,A\cup B\vee. \tag{3.1}$$

Barazimi (3.1) nuk varet nga cilat bashkësi zgjedhim, sepse dy bashkësi me po aq elemente vihen në përputhje një për një. Metodika e veprimeve me bashkësi nuk është temë e këtij leksioni. Këtu i përdorim vetëm si gjuhë për përkufizimin, që studenti e njeh nga matematika e fakultetit. Kushti «pa element të përbashkët» është thelbësor. Nëse në një klasë 12 nxënës luajnë futboll dhe 9 luajnë basketboll, nuk mund të themi se janë 21 nxënës pa ditur nëse dikush luan të dyja.

Nga (3.1) del menjëherë se shuma e dy numrave nga $\mathbb{N}_0$ ekziston dhe i përket $\mathbb{N}_0$, sepse bashkimi i dy bashkësive të fundme është i fundëm. Me këtë mbyllet pjesa e parë e pohimit 2.1 për mbledhjen.

3.2 Vetitë e mbledhjes

> **Pohimi 3.1.** Për çdo $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ vlejnë:
> (i) vetia ndërruese: $a + b = b + a$;
> (ii) vetia shoqëruese: $(a + b) + c = a + (b + c)$;
> (iii) zero është element neutral: $a + 0 = a$;
> (iv) vetia e thjeshtimit: nëse $a + c = b + c$, atëherë $a = b$.

Vërtetim. Përdorim vetëm përkufizimin (3.1): $a + b = |A \cup B|$ për bashkësi të fundme A, B pa element të përbashkët, me $|A| = a$ dhe $|B| = b$. Vetitë (i)–(iii) dalin nga barazime bashkësish. Vetia (iv) kërkon një lemë, që e vërtetojmë veçmas, që asnjë hap të mos mbështetet te një veti ende e pajustifikuar.

(i) Nëse $A \cap B = \emptyset$, atëherë edhe $B \cap A = \emptyset$, dhe $B \cup A = A \cup B$. Prandaj $b + a = |B \cup A| = |A \cup B| = a + b$.

(ii) Zgjedhim A, B, C me a, b, c elemente, të tilla që asnjë çift prej tyre të mos ketë element të përbashkët. Atëherë $A \cup B$ nuk ka element të përbashkët me C, dhe A nuk ka me $B \cup C$. Sipas

(3.1), $(a + b) + c = |(A \cup B) \cup C|$ dhe $a + (b + c) = |A \cup (B \cup C)|$. Bashkimi i bashkësive është shoqërues, prandaj të dyja anët numërojnë elementet e së njëjtës bashkësi.

(iii) Bashkësia boshe nuk ka element të përbashkët me A, dhe $A \cup \emptyset = A$. Prandaj $a + 0 = |A \cup \emptyset| = |A| = a$.

> **Lema 3.1.** Për $x, y \in \mathbb{N}_0$, nëse $x + 1 = y + 1$, atëherë $x = y$.

Vërtetim. Marrim bashkësi X, Y me $|X| = x$, $|Y| = y$, dhe elemente $p \notin X$, $q \notin Y$. Sipas (3.1), $x + 1 = |X \cup \{p\}|$ dhe $y + 1 = |Y \cup \{q\}|$. Barazimi i numrave do të thotë se ka një përputhje një për një f nga $X \cup \{p\}$ te $Y \cup \{q\}$. Nëse $f(p) = q$, atëherë f, e kufizuar në X, është përputhje një për një nga X te Y. Përndryshe $f(p) = y_0$ për ndonjë $y_0 \in Y$, dhe $q = f(x_0)$ për ndonjë $x_0 \in X$. Përkufizojmë g në X: $g(x_0) = y_0$ dhe $g(t) = f(t)$ për $t \neq x_0$. Funksioni g ndryshon f-në vetëm te x_0, që f e çonte te q, dhe e çon atë te y_0, që askush tjetër nuk e merr. Prandaj g është përputhje një për një nga X te Y, dhe $x = y$. ∎

(iv) Bëjmë induksion sipas c. Për $c = 0$, sipas (iii) barazimi $a + 0 = b + 0$ është $a = b$. Supozojmë se vetia vlen për c, dhe le të jetë $a + (c + 1) = b + (c + 1)$. Sipas (ii), kjo është $(a + c) + 1 = (b + c) + 1$. Sipas lemës 3.1, $a + c = b + c$, dhe sipas hipotezës së induksionit $a = b$. ∎

Radha e vërtetimit ka rëndësi. Vetia (iv) përdor (ii), (iii) dhe lemën 3.1, që janë vërtetuar para saj; asnjë hap nuk mbështetet te një veti që vjen më pas.

Vetitë (i) dhe (ii) i përdorëm në Leksionin 4 për strategjitë me gojë. Këtu duhet vënë re se ato janë veti të ndryshme. Kur nxënësi llogarit $6 + 9 + 4$ si $(6 + 4) + 9$, ai përdor të dyja: fillimisht ndërron rendin e mbledhorëve dhe pastaj i grupon ndryshe. Vetia e thjeshtimit nuk përmendet në klasë me këtë emër, por nxënësi e përdor sa herë krahason $7 + 5$ dhe $7 + 6$ pa i llogaritur.

Një vërejtje për mësimin. Vetia ndërruese nuk është e dukshme për fëmijën në situata me kuptim. Të marrësh 3 mollë dhe pastaj 8 është ngjarje tjetër nga të marrësh 8 dhe pastaj 3, edhe pse rezultati është i njëjtë. Nxënësi e zbulon vetinë si të vërtetë për numrat, jo për ngjarjet, dhe ky zbulim ka vlerë praktike: në vend që të numërojë 8 hapa nga 3, ai numëron 3 hapa nga 8.

3.3 Zbritja si veprim i kundërt

Në Javën IX e përkufizuam zbritjen me mbledhjen. E rimarrim tani si veprim në bashkësi.

> **Përkufizimi 3.1.** Për $a, b \in \mathbb{N}_0$, diferenca $a - b$ është numri $c \in \mathbb{N}_0$ për të cilin $b + c = a$, kur një numër i tillë ekziston.
>
> **Pohimi 3.2.** Diferenca $a - b$ ekziston në $\mathbb{N}_0$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $b \leq a$, dhe kur ekziston është e vetme.

Vërtetim. Ekzistenca e një c me $b + c = a$ është pikërisht përkufizimi i $b \leq a$ në Javën XII. Për unicitetin: nëse $b + c = a$ dhe $b + c' = a$, atëherë $b + c = b + c'$, dhe nga vetitë (i) dhe (iv) e pohimit 3.1 marrim $c = c'$. ■

Kështu, dy pyetje që në klasë duken të ndryshme, «sa mbeten?» dhe «sa duhen?», i përgjigjen të njëjtit përkufizim. Uniciteti është ai që e bën të mundur kontrollin me mbledhje: nëse $b + c = a$, atëherë c është e vetmja përgjigje e mundshme, jo një nga shumë përgjigje.

3.4 Vetitë e zbritjes

Zbritja nuk ka vetinë ndërruese, sepse $8 - 5 \neq 5 - 8$; madje njëra anë nuk ekziston në $\mathbb{N}_0$. Nuk ka as vetinë shoqëruese:

$$(10 - 4) - 3 = 3, \quad 10 - (4 - 3) = 9.$$

Në vend të tyre ka tri rregulla, që shpjegojnë çfarë ndodh kur grupojmë ndryshe.

> **Pohimi 3.3.** Për $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ vlejnë:
> (i) nëse $b + c \leq a$, atëherë $(a - b) - c = a - (b + c)$;
> (ii) nëse $c \leq b$ dhe $b \leq a$, atëherë $a - (b - c) = (a - b) + c$;
> (iii) nëse $c \leq a$, atëherë $(a + b) - c = (a - c) + b$.

Kushtet shkruhen veçmas për secilin identitet, sepse nuk janë të njëjta. Secili kusht siguron, sipas pohimit 3.2, që çdo diferencë në të dy anët e barazimit të ekzistojë në $\mathbb{N}_0$.

Vërtetim. Në të tri rastet përdorim përkufizimin 3.1: për të treguar se $x - y = d$, mjafton të tregojmë se $y + d = x$.

(i) Meqë $b + c \leq a$, sipas pohimit 3.2 ekziston $d = a - (b + c)$, pra $(b + c) + d = a$. Sipas vetisë shoqëruese të mbledhjes, $b + (c + d) = a$. Pra $b \leq a$ dhe, sipas përkufizimit 3.1, $a - b = c + d$. Barazimi $c + d = a - b$ do të thotë, përsëri sipas përkufizimit, $(a - b) - c = d$. Pra $(a - b) - c = a - (b + c)$.

(ii) Meqë $b \leq a$ dhe $c \leq b$, ekzistojnë $a - b$ dhe $b - c$, me $b + (a - b) = a$ dhe $c + (b - c) = b$. Shënojmë $d = (a - b) + c$. Atëherë $(b - c) + d = (b - c) + (c + (a - b)) = ((b - c) + c) + (a - b) = b + (a - b) = a$. Hapat përdorin me radhë vetinë ndërruese, vetinë shoqëruese, përkufizimin e $b - c$ bashkë me vetinë ndërruese dhe përkufizimin e $a - b$. Sipas përkufizimit 3.1, $a - (b - c) = d$.

(iii) Meqë $c \leq a$, ekziston $a - c$, me $c + (a - c) = a$. Shënojmë $d = (a - c) + b$. Sipas vetisë shoqëruese, $c + d = (c + (a - c)) + b = a + b$. Sipas përkufizimit 3.1, $(a + b) - c = d$. ∎

Kushtet nuk janë formalitet. Te (ii), për $a = 3$, $b = 5$, $c = 4$, ana e majtë ekziston, $3 - (5 - 4) = 2$, por ana e djathtë jo, sepse $3 - 5$ nuk ekziston në $\mathbb{N}_0$. Te (iii), për $a = 2$, $b = 5$, $c = 3$, ana e majtë është $(2 + 5) - 3 = 4$, ndërsa $2 - 3$ nuk ekziston; këtu vlen trajta tjetër, $(a + b) - c = a + (b - c)$, me kushtin $c \leq b$. Tabela 2 i përmbledh të tria rregullat bashkë me gabimin që secila parandalon kur zbatohet mekanikisht.

Tabela 2. Rregullat e zbritjes: kushtet, hapi kyç i vërtetimit dhe gabimi që parandalojnë

Rregulli	Kushtet në $\mathbb{N}_0$	Hapi kyç i vërtetimit	Zbatimi mekanik që e prish
(i) $(a-b)-c=a-(b+c)$	$b+c\le a$	$(b+c)+d=a$ sjell $b+(c+d)=a$	«$a-(b+c)=a-b+c$»: $10-(4+3)=3$, jo 9
(ii) $a-(b-c)=(a-b)+c$	$c\le b\le a$	$((b-c)+c)+(a-b)=b+(a-b)=a$	«$a-(b-c)=a-b-c$»: $43-(20-1)=24$, jo 22
(iii) $(a+b)-c=(a-c)+b$	$c\le a$	$c+((a-c)+b)=(c+(a-c))+b=a+b$	$(2+5)-3=4$, por $(2-3)+5$ nuk ekziston në $\mathbb{N}_0$; këtu përdoret $2+(5-3)$

Rregulli (i) është ai që nxënësi përdor kur zbret me pjesë: $43-18$ si $43-10-8$. Rregulli (ii) shpjegon llogaritjen me kompensim: $43-19=43-(20-1)=43-20+1$. Në klasë kjo thuhet: «hoqa 1 më shumë, prandaj e kthej.» Të dy rregullat janë përdorur që nga Java X si strategji. Këtu ato bëhen pasoja të përkufizimit.

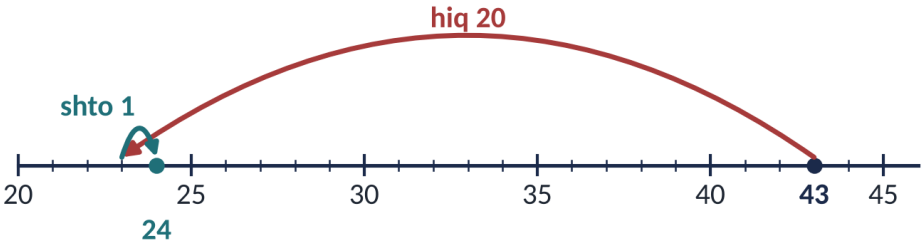


Figura 2. Rregulli (ii) i pohimit 3.3 te $43-19$: kapërcimi 20 majtas është 1 më shumë seç duhet, prandaj kthehemi 1 djathtas.

3.5 Njësi profesionale: zbritja në kllapa

Shembull matematikor i zgjidhur. $43-19=43-(20-1)=(43-20)+1=23+1=24$. Kontrolli: $24+19=43$.

Paraqitja në klasë. Nxënësit vizatojnë boshtin numerik nga 20 deri në 45 dhe bëjnë dy kapërcime: 20 majtas dhe 1 djathtas. Pastaj mësuesi pyet pse kapërcimi i dytë nuk shkon majtas.

Pyetje diagnostikuese. «Genti ka llogaritur $43-19$ kështu: $43-20=23$, pastaj $23-1=22$. Sa i ka hequr gjithsej nga 43? Sa duhej të hiqte?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Ka hequr 21. Duhej 19. Ka hequr 2 më shumë.»

Analiza didaktike. Nxënësi që e kryen këtë llogaritje mund të ketë mbajtur mend «ndryshoje numrin dhe rregulloje», pa e lidhur rregullimin me drejtimin. Një shpjegim tjetër është se ai zbatoi vetinë shoqëruese si te mbledhja, pra e mori $43-(20-1)$ si $43-20-1$. Përgjigjja e mësipërme tregon se nxënësi e kontrollon gjithë sasinë e hequr dhe se nuk po e ndjek rregullin mekanikisht. Për të dalluar dy shpjegimet, mësuesi pyet: «Po sikur në vend të 19 të ishte 21: $43-21$?»

Alternativë metodike. Për një kohë nxënësi shkruan sasinë e hequr gjithsej pranë çdo hapi: «hoqa 20, pastaj ktheva 1: gjithsej hoqa 19». Kontrolli në rast të ri: $52-28$ dhe $52-32$.

Pyetje reflektuese për studentin. Formuloni rregullin përkatës për shumën: si ndryshon shuma $a + (b - c)$? Pse rregulli i zbritjes «ndryshon shenjë» dhe ai i mbledhjes jo?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

► Shuma përkufizohet si numër elementesh të bashkimit të dy bashkësive pa element të përbashkët.

► Mbledhja ka vetitë ndërruese, shoqëruese, të thjeshtimit dhe element neutral zeron.

► Diferenca $a - b$ është numri i vetëm c me $b + c = a$; ekziston vetëm kur $b \leq a$.

► Zbritja nuk është as ndërruese, as shoqëruese; rregullat e pohimit 3.3 shpjegojnë zbritjen me pjesë dhe kompensimin.

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 4

4. Shumëzimi dhe pjesëtimi në bashkësinë ℕ

NË KËTË KAPITULL

– Dy përkufizime të shumëzimit
– Vetitë e shumëzimit
– Pjesëtimi si veprim i kundërt
– Pse nuk pjesëtojmë me zero
– Vetitë e pjesëtimit
– Njësi profesionale: pjesëtimi me zero

4.1 Dy përkufizime të shumëzimit

Në Leksionin 3 shumëzimi u ndërtua si numërim grupesh të barabarta: $m \times n$ është numri i objekteve në m grupe me nga n objekte. Ky kuptim shkruhet me dy barazime:

$$0 \times n = 0, \quad (m+1) \times n = m \times n + n. \tag{4.1}$$

Barazimet (4.1) përcaktojnë prodhimin për çdo m, hap pas hapi, dhe tregojnë se shumëzimi është veprim i brendshëm në $\mathbb{N}_0$. Por ky përkufizim nuk tregon pse 3×5 dhe 5×3 janë të barabartë. Për këtë na duhet një përkufizim i dytë.

Përkufizimi 4.1. Le të jenë A dhe B dy bashkësi. Produkti kartezian $A \times B$ është bashkësia e të gjitha çifteve të renditura (x, y) me $x \in A$ dhe $y \in B$.

Nëse $|A| = m$ dhe $|B| = n$, çiftet mund të vendosen në një rrjetë me m rreshta dhe n kolona (Figura 3). Çdo rresht ka n çifte, dhe sipas (4.1)

$$m \times n = ¿\, A \times B \vee . \tag{4.2}$$

Situata që e bën këtë të dukshme në klasë është ajo e kombinimeve: 3 bluza dhe 4 pantallona japin 3×4 veshje, sepse çdo veshje është një çift. Ky model ka këtu edhe një rol tjetër: nga produkti kartezian do të lindë në kapitullin 7 koncepti i relacionit.

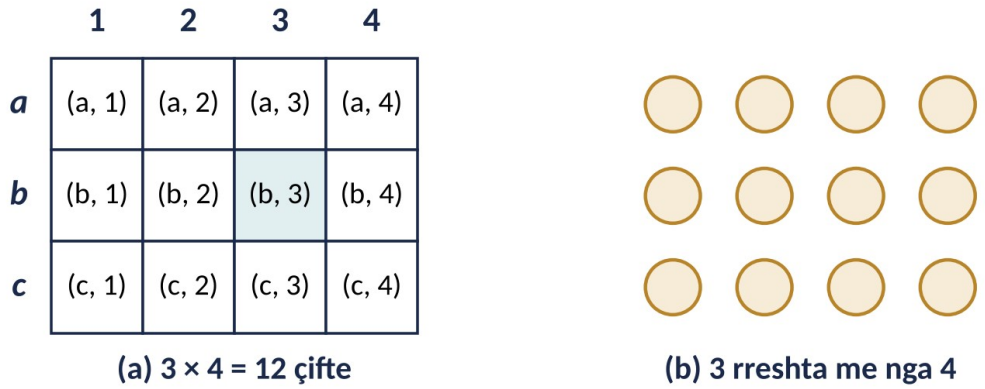


Figura 3. Prodhimi 3×4 si numër çiftesh: (a) rrjeta e produktit $A \times B$, ku çdo kuti është një çift; (b) tre rreshta me nga katër, rreshtim që jep të njëjtin numër.

4.2 Vetitë e shumëzimit

Pohimi 4.1. Për çdo $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ vlejnë:
(i) vetia ndërruese: $a \times b = b \times a$;
(ii) vetia shoqëruese: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$;
(iii) 1 është element neutral: $1 \times a = a$;
(iv) vetia shpërndarëse: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$;
(v) $a \times b = 0$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $a = 0$ ose $b = 0$;
(vi) vetia e thjeshtimit: nëse $a \times c = b \times c$ dhe $c \neq 0$, atëherë $a = b$.

Vërtetim. Përdorim dy përshkrimet e prodhimit nga seksioni 4.1: përkufizimin rekurziv (4.1) dhe numërimin e çifteve (4.2), $m \times n = |A \times B|$ për $|A| = m$, $|B| = n$. Marrim bashkësi të fundme A, B, C me $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$.

(i) Pasqyrimi $(x, y) \mapsto (y, x)$ është përputhje një për një nga $A \times B$ te $B \times A$: çdo çift (y, x) vjen nga një çift i vetëm (x, y). Sipas (4.2), $a \times b = |A \times B| = |B \times A| = b \times a$.

(ii) Pasqyrimi $((x, y), z) \mapsto (x, (y, z))$ është përputhje një për një nga $(A \times B) \times C$ te $A \times (B \times C)$. Sipas (4.2), $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

(iii) Në (4.1) marrim $m = 0$ dhe $n = a$: $1 \times a = 0 \times a + a = 0 + a = a$. Përdorëm $0 \times a = 0$ nga (4.1) dhe pikat (i) dhe (iii) të pohimit 3.1.

(iv) Zgjedhim C pa element të përbashkët me B. Atëherë $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, dhe dy bashkësitë djathtas nuk kanë çift të përbashkët, sepse çiftet e tyre ndryshojnë në vendin e dytë. Sipas (4.2) dhe (3.1), $a \times (b + c) = |A \times (B \cup C)| = |A \times B| + |A \times C| = a \times b + a \times c$.

(v) Nëse $a = 0$ ose $b = 0$, njëra nga A, B është boshe dhe $A \times B = \emptyset$, pra $a \times b = 0$. Nëse $a \neq 0$ dhe $b \neq 0$, marrim $x \in A$ dhe $y \in B$; atëherë $(x, y) \in A \times B$, pra $a \times b \neq 0$.

(vi) Le të jetë $c \neq 0$ dhe $a \times c = b \times c$. Supozojmë $a \neq b$. Renditja në $\mathbb{N}_0$ është e plotë (Leksioni 6, seksioni 9.1), prandaj mund të marrim $a < b$, pra $b = a + d$ me $d \geq 1$. Sipas (i) dhe (iv), $b \times c = c \times (a + d) = c \times a + c \times d = a \times c + d \times c$. Atëherë $0 + a \times c = a \times c = b \times c = d \times c + a \times c$, dhe sipas pohimit 3.1 (i), (iii) dhe (iv), $d \times c = 0$. Kjo bie ndesh me (v), sepse $d \neq 0$ dhe $c \neq 0$. Pra $a = b$. ∎

Pika (i) është një rezultat i fuqishëm dhe aspak i dukshëm nga përkufizimi (4.1). Nga pikëpamja e situatës, 3 pako me nga 5 lapsa dhe 5 pako me nga 3 lapsa janë gjëra të ndryshme. Numri i lapsave është i njëjtë, dhe këtë e tregon vetëm rrotullimi i rrjetës. Prandaj marrëveshja për rendin e faktorëve në klasë nuk bie ndesh me vetinë ndërruese: marrëveshja i përket situatës, ndërsa vetia i përket numrit.

Vetia shpërndarëse është ura ndërmjet dy veprimeve. Ajo qëndron pas çdo strategjie të shumëzimit me gojë dhe pas algoritmit me shkrim (Leksionet 5 dhe 6). Pika (v) ka vlerë më vonë, kur nxënësi zgjidh ekuacione në shkollën e mesme. Pika (vi) është çelësi i unicitetit të pjesëtimit.

4.3 Pjesëtimi si veprim i kundërt

> **Përkufizimi 4.2.** Për $a, b \in \mathbb{N}_0$, me $b \neq 0$, herësi $a : b$ është numri $c \in \mathbb{N}_0$ për të cilin $b \times c = a$, kur një numër i tillë ekziston.

Në këtë rast themi se b është pjesëtues i a dhe shkruajmë $b \mid a$. Uniciteti del nga pika (vi) e pohimit 4.1, si te zbritja. Ekzistenca nuk është e sigurt, dhe këtu teorema e pjesëtimit me mbetje nga Java XI jep përgjigjen e plotë: për çdo a dhe çdo $b \neq 0$ ka një çift të vetëm (q, r) me $a = b \times q + r$ dhe $0 \leq r < b$. Herësi i saktë ekziston kur $r = 0$.

Në klasë pjesëtimi shfaqet me dy kuptime, ndarja në grupe të barabarta dhe matja, që u analizuan në Leksionin 5. Të dy i përgjigjen përkufizimit 4.2. Te $12 : 3$ me ndarje, pyesim: $3 \times ? = 12$, tri grupe me sa? Me matje, pyesim: $? \times 3 = 12$, sa grupe me nga tre? Vetia ndërruese e bën që përgjigjja të jetë e njëjtë.

4.4 Pse nuk pjesëtojmë me zero

Përkufizimi 4.2 e përjashton $b = 0$. Nxënësi e pyet shpesh arsyen, dhe mësuesi duhet të ketë një përgjigje që nuk është «kështu është rregulli».

> **Pohimi 4.2.** Për çdo $a \in \mathbb{N}_0$ nuk ka numër të vetëm c me $0 \times c = a$. Për $a \neq 0$ nuk ka asnjë numër të tillë; për $a = 0$ çdo numër e plotëson barazimin.

Vërtetim. Për çdo c kemi $0 \times c = 0$. Prandaj, nëse $a \neq 0$, barazimi $0 \times c = a$ nuk plotësohet nga asnjë c; nëse $a = 0$, ai plotësohet nga të gjithë. ■

Pohimi tregon se ka dy arsye të ndryshme, jo një. Te $5 : 0$ nuk ka përgjigje. Te $0 : 0$ ka shumë përgjigje, dhe nuk ka asnjë mënyrë natyrore për të zgjedhur njërën. Në të dyja rastet, simboli nuk përcakton një numër, prandaj e lëmë të papërkufizuar. Kjo nuk është ndalim i vendosur nga dikush. Është vetë pasojë e faktit që pjesëtimi është veprimi i kundërt i shumëzimit. Duhet dalluar edhe rasti i kundërt: $0 : 5 = 0$ është krejt në rregull, sepse $5 \times 0 = 0$.

4.5 Vetitë e pjesëtimit

> **Pohimi 4.3.** Për $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ vlejnë:
> (i) nëse $b \neq 0$, $c \neq 0$ dhe $b \times c \mid a$, atëherë $(a : b) : c = a : (b \times c)$;
> (ii) nëse $c \neq 0$, $c \mid a$ dhe $c \mid b$, atëherë $(a + b) : c = a : c + b : c$;
> (iii) nëse $c \neq 0$ dhe $c \mid a$, atëherë $(a \times b) : c = (a : c) \times b$.

Vërtetim. Përdorim përkufizimin 4.2: për $y \neq 0$, për të treguar se $x : y = d$, mjafton të tregojmë se $y \times d = x$. Herësi, kur ekziston, është i vetëm sipas pikës (vi) të pohimit 4.1.

(i) Meqë $b \times c \mid a$, ekziston d me $(b \times c) \times d = a$. Sipas vetisë shoqëruese, $b \times (c \times d) = a$; pra $b \mid a$ dhe $a : b = c \times d$. Barazimi $c \times d = a : b$ do të thotë, sipas përkufizimit, $(a : b) : c = d = a : (b \times c)$.

(ii) Meqë $c \mid a$ dhe $c \mid b$, ekzistojnë $a : c$ dhe $b : c$, me $c \times (a : c) = a$ dhe $c \times (b : c) = b$. Sipas vetisë shpërndarëse, $c \times (a : c + b : c) = c \times (a : c) + c \times (b : c) = a + b$. Pra $(a + b) : c = a : c + b : c$.

(iii) Meqë $c \mid a$, ekziston $a : c$, me $c \times (a : c) = a$. Sipas vetisë shoqëruese, $c \times ((a : c) \times b) = (c \times (a : c)) \times b = a \times b$. Pra $(a \times b) : c = (a : c) \times b$. ∎

Nga pohimi 3.3 dhe pohimi 4.3 shihet një ngjashmëri e qartë: pjesëtimi sillet ndaj shumëzimit ashtu si zbritja ndaj mbledhjes. Vetia (ii) ka një kufizim që duhet theksuar. Pjesëtimi shpërndahet nga e djathta, jo nga e majta:

$$(12+6):3=4+2,\quad 12:(2+4)=2\neq 6+3.$$

Është i rëndësishëm edhe drejtimi i vetisë. Nëse c pjesëton shumën, nuk del se pjesëton çdo mbledhor: $4 \mid (3 + 5)$, por 4 nuk pjesëton as 3, as 5. Vetia (ii) lejon strategjinë $52 : 4 = 40 : 4 + 12 : 4 = 13$, por vetëm kur zbërthimi bëhet në numra të pjesëtueshëm me 4.

4.6 Njësi profesionale: pjesëtimi me zero

Shembull matematikor i zgjidhur. Te $6 : 0$ kërkojmë c me $0 \times c = 6$. Çdo c jep $0 \times c = 0 \neq 6$. Pra nuk ka përgjigje. Te $6 : 1$ kërkojmë c me $1 \times c = 6$, dhe përgjigjja është 6.

Paraqitja në klasë. Mësuesi fillon me matjen: «Kam 6 mollë dhe i vendos në qese me nga 2. Sa qese mbush?» Pastaj «me nga 1». Pastaj: «Me nga 0. Sa qese më duhen derisa të mbaroj 6 mollët?» Nxënësit e kuptojnë se mund të mbushin qese pa fund dhe mollët nuk mbarojnë.

Pyetje diagnostikuese. «Arbi ka shkruar $6 : 0 = 0$. Si mund ta kontrollojmë pjesëtimin me shumëzim? A del?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Duhet 0×0 të bëjë 6, por bën 0. Pra nuk del. Asnjë numër nuk del.»

Analiza didaktike. Përgjigjja 0 mund të vijë nga ngatërrimi me rregullin $6 \times 0 = 0$ ose nga ideja «kur nuk ke me çfarë të ndash, nuk ka asgjë». Një përgjigje tjetër e shpeshtë është $6 : 0 = 6$, që mund të vijë nga «nuk i ndava, ndaj më mbeten 6». Të dyja janë arsyetime për situatën, jo për veprimin. Kontrolli me shumëzim i bën të pavlefshme të dyja dhe është një mjet që nxënësi e njeh tashmë nga pjesëtimi i zakonshëm. Ka rëndësi që mësuesi të mos e paraqesë rastin si një përjashtim për t'u mësuar përmendsh, por si zbatim të të njëjtit kontroll.

Alternativë metodike. Klasa ndërton vargun $6 : 3$, $6 : 2$, $6 : 1$ dhe vëren se herësi rritet kur pjesëtuesi zvogëlohet. Për kontroll në rast të ri: «Sa bën $0 : 7$? Sa bën $7 : 0$? Pse përgjigjet nuk janë të njëjta?»

Pyetje reflektuese për studentin. Një nxënës propozon $0 : 0 = 1$, sepse $a : a = 1$ për çdo $a \neq 0$. Pse, sipas pohimit 4.2, zgjedhja 1 nuk ka më shumë të drejtë se çdo numër tjetër? Si do t'i përgjigjeshit nxënësit?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

► Prodhimi ka dy kuptime: grupe të barabarta dhe numër çiftesh në produktin kartezian; i dyti tregon vetinë ndërruese.

► Vetia shpërndarëse lidh dy veprimet dhe qëndron pas strategjive dhe algoritmeve të shumëzimit.

► Herësi $a : b$ është numri i vetëm c me $b \times c = a$; pjesëtimi me zero nuk ka kuptim, sepse nuk përcakton një numër të vetëm.

► Pjesëtimi shpërndahet nga e djathta, jo nga e majta.

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 5

5. Katër veprimet si një sistem

NË KËTË KAPITULL

– Dy çifte veprimesh të kundërta
– Gjashtë trajta të ekuacionit të thjeshtë
– Njësi profesionale: i zbritshmi i panjohur

5.1 Dy çifte veprimesh të kundërta

Tani mund t'i shohim katër veprimet së bashku. Ato nuk janë katër tema të pavarura. Ato janë dy veprime, mbledhja dhe shumëzimi, me nga një veprim të kundërt, dhe një lidhje ndërmjet çifteve: shumëzimi me numra natyrorë është mbledhje e përsëritur, ndërsa pjesëtimi mund të shihet si zbritje e përsëritur. Figura 4 e përmbledh këtë pamje.

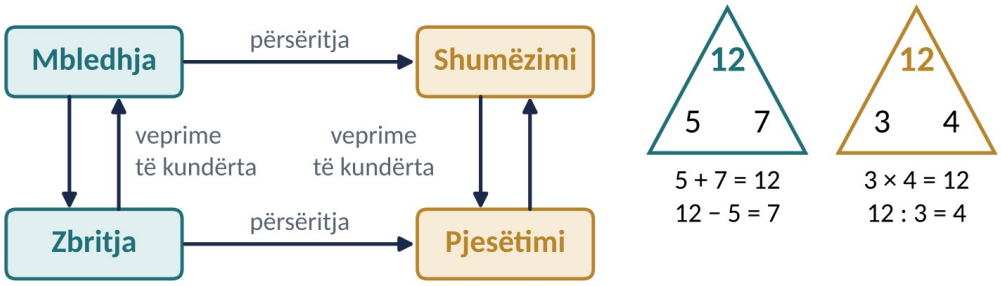


Figura 4. Katër veprimet si sistem: dy çifte veprimesh të kundërta dhe lidhja ndërmjet tyre. Te trekëndëshat, numri i sipërm është e tëra; një barazim i vetëm jep katër barazime të lidhura.

Për çdo treshe numrash të lidhur, një barazim sjell tre të tjerë. Nga 5 + 7 = 12 marrim 7 + 5 = 12, 12 − 5 = 7 dhe 12 − 7 = 5. Nga 3 × 4 = 12 marrim 4 × 3 = 12, 12 : 3 = 4 dhe 12 : 4 = 3. Këto familje barazimesh e ulin shumë ngarkesën e kujtesës: nxënësi që njeh 3 × 4 nuk ka nevojë të mësojë veçmas 12 : 4.

Tabela 3 i vendos vetitë krah për krah. Studenti duhet ta plotësojë vetë një herë, para se ta lexojë.

Tabela 3. Vetitë e katër veprimeve në $\mathbb{N}_0$

Vetia	Mbledhja	Zbritja	Shumëzimi	Pjesëtimi
I brendshëm	po	jo	po	jo
Ndërrues	po	jo	po	jo
Shoqërues	po	jo	po	jo
Element neutral	0	0, vetëm djathtas	1	1, vetëm djathtas

Rreshti «vetëm djathtas» e meriton vëmendjen: 7 − 0 = 7, por 0 − 7 nuk është 7; 7 : 1 = 7, por 1 : 7 nuk është 7. Për këtë arsye, kur themi se zero është neutrale për mbledhjen, themi një gjë më të fortë sesa për zbritjen.

5.2 Gjashtë trajta të ekuacionit të thjeshtë

Nxënësi i arsimit fillor zgjidh ekuacione shumë para se t'i quajë kështu: □ + 7 = 12. Këto zgjidhen pa rregulla algjebrike, me lidhjet ndërmjet përbërësve të veprimit. Për të dhënat që nxënësi njeh ka gjashtë trajta.

Tabela 4. Gjashtë trajtat e ekuacionit të thjeshtë

Trajta	Përbërësi i panjohur	Zgjidhja	Shembull
$x + a = b$	mbledhori	$x = b - a$	$x + 7 = 12$, $x = 5$
$x - a = b$	i zbritshmi	$x = b + a$	$x - 7 = 5$, $x = 12$
$a - x = b$	zbritësi	$x = a - b$	$12 - x = 5$, $x = 7$
$a \times x = b$	faktori	$x = b : a$	$3 \times x = 12$, $x = 4$
$x : a = b$	i pjesëtueshmi	$x = b \times a$	$x : 3 = 4$, $x = 12$
$a : x = b$	pjesëtuesi	$x = a : b$	$12 : x = 4$, $x = 3$

Trajtat e dyta dhe të treta të çdo grupi janë kurthe. Te $x - 7 = 5$ i panjohuri zgjidhet me mbledhje, megjithëse në ekuacion ka zbritje. Te $12 - x = 5$ i panjohuri zgjidhet përsëri me zbritje. Nxënësi që ka mësuar rregullin «bëj veprimin e kundërt» do të gabojë te trajta e dytë ose e tretë, sipas mënyrës si e ka kuptuar rregullin. Nxënësi që mendon për marrëdhënien, «i zbritshmi është e tëra», nuk ka nevojë për rregull. Modeli i shiritit, me të tërën dhe dy pjesët, e bën këtë të dukshme.

Zgjidhja nuk ekziston gjithmonë në $\mathbb{N}_0$. Te $x + 7 = 3$ dhe te $2 \times x = 7$ del në pah i njëjti kufi si në kapitullin 2. Studenti duhet të përgatisë detyra që kanë zgjidhje në numrat që njeh nxënësi.

5.3 Njësi profesionale: i zbritshmi i panjohur

Shembull matematikor i zgjidhur. Te □ − 7 = 5 kërkojmë numrin nga i cili heqim 7 dhe mbeten 5. Sipas përkufizimit 3.1, 7 + 5 = □, pra □ = 12. Kontrolli: 12 − 7 = 5.

Paraqitja në klasë. Mësuesi tregon një problem: «Vesa kishte disa karamele. Dha 7 dhe i mbetën 5. Sa kishte?» Nxënësit e vizatojnë në një shirit: pjesa e dhënë 7, pjesa e mbetur 5 dhe e tëra e panjohur.

Pyetje diagnostikuese. «Nora ka shkruar □ − 7 = 5, □ = 2. Vendos 2 në kutizë. A del?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «2 − 7 nuk bëhet me numrat tanë. Kam parë 7 dhe 5 dhe kam bërë 7 − 5, se te zbritja hiqet.»

Analiza didaktike. Përgjigjja sugjeron se nxënësi kërkon veprimin nga shenja që sheh, jo nga marrëdhënia. Një hipotezë tjetër është që nxënësi i zbret numrat që sheh, sepse ka parë shumë detyra ku përgjigjja del nga zbritja. Mësuesi i dallon duke pyetur: «Vizatoje situatën me Vesën. Cili është numri më i madh këtu?» Nxënësi që e sheh të tërën e panjohur është gati të punojë pa

rregull. Ka gabim metodik në rregullin e mësuar përmendsh «të panjohurin e gjejmë me veprimin e kundërt». Për mbledhorin ai funksionon. Për zbritësin nuk funksionon.

Alternativë metodike. Çdo ekuacion paraqitet në shirit para se të zgjidhet. Nxënësi tregon me gisht të tërën dhe pjesët. Kontrolli në rast të ri: $\square - 9 = 6$ dhe $15 - \square = 6$, të vendosura pranë njëra-tjetrës.

Pyetje reflektuese për studentin. Shkruani tri probleme me fjalë me të njëjtët numra 7, 5 dhe 12, që të çojnë te $x + 7 = 12$, $x - 7 = 5$ dhe $12 - x = 5$. Cili problem është më i vështirë për nxënësin dhe pse?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

► Katër veprimet janë dy çifte veprimesh të kundërta, të lidhura nga përsëritja.
► Një barazim jep një familje barazimesh, që ul ngarkesën e kujtesës.
► Ekuacionet e thjeshta zgjidhen me marrëdhënien ndërmjet të tërës dhe pjesëve, jo me një rregull të përgjithshëm «veprimi i kundërt».

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 6

6. Rendi i veprimeve

NË KËTË KAPITULL

– Pyetja që duhet bërë
– Pse «nga e majta» ka rëndësi
– Kllapat si mjet
– Njësi profesionale: nga e majta në të djathtë

6.1 Pyetja që duhet bërë

Shprehja 2 + 3 × 4 mund të lexohet në dy mënyra:

$$2+(3\times 4)=14,\quad (2+3)\times 4=20.$$

Pa ndonjë marrëveshje, shkrimi nuk do të tregonte një numër të vetëm. Rendi i veprimeve nuk është pra një veti e numrave, si vetia ndërruese. Ai është një marrëveshje për mënyrën e shkrimit, dhe mund të ishte ndryshe. Por nuk është zgjedhur rastësisht.

> **Marrëveshja 6.1.** Në një shprehje pa kllapa, shumëzimi dhe pjesëtimi kryhen para mbledhjes dhe zbritjes. Veprimet me të njëjtën përparësi kryhen nga e majta në të djathtë. Kllapat kanë përparësi ndaj të gjitha veprimeve.

Përse shumëzimi vjen i pari? Një arsye vjen nga vetë shkrimi i numrave. Në Javën XII shkruam

$$4\,708=4\times 1\,000+7\times 100+0\times 10+8.$$

Kjo shprehje shkruhet pa kllapa pikërisht sepse çdo prodhim është një njësi e vetme, një «grup» që mblidhet me të tjerët. Po ashtu, «2 lapsa dhe 3 pako me nga 4» është shuma e dy sasive, dhe 3 × 4 është emri i një sasie. Lexuar kështu, shenja + ndan shprehjen në pjesë dhe çdo prodhim është një pjesë. Figura 5 e tregon këtë lexim.

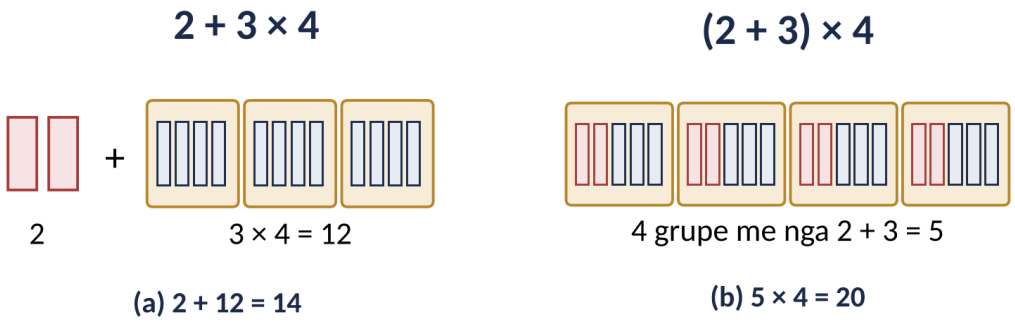


Figura 5. Leximi i strukturës së shprehjes: (a) te 2 + 3 × 4 prodhimi është një pjesë e vetme; (b) te (2 + 3) × 4 kllapat formojnë një grup që shumëzohet.

6.2 Pse «nga e majta» ka rëndësi

Për mbledhje dhe për shumëzim rendi nuk ndikon, sepse këto veprime janë shoqëruese. Nevoja për marrëveshje del te zbritja dhe te pjesëtimi: ato nuk janë shoqëruese, dhe kur përzihen me veprimin tjetër të çiftit të tyre, radha e kryerjes e ndryshon rezultatin:

$$(10-3)-2=5, 10-(3-2)=9, (24:4)\times 2=12, 24:(4\times 2)=3.$$

Rregulli shpesh mësohet me një radhë fjalësh: «shumëzim, pjesëtim, mbledhje, zbritje». Kjo radhë është e rrezikshme, sepse sugjeron që shumëzimi të bëhet para pjesëtimit dhe mbledhja para zbritjes. Te 24 : 4 × 2 kjo jep 3, jo 12. Te 10 − 3 + 2 jep 5, jo 9. Dy çiftet kanë secili përparësinë e vet. Brenda një çifti, rendi është nga e majta.

Një lexim i dobishëm është ky: në 10 − 3 + 2, shenja i përket numrit që vjen pas saj. Janë 10, hiq 3 dhe shto 2. Kështu mund të ndërrojmë rendin duke e marrë çdo numër me shenjën e vet: 10 + 2 − 3 = 9. Linchevski dhe Livneh (1999) treguan se nxënësit që e shkëputin numrin nga shenja që i paraprin, për shembull ata që te 10 − 3 + 2 mbledhin fillimisht 3 + 2, e bëjnë të njëjtin gabim edhe në shprehjet algjebrike. Mungesa e këtij leximi të strukturës lidhet pra me vështirësitë e mëvonshme në algjebër. Rendi i veprimeve është pra më shumë se një rregull llogaritjeje: është një mënyrë për të parë ndërtimin e shprehjes. Bye et al. (2024) gjetën, gjithashtu, se gabimet në rendin e veprimeve parashikohen nga mënyra si nxënësit i perceptojnë shprehjet e barasvlershme.

6.3 Kllapat si mjet

Kllapat nuk janë përjashtim nga rregulli. Ato janë mënyra për të thënë çfarë na duhet kur rregulli nuk e thotë vetë. Nxënësit duhet t'u jepen rastet në të dyja drejtimet: nga shprehja te vlera, por edhe nga situata te shprehja. Për problemin «Kam 3 pako me nga 4 lapsa dhe 2 lapsa të tjerë», shprehja 2 + 3 × 4 nuk ka nevojë për kllapa. Për problemin «Kam 2 lapsa të kuq dhe 3 blu në çdo pako, dhe kam 4 pako», shprehja (2 + 3) × 4 ka. Kllapat dalin nga situata.

Disa kllapa nuk nevojiten por ndihmojnë, si te (3 × 4) + 2. Në klasat e para mësuesi mund t'i përdorë për të treguar strukturën dhe t'i heqë gradualisht, kur nxënësi e sheh vetë.

6.4 Njësi profesionale: nga e majta në të djathtë

Shembull matematikor i zgjidhur. 2 + 3 × 4 = 2 + 12 = 14. Kllapat, kur duhen, e ndryshojnë: (2 + 3) × 4 = 5 × 4 = 20.

Paraqitja në klasë. Nxënësit lexojnë me zë dy tregime: «2 lapsa dhe 3 pako me nga 4» dhe «2 lapsa të kuq e 3 blu në çdo pako, 4 pako». I vizatojnë dhe i numërojnë. Pastaj mësuesi shkruan dy shprehjet dhe nxënësit i lidhin me tregimet.

Pyetje diagnostikuese. «Liri ka shkruar 2 + 3 × 4 = 20. Për cilin nga dy tregimet është e saktë përgjigjja e tij? Sa lapsa ka te tregimi tjetër?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «20 është për tregimin me 4 pako të plota. Te tjetri janë 14, se janë vetëm 2 lapsa jashtë.»

Analiza didaktike. Rezultati 20 mund të vijë nga leximi nga e majta në të djathtë, si tekst. Kjo është e kuptueshme: nxënësi lexon gjithçka tjetër kështu, dhe në numrat që ka parë deri tani veprimet shkojnë shpesh sipas radhës. Një hipotezë tjetër është se nxënësi e di rregullin, por nuk e zbaton kur nuk e sheh të shkruar në detyrë. Mësuesi jep $5 + 2 \times 3$ dhe $5 \times 2 + 3$. Vetëm shprehja e parë e dallon: te e dyta leximi nga e majta jep rezultatin e saktë. Një detyrë me vetëm raste të tilla do ta fshehte gabimin.

Alternativë metodike. Përpara se të llogarisë, nxënësi vë në qark çdo prodhim dhe e lexon si një sasi të vetme. Kontrolli në rast të ri: $20 - 2 \times 5$ dhe $(20 - 2) \times 5$.

Pyetje reflektuese për studentin. Në detyrën $5 \times 2 + 3$ një nxënës jep 13. A mund të përfundojmë që ai e njeh rendin e veprimeve? Hartoni tri shprehje që do t'ju lejonin të vendosnit.

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

► Rendi i veprimeve është marrëveshje shkrimi, jo veti e numrave; por ajo mbështetet te struktura e shprehjes.

► Marrëveshja «nga e majta» është e nevojshme sepse zbritja dhe pjesëtimi nuk janë shoqëruese.

► Çifti shumëzim–pjesëtim dhe çifti mbledhje–zbritje kanë secili një përparësi; brenda çiftit shkohet nga e majta.

► Detyra diagnostikuese duhet të jetë e tillë që leximi nga e majta të japë rezultat të gabuar.

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 7

7. Nga veprimet te relacionet

NË KËTË KAPITULL

– Çfarë është relacioni për nxënësin
– Çifti i renditur
– Relacioni binar
– Relacioni i kundërt
– Njësi profesionale: drejtimi i relacionit

7.1 Çfarë është relacioni për nxënësin

Nxënësi i klasës së parë thotë: «Besa është më e gjatë se Ana», «Unë kam aq kartolina sa ti», «7 është më i madh se 5», «Ky është shoku im», «Kjo kuti është e njëjtë me atë». Në secilën fjali ka dy objekte dhe një lidhje ndërmjet tyre, për të cilën mund të pyesim: vlen apo nuk vlen? Pikërisht këtë e formalizon koncepti i relacionit.

Fjala «njohje» në titullin e temës së programit e tregon nivelin. Në arsimin fillor relacioni nuk përkufizohet. Nxënësi krahason, klasifikon dhe rendit, dhe mësuesi kujdeset që këto veprimtari të jenë të sakta dhe të ndërtojnë mbi njëra-tjetrën. Por, për ta bërë këtë, mësuesi duhet ta njohë konceptin plotësisht. Gjuha «më i madh se», për shembull, ka tri anë që nuk i sheh ai që nuk ka menduar për relacionet: drejtimin, kalimtarinë dhe faktin që një numër nuk është «i madh» më vete.

7.2 Çifti i renditur

Relacioni ka drejtim. «7 është më i madh se 5» është e vërtetë, «5 është më i madh se 7» jo. Prandaj na duhet një objekt që i dallon dy radhët: çifti i renditur.

> **Përkufizimi 7.1.** Dy çifte të renditura janë të barabarta kur përputhen në të dy vendet: $(a, b) = (c, d)$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $a = c$ dhe $b = d$.

Në këtë kuptim $(3, 5) \neq (5, 3)$, ndërsa si bashkësi $\{3, 5\} = \{5, 3\}$. Ky dallim është i njëjti që nxënësi takon më vonë te koordinatat. Në shkollë ai duket te rrjeta e një loje ose te harta: «rreshti 3, kolona 5».

Produkti $A \times B$ nga kapitulli 4 është bashkësia e të gjitha çifteve të mundshme. Në përgjithësi $A \times B \neq B \times A$, edhe pse sipas (4.2) kanë po aq elemente. Për shembull, për $A = \{1, 2\}$ dhe $B = \{a\}$ kemi $A \times B = \{(1, a), (2, a)\}$ dhe $B \times A = \{(a, 1), (a, 2)\}$. Prodhimi i numrave është ndërrues. Produkti i bashkësive nuk është.

7.3 Relacioni binar

> **Përkufizimi 7.2.** Një relacion binar nga A në B është çdo nënbashkësi $R \subseteq A \times B$. Kur $(x, y) \in R$, themi se x është në relacion me y dhe shkruajmë $x \, R \, y$. Kur $A = B$, themi se R është relacion në A.

Përkufizimi duket shumë i përgjithshëm, dhe është. Ai thotë se një relacion nuk është asgjë më shumë se lista e çifteve për të cilat vlen. Dy relacione me të njëjtat çifte janë i njëjti relacion, edhe nëse i përshkruajmë me fjalë të ndryshme. Te $A = \{1, 2, 3\}$, për shembull, «$x + y = 3$» dhe «$x \times y = 2$» janë një relacion i vetëm, $\{(1, 2), (2, 1)\}$, edhe pse rregullat janë krejt të ndryshme. Në $\mathbb{N}_0$ të plotë ata janë dy relacione të ndryshme: $(0, 3)$ i përket të parit, jo të dytit.

Shembull. Le të jenë $A = \{2, 3, 4\}$ dhe $B = \{4, 6, 8, 9\}$, dhe relacioni «x është pjesëtues i y». Atëherë

$$R = \{(2,4), (2,6), (2,8), (3,6), (3,9), (4,4), (4,8)\}.$$

Produkti $A \times B$ ka $3 \times 4 = 12$ çifte. Relacioni i zgjedh 7 prej tyre.

Vetë veprimet janë relacione me një veti të veçantë. Mbledhja është bashkësia e çifteve $((a, b), c)$ me $a + b = c$, dhe për çdo (a, b) ka një dhe vetëm një c. Pikërisht ky kusht e dallon një funksion nga një relacion i çfarëdoshëm. Te «x është pjesëtues i y», numri 2 ka disa shokë, prandaj relacioni nuk është funksion.

7.4 Relacioni i kundërt

> **Përkufizimi 7.3.** Relacioni i kundërt i $R \subseteq A \times B$ është $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$, relacion nga B në A.

Për nxënësin ky është një kalim gjuhësor i rëndësishëm. Relacioni i kundërt i «më i madh se» është «më i vogël se». Ai i «është dyfishi i» është «është gjysma e». Ai i «ka 3 më shumë se» është «ka 3 më pak se». Çdo fjali relacionale mund të thuhet në dy mënyra, me të njëjtën të vërtetë: «Ana ka 3 më shumë se Besa» dhe «Besa ka 3 më pak se Ana». Te problemet e krahasimit, që u trajtuan në Leksionet 2 dhe 4, kjo është një nga vështirësitë kryesore. Nxënësi që nuk e kalon lehtë nga njëra fjali te tjetra e kërkon veprimin nga fjala «më shumë».

Relacioni i kundërt nuk është mohimi i relacionit. Mohimi i «më i madh se» është «jo më i madh se», pra «më i vogël ose i barabartë». Ky dallim nuk duhet ngatërruar në gjuhën e klasës.

7.5 Njësi profesionale: drejtimi i relacionit

Shembull matematikor i zgjidhur. Për $A = \{2, 4, 8\}$ dhe relacionin «x është dyfishi i y», çiftet janë (4, 2) dhe (8, 4). Relacioni i kundërt, «x është gjysma e y», ka çiftet (2, 4) dhe (4, 8).

Paraqitja në klasë. Mësuesi vendos në dërrasë tre numra dhe vizaton shigjeta. Për çdo shigjetë, një nxënës lexon fjalinë nga bishti te maja dhe një tjetër nga maja te bishti: «8 është dyfishi i 4», «4 është gjysma e 8».

Pyetje diagnostikuese. «Shigjeta shkon nga 8 te 4 dhe mbi të shkruan “është dyfishi i”. Teuta ka lexuar: “4 është dyfishi i 8”. Si mund ta kontrollojmë?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Dyfishi i 8 është 16. Pra nuk është 4. Shigjeta lexohet nga 8.»

Analiza didaktike. Nxënësi mund ta ketë parë shigjetën vetëm si «lidhje», pa drejtim. Ose mund të ketë lexuar numrin më të vogël të parin, nga zakoni. Nxënësi që kontrollon me llogaritje e ka kuptuar se fjalia pretendon diçka që mund të jetë e rreme. Mësuesi mund të kontrollojë të kuptuarit duke e kthyer shigjetën dhe duke pyetur: «Çfarë duhet të ndryshojë tani te fjala?»

Alternativë metodike. Nxënësi shkruan fjalinë dhe pastaj vendos numrat në të: «___ është dyfishi i ___». Kontrolli në rast të ri: «ka 3 më shumë se» te numrat 5, 8 dhe 11.

Pyetje reflektuese për studentin. Pse mësuesi që shkruan «$a > b$» pa i lexuar me zë të dy drejtimet e humbet një rast për të ndërtuar relacionin e kundërt? Çfarë mund të bëjë në një minutë të vetme të orës?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

► Relacioni është një bashkësi çiftesh të renditura; çifti ka drejtim, bashkësia me dy elemente jo.

► $A \times B$ përmban të gjitha çiftet e mundshme; një relacion zgjedh disa prej tyre.

► Funksioni është relacion me një kusht të veçantë: çdo element i nisjes ka një shok të vetëm.

► Relacioni i kundërt thotë të njëjtën gjë nga ana tjetër; nuk është mohimi i relacionit.

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 8

8. Paraqitjet e relacionit

NË KËTË KAPITULL

– Pesë mënyra për të thënë të njëjtën gjë
– Relacioni në një bashkësi
– Rregulli i fshehtë
– Njësi profesionale: rregulli i fshehtë

8.1 Pesë mënyra për të thënë të njëjtën gjë

I njëjti relacion mund të paraqitet në pesë mënyra, dhe secila tregon diçka tjetër. Figura 6 i tregon për relacionin e seksionit 7.3.

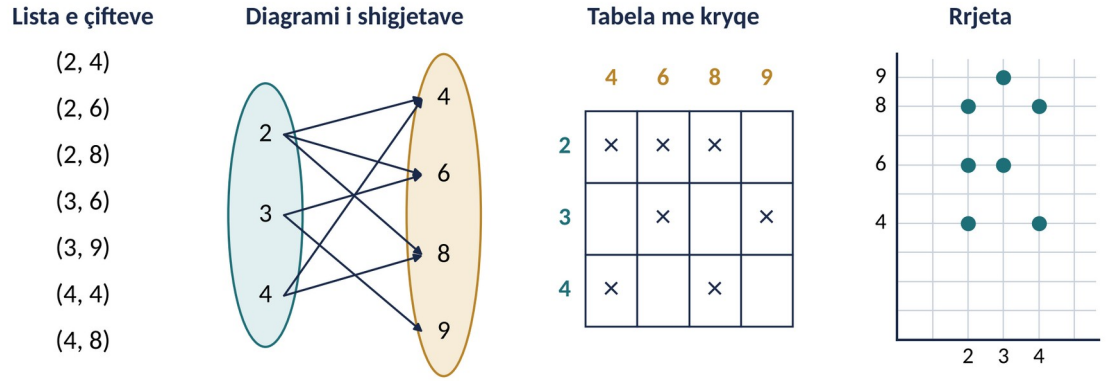


Figura 6. Një relacion në katër paraqitje: lista e çifteve, diagrami i shigjetave, tabela me kryqe dhe rrjeta. Fjala «është pjesëtues i» është paraqitja e pestë.

Tabela 5. Çfarë tregon secila paraqitje

Paraqitja	Çfarë tregon mirë	Çfarë fsheh
Fjalia	Kuptimin dhe rregullin	Sa çifte ka, cilët numra mbeten pa shok
Lista e çifteve	Saktësisht çfarë përfshihet	Rregullin, nëse lista është e gjatë
Diagrami i shigjetave	Drejtimin, numrin e shokëve të secilit	Bëhet i ngjeshur me shumë çifte
Tabela me kryqe	Një kontroll të shpejtë të plotësisë	Drejtimin, nëse nuk lexohet me kujdes
Rrjeta	Vendin, modelin, lidhjen me koordinatat	Kuptimin e rregullit

Në arsimin fillor mjafton diagrami i shigjetave dhe tabela, të dyja të ndërtuara nga situata të njohura: kush ka çfarë, kush ka lindur në cilin muaj, cili numër shkon me cilin. Lista e çifteve dhe shënimi (x, y) nuk janë temë për nxënësin. Por mësuesi duhet të kalojë lirshëm nga njëra te tjetra, sepse çdo tekst shkollor zgjedh një paraqitje dhe nxënësi i ndeshet ndryshe.

Një shembull nga klasa. Le të jenë A = {Ana, Beni, Dori} dhe B = {libër, laps}, dhe relacioni «x ka y»: Ana ka një libër dhe një laps, Beni ka një laps, Dori nuk ka asnjërin. Si listë çiftesh, R = {(Ana, libër), (Ana, laps), (Beni, laps)} $\subseteq A \times B$. Në diagram, fëmijët shkruhen në një kolonë, objektet në një tjetër, dhe çdo çift bëhet një shigjetë nga fëmija te objekti. Në tabelë, fëmijët

janë në rreshta, objektet në kolona, dhe kryqi vendoset aty ku çifti i përket *R*-së. Dori nuk ka asnjë shigjetë dhe asnjë kryq në rreshtin e vet: paraqitja e bën të dukshme atë që fjalia e lë në hije.

Pyetja diagnostikuese për klasën është: «Shigjeta shkon nga Ana te libri. A mund të lexojmë “libri ka Anën”?» Nxënësi që thotë jo e ka kuptuar se shigjeta ka drejtim. Leximi nga ana tjetër kërkon relacionin e kundërt të seksionit 7.4, «*y* i përket *x*-it»: «libri i përket Anës».

8.2 Relacioni në një bashkësi

Kur $A = B$, diagrami thjeshtohet: çdo element shkruhet një herë, dhe një shigjetë mund të kthehet te vetë elementi, në formë sythi. Figura 7 tregon tri relacione në {1, 2, 3, 4}. Kjo paraqitje do të jetë mjeti ynë kryesor në kapitullin 9, sepse vetitë e relacionit shihen drejtpërdrejt në të.

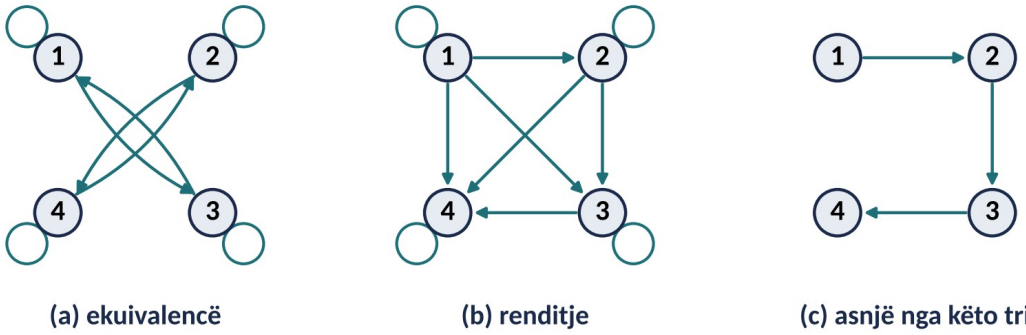


Figura 7. Tri relacione në {1, 2, 3, 4}: (a) «ka të njëjtën mbetje kur pjesëtohet me 2»; (b) $x \le y$; (c) «$y = x + 1$», pa asnjë nga vetitë refleksive, simetrike ose kalimtare.

8.3 Rregulli i fshehtë

Një veprimtari e njohur është ajo ku mësuesi ka në mendje një rregull dhe nxënësit e zbulojnë nga çiftet që ai u tregon. Kjo veprimtari fsheh një hollësi matematikore që mësuesi duhet ta dijë: një numër i fundëm çiftesh nuk e përcakton rregullin. Nëse mësuesi jep vetëm çiftin (2, 4), rregulli mund të jetë «dyfishi», «shto 2» ose «shumëzo numrin me vetveten». Çifti (3, 6) i përjashton dy të fundit, por jo çdo rregull tjetër. Prandaj fjalia e saktë e nxënësit është «rregulli im përputhet me të gjithë çiftet që kemi», jo «kjo është përgjigjja».

Kjo është një mundësi për të folur për arsyetimin. Çifti i ri që zgjedh mësuesi nuk është i rastësishëm: ai zgjidhet që të dallojë rregullat e propozuara. Është e njëjta ide si te pyetja diagnostikuese, që zgjidhet të dallojë hipotezat.

8.4 Njësi profesionale: rregulli i fshehtë

Shembull matematikor i zgjidhur. Çiftet (1, 3), (2, 5), (3, 7) përputhen me rregullin $y = 2 \times x + 1$. Për $x = 4$ rregulli jep $y = 9$.

Paraqitja në klasë. Mësuesi vizaton një «makinë» dhe nxënësit i japin numra. Makina nxjerr numrat sipas rregullit dhe mësuesi i shkruan në një tabelë me dy kolona. Nxënësit nuk e thonë rregullin me zë. Ata shkruajnë çfarë pritet të dalë për numrin tjetër.

Pyetje diagnostikuese. «Kolona e dytë është 3, 5, 7. Dea thotë: “rregulli është shto 2”. Çfarë hyn në makinë kur del 5? Sa i shtohet atij numri?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Hyn 2 dhe del 5. I shtohen 3, jo 2. Shto 2 është nga 3 te 5, poshtë në tabelë.»

Analiza didaktike. Dea ka vënë re modelin në kolonën e dytë, të lexuar nga lart poshtë. Kjo është një vëzhgim i saktë, por ai e lidh një rezultat me rezultatin para tij, jo hyrjen me daljen. Nxënësi i mësipërm ka filluar të lexojë çiftin horizontalisht, dhe ky kalim është një hap drejt arsyetimit me funksione. Nëse mësuesi jep vetëm numra në radhë, 1, 2, 3, ai e forcon leximin vertikal. Hyrjet e përziera, si 5, 2, 7, 1, e detyrojnë leximin horizontal.

Alternativë metodike. Hyrjet jepen të përziera, dhe nxënësi duhet të thotë daljen për një numër të madh, për shembull 10, pa e ndërtuar tabelën deri aty. Kontrolli në rast të ri: një makinë tjetër, me rregull $y = 3 \times x$, ku leximi vertikal jep «shto 3».

Pyetje reflektuese për studentin. Jepni dy rregulla të ndryshme që përputhen me çiftet (1, 1) dhe (2, 2) dhe nuk përputhen për $x = 3$. Çfarë do të thotë kjo për pyetjen «sa është numri tjetër në varg?» në testet shkollore?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

► Çdo paraqitje e relacionit tregon diçka dhe fsheh diçka; mësuesi kalon lirshëm ndërmjet tyre.

► Në arsimin fillor përdoren kryesisht diagrami i shigjetave dhe tabela, nga situata të njohura.

► Një numër i fundëm çiftesh nuk e përcakton rregullin; çifti i ri zgjidhet që të dallojë rregullat e propozuara.

► Çifti lexohet horizontalisht, nga hyrja te dalja; hyrjet e përziera e nxitin këtë lexim.

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 9

9. Vetitë e relacioneve në një bashkësi

NË KËTË KAPITULL

– Katër veti
– Shembuj
– Kalimtaria në klasë
– Njësi profesionale: krahasimi pa e parë

9.1 Katër veti

Përkufizimi 9.1. Le të jetë R një relacion në bashkësinë A. Themi se R është:
(i) refleksiv, nëse $a\ R\ a$ për çdo $a \in A$;
(ii) simetrik, nëse nga $a\ R\ b$ del $b\ R\ a$;
(iii) antisimetrik, nëse nga $a\ R\ b$ dhe $b\ R\ a$ del $a = b$;
(iv) kalimtar, nëse nga $a\ R\ b$ dhe $b\ R\ c$ del $a\ R\ c$.

Në diagramin e Figurës 7 vetitë lexohen drejtpërdrejt. Refleksiviteti do të thotë sythe në çdo element. Simetria do të thotë që çdo shigjetë ka edhe shigjetën e kthimit. Antisimetria do të thotë që asnjë çift elementesh të ndryshëm nuk ka shigjeta në të dy drejtimet. Kalimtaria do të thotë që çdo rrugë me dy hapa ka edhe një shigjetë të drejtpërdrejtë. Në tabelë, refleksiviteti është diagonalja e plotë dhe simetria është pasqyrimi ndaj diagonales.

Studenti duhet të lexojë me kujdes kuantifikuesit. Refleksiviteti është pohim për çdo element: një element pa sythe mjafton për ta rrëzuar. Simetria, antisimetria dhe kalimtaria janë pohime të tipit «nëse…, atëherë…». Ato vlejnë edhe kur kushti nuk plotësohet kurrë. Prandaj relacioni bosh është simetrik, antisimetrik dhe kalimtar. Nga ana tjetër, nuk është refleksiv, nëse A nuk është boshe.

9.2 Shembuj

Tabela 6 përmbledh relacione që hasen në shkollë. Për secilin duhet një arsye: një vërtetim kur vetia vlen, një kundërshembull kur nuk vlen.

Tabela 6. Vetitë e disa relacioneve

Relacioni	Refl.	Sim.	Antisim.	Kal.
$a = b$ në $\mathbb{N}_0$	po	po	po	po
$a \le b$ në $\mathbb{N}_0$	po	jo	po	po
$a < b$ në $\mathbb{N}_0$	jo	jo	po	po
$a \neq b$ në $\mathbb{N}_0$	jo	po	jo	jo
$a \mid b$ në $\mathbb{N}$	po	jo	po	po
a dhe b kanë të njëjtën mbetje me 3, në $\mathbb{N}_0$	po	po	jo	po
$a + b$ është tek, në $\mathbb{N}$	jo	po	jo	jo
$b = a + 1$ në $\mathbb{N}_0$	jo	jo	po	jo

Relacioni	Refl.	Sim.	Antisim.	Kal.
«është më i gjatë se», për nxënësit	jo	jo	po	po
«është shok me», për nxënësit	jo	po	jo	jo

Antisimetria nuk është e kundërta e simetrisë. Relacioni $a = b$ i ka të dyja. Relacioni $a < b$ është antisimetrik në mënyrë të zbrazët, sepse $a < b$ dhe $b < a$ nuk ndodhin kurrë së bashku. Edhe «jo simetrik» është e ndryshme nga «antisimetrik»: në $\{1, 2, 3\}$, relacioni $\{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$ nuk është as simetrik, as antisimetrik.

Rreshtat e fundit kërkojnë një vërejtje. «Është shok me» mund të jetë simetrik në klasën e një mësuesi dhe jo simetrik në jetë: fëmija mund të thotë se Besa është shoqja e tij pa e thënë Besa të kundërtën. Relacionet nga jeta nuk kanë veti të sigurta përpara se të bien dakord për përkufizimin. Kjo vetë është një diskutim i mirë për klasën.

> **Pohimi 9.1.** Nëse një relacion në A është edhe simetrik, edhe antisimetrik, atëherë $a \mathrel{R} b$ sjell $a = b$.

Vërtetim. Le të jetë $a \mathrel{R} b$. Nga simetria, $b \mathrel{R} a$. Nga antisimetria, $a = b$. ■

Pra të vetmet shigjeta të një relacioni të tillë janë sythe. Për më tepër, kujdes nga një arsyetim i shpeshtë i gabuar: «nga simetria dhe kalimtaria del refleksiviteti, sepse $a \mathrel{R} b$ sjell $b \mathrel{R} a$, dhe pastaj $a \mathrel{R} a$». Në $\{1, 2\}$ relacioni $\{(1, 1)\}$ është simetrik dhe kalimtar, por 2 nuk është në relacion me vete. Arsyetimi supozon se çdo element ka të paktën një shok.

9.3 Kalimtaria në klasë

Nga katër vetitë, ajo që ka më shumë rëndësi për mendimin e nxënësit është kalimtaria. Kur fëmija di se Ana është më e gjatë se Besa dhe Besa më e gjatë se Dea, a arrin të thotë pa matur se Ana është më e gjatë se Dea? Inhelder dhe Piaget (1964) e studiuan klasifikimin dhe renditjen si rrënjë të hershme të mendimit logjik, dhe kërkimet e mëvonshme kanë treguar se moshat që dolën nga këto studime nuk duhen lexuar si kufij të prerë. Për mësuesin, pyetja e dobishme nuk është në ç'moshë, por çfarë ka bërë nxënësi: ka krahasuar drejtpërdrejt, apo ka arsyetuar nga dy krahasime?

Kalimtaria është edhe arsyeja pse matja funksionon. Kur krahasojmë dy tavolina me një litar, litari është objekti i tretë, dhe arsyetimi është: tavolina e parë është sa litari, litari është më i gjatë se tavolina e dytë, pra tavolina e parë është më e gjatë se e dyta. Pa kalimtarinë, njësia matëse nuk do të kishte kuptim.

9.4 Njësi profesionale: krahasimi pa e parë

Shembull matematikor i zgjidhur. Në $\mathbb{N}_0$, nga $a < b$ dhe $b < c$ del $a < c$: nëse $b = a + d$ dhe $c = b + e$, me $d, e \geq 1$, atëherë $c = a + (d + e)$, me $d + e \geq 1$.

Paraqitja në klasë. Mësuesi ka tri shirita letre të fshehur prapa një kartoni. Ai i krahason me radhë para klasës, dy nga dy, pa treguar të tretin: kuq–blu dhe blu–gjelbër. Pastaj pyet për kuq–gjelbër pa i vënë krah për krah.

Pyetje diagnostikuese. «E kuqja është më e gjatë se bluja. Bluja është më e gjatë se e gjelbra. Cila është më e gjatë, e kuqja apo e gjelbra? Si e di?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Nuk e di, nuk i kam parë bashkë.» Ose: «E kuqja, sepse është më e gjatë se bluja, dhe bluja më e gjatë se e gjelbra.»

Analiza didaktike. Përgjigjja e parë nuk është gabim logjik në vetvete. Ajo mund të tregojë se nxënësi mbështetet te krahasimi që sheh, ose se nuk e ka kuptuar lojën. Mund të jetë edhe qëndrim korrekt i një fëmije të kujdesshëm, që nuk flet për atë që nuk ka parë. Mësuesi nuk duhet ta nxitojë me shpjegim. E pyet: «Nëse e kuqja del më e shkurtër se e gjelbra, çfarë do të thoshte kjo për blunë?» Përgjigjja e dytë tregon arsyetim kalimtar, por duhet parë nëse ai përsëritet edhe kur radha e fjalive ndryshon.

Alternativë metodike. Nxënësi i vizaton shiritat sipas fjalive, duke e vënë të blunë në mes. Për kontroll në rast të ri, fjalitë jepen në radhë të ndryshme: «Dea është më e shkurtër se Ana. Ana është më e shkurtër se Besa. Kush është më i shkurtri?»

Pyetje reflektuese për studentin. Në lojën gur–letër–gërshërë, guri mund gërshërët, gërshërët mundin letrën dhe letra mund gurin. Cila veti mungon te relacioni «mund»? Çfarë duhet të kontrollojmë para se të përdorim arsyetimin kalimtar me një relacion të ri?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

► Vetitë lexohen në diagram: sythe, shigjeta kthimi, rrugë me dy hapa.

► Simetria, antisimetria dhe kalimtaria janë pohime «nëse…, atëherë…» dhe vlejnë edhe kur kushti nuk plotësohet.

► Antisimetria nuk është e kundërta e simetrisë, dhe simetria me kalimtarinë nuk sjellin refleksivitetin.

► Kalimtaria është veti që nxënësi duhet ta përdorë me arsyetim, dhe ajo qëndron pas matjes.

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 10

10. Relacioni i ekuivalencës dhe klasifikimi

NË KËTË KAPITULL

– Klasifikimi si matematikë
– Numri si klasë
– Veprimet me klasat
– Njësi profesionale: klasifikimi me dy kritere

10.1 Klasifikimi si matematikë

Kur nxënësi ndan kartelat sipas ngjyrës, ai bën diçka më të thellë sesa një lojë përgatitore. Ai thotë se dy objekte janë «njësoj» në lidhje me diçka, dhe e ndan bashkësinë në pjesë. Këto dy veprime, siç do ta shohim, janë në thelb i njëjti veprim.

Përkufizimi 10.1. Një relacion në A quhet relacion ekuivalence kur është refleksiv, simetrik dhe kalimtar. Për $a \in A$, klasa e a-së është bashkësia $[a] = \{x \in A : x \mathrel{R} a\}$.

Përkufizimi 10.2. Një ndarje e bashkësisë A është një familje nënbashkësish joboshe të A-së, të tilla që çdo element i A-së i përket njërës dhe vetëm njërës prej tyre.

Tre shembuj nga lënda. «Ka të njëjtën ngjyrë» në një grup kartelash, ku klasat janë ngjyrat. «Ka të njëjtën mbetje me 3» në $\{0, 1, \ldots, 11\}$, ku klasat janë $\{0, 3, 6, 9\}$, $\{1, 4, 7, 10\}$ dhe $\{2, 5, 8, 11\}$. «Ka të njëjtën mbetje me 2» në $\mathbb{N}$, ku klasat janë numrat çift dhe numrat tek.

Pohimi 10.1. (i) Klasat e një relacioni ekuivalence në A formojnë një ndarje të A-së. (ii) Anasjelltas, çdo ndarje e A-së përcakton një relacion ekuivalence: $a \mathrel{R} b$ kur a dhe b janë në të njëjtën pjesë.

Vërtetim. (i) Çdo klasë është joboshe dhe çdo element bën pjesë në një klasë, sepse nga refleksiviteti $a \in [a]$. Mbetet të tregojmë se dy klasa ose përputhen, ose nuk kanë asnjë element të përbashkët. Le të jetë $c \in [a] \cap [b]$, pra $c \mathrel{R} a$ dhe $c \mathrel{R} b$. Nga simetria $a \mathrel{R} c$, dhe nga kalimtaria $a \mathrel{R} b$. Tani, nëse $x \in [a]$, atëherë $x \mathrel{R} a$ dhe $a \mathrel{R} b$ japin $x \mathrel{R} b$, pra $x \in [b]$. Në mënyrë të njëjtë $[b] \subseteq [a]$. Prandaj $[a] = [b]$. (ii) Çdo element është në të njëjtën pjesë me vetveten; nëse a është me b, edhe b është me a; nëse a është me b dhe b me c, atëherë, meqë b është në një pjesë të vetme, të tre janë në të njëjtën pjesë. ■

Pohimi thotë se klasifikimi dhe relacioni i ekuivalencës janë dy emra për të njëjtën gjë. Figura 8 e tregon këtë kalim. Për mësuesin ky rezultat ka një zbatim të drejtpërdrejtë: një kriter klasifikimi është i mirë kur çdo objekt bie në një grup dhe vetëm një. Nëse një kartelë mund të shkojë në dy grupe, ose në asnjë, kriteri nuk është relacion ekuivalence.



Figura 8. Relacioni i ekuivalencës dhe ndarja: (a) numrat 0–11 të ndarë sipas mbetjes me 3; (b) një «klasifikim» me dy kritere, ku një kartelë bie në dy grupe dhe një tjetër në asnjë, prandaj nuk është ndarje.

10.2 Numri si klasë

Një nga shembujt më të rëndësishëm nuk duket si shembull. Le të marrim relacionin «ka aq elemente sa» në një familje bashkësish të fundme. Ai është refleksiv, simetrik dhe kalimtar, sepse dy bashkësi janë në këtë relacion kur mund të vihen në përputhje një për një, dhe përputhjet përbëhen me njëra-tjetrën. Klasat e tij janë të gjitha bashkësitë me 2 elemente, të gjitha bashkësitë me 3 elemente, e kështu me radhë.

Çfarë kanë të përbashkët dy dele, dy gurë dhe dy sy? Pikërisht numrin 2. Numri natyror mund të shihet si ajo që është e përbashkët për të gjitha bashkësitë e një klase. Kjo e lidh leksionin me fillimin e lëndës, me përputhjen një për një të Leksionit 1. Fëmija që thotë «këtu ka aq sa atje» po ndërton pikërisht këtë relacion. Numri nuk është emër i objekteve. Është veti e bashkësisë.

Këtu duhen dalluar tri gjëra që në gjuhën e përditshme shkrihen në një. E para është një **bashkësi konkrete**, për shembull $A = \{\text{Ana, Besa}\}$: një objekt i vetëm, me elemente të caktuara. E dyta është **kardinaliteti** i saj, $|A| = 2$: numri që i përgjigjet pyetjes «sa elemente ka?». E treta është **klasa e ekuivalencës** së A-së, $[A] = \{B \in F : B \text{ ka aq elemente sa } A\}$, ku F është familja e bashkësive që po shqyrtojmë. Lidhja ndërmjet tyre është kjo: $|A| = |B|$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $[A] = [B]$. Kardinaliteti është pra ajo që kanë të përbashkët të gjitha bashkësitë e klasës, dhe çdo bashkësi konkrete është vetëm një përfaqësuese e saj.

Dy saktësime janë të nevojshme. Së pari, relacioni merret brenda një familjeje të fiksuar F. «Të gjitha bashkësitë me dy elemente», pa asnjë kufizim, nuk formojnë bashkësi në teorinë e zakonshme të bashkësive. Prandaj në matematikë numri i elementeve përcaktohet zakonisht me një përfaqësues të zgjedhur për çdo klasë: $|A| = n$ kur A vihet në përputhje një për një me $\{1, 2, \ldots, n\}$, dhe $|\emptyset| = 0$. Kjo është pikërisht ajo që bën fëmija kur numëron: i vë objektet në përputhje një për një me fjalët «një, dy, …». Së dyti, numri si klasë është perspektivë konceptuale për mësuesin, jo përkufizim për nxënësin. Në klasë nuk themi se «2 është bashkësia e të gjitha çifteve». Themi «këtu ka dy» dhe krahasojmë me përputhje një për një, që klasa e ekuivalencës të ndërtohet në përvojë, pa u emërtuar.

10.3 Veprimet me klasat

Relacioni «ka të njëjtën mbetje me 2» ka edhe një veti tjetër, që nxënësit e përdorin pa e thënë: tek + tek = çift, tek + çift = tek. Pse mund të flasim për mbledhje klasash? Nëse a dhe a' janë në të njëjtën klasë dhe b dhe b' janë në të njëjtën klasë, atëherë edhe $a + b$ dhe $a' + b'$ janë në të njëjtën klasë. Vërtetimi është i shkurtër. Nëse $a = 2 \times k + r$, $a' = 2 \times k' + r$, $b = 2 \times m + s$ dhe $b' = 2 \times m' + s$, atëherë $a + b$ dhe $a' + b'$ ndryshojnë nga $r + s$ vetëm me shumëfisha të 2-shit, prandaj kanë të njëjtën mbetje. Kjo veti e bën të mundur kontrollin e llogaritjes: nëse shuma e dy numrave tek del tek, llogaritja është gabim, pa e bërë nga e para. Është një kontroll i ri, i pavarur nga procedura, si ata të Javës XII.

10.4 Njësi profesionale: klasifikimi me dy kritere

Shembull matematikor i zgjidhur. Për kartelat me forma dhe ngjyra, grupet «të kuqe» dhe «jo të kuqe» formojnë ndarje. Grupet «të kuqe» dhe «trekëndësha» nuk formojnë ndarje, sepse një trekëndësh i kuq është në të dy grupet, dhe një rreth blu në asnjërin.

Paraqitja në klasë. Çdo grup nxënësish merr 12 kartela që dallohen nga forma, ngjyra dhe madhësia. Mësuesi i kërkon t'i ndajë në grupe dhe të tregojë kriterin. Pastaj një grup tjetër duhet ta gjejë kriterin duke parë vetëm grupet e formuara.

Pyetje diagnostikuese. «Sara ka vënë trekëndëshat këtu dhe të kuqet aty. Ku do ta vendosë trekëndëshin e kuq? Ku do ta vendosë rrethin blu?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Trekëndëshin e kuq mund ta vë te të dyja. Rrethi blu nuk shkon askund.» Ose: «E vë te të kuqet, se e pashë ngjyrën të parën.»

Analiza didaktike. Nxënësi në përgjigjen e parë e sheh që kriteret nuk e mbulojnë çdo rast. Kjo është pikërisht vëzhgimi që i duhet. Nxënësi në përgjigjen e dytë ka vendosur vetë një prioritet, pra ka ndryshuar kriter pa e vënë re. Në rastin e parë mësuesi nuk e korrigjon, por i kërkon të ndërtojë një tabelë me dy hyrje, forma në rreshta dhe ngjyra në kolona. Kështu të dy kriteret mbahen njëkohësisht dhe çdo kartelë ka një kuti të vetme. Kjo është matematikisht një ndarje e re, sipas çiftit (forma, ngjyra), që e lidh klasifikimin me produktin kartezian.

Alternativë metodike. Nxënësi fillon me një kriter dhe dy grupe. Pastaj ndan çdo grup sipas kriterit të dytë, duke ndërtuar një pemë. Kontrolli në rast të ri: një grup numrash 1–20 për t'u ndarë sipas «çift» dhe «shumëfish i 3-shit», ku çdo numër duhet të ketë vend.

Pyetje reflektuese për studentin. Ndarja e kartelave sipas madhësisë, «të mëdha» dhe «të vogla», është ndarje. Por «më e madhe se» nuk është relacion ekuivalence. Pse të dyja fjalitë janë të vërteta, dhe çfarë dallimi tregojnë?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

► Relacioni i ekuivalencës dhe ndarja e bashkësisë janë dy emra të së njëjtës gjë.

► Një kriter i mirë klasifikimi e vendos çdo objekt në një grup dhe vetëm një.

► Numri natyror mund të shihet si e përbashkëta e bashkësive që kanë aq elemente sa njëra-tjetra.

► Kur relacioni është i pajtueshëm me veprimin, mund të llogarisim me klasa; kjo jep kontrollin çift–tek.

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 11

11. Relacioni i renditjes dhe renditja në varg

NË KËTË KAPITULL

– Renditja e plotë dhe e pjesshme
– Renditja në varg
– Njësi profesionale: renditja e shkopinjve

11.1 Renditja e plotë dhe e pjesshme

Përkufizimi 11.1. Një relacion në A quhet relacion renditjeje kur është refleksiv, antisimetrik dhe kalimtar. Ai është renditje e plotë kur për çdo $a, b \in A$ vlen $a \mathrel{R} b$ ose $b \mathrel{R} a$. Përndryshe është renditje e pjesshme.

Sipas pohimit 9.1 të Leksionit 6, $\leq$ është relacion renditjeje në $\mathbb{N}_0$, dhe aty e pamë se është e plotë. Relacioni $<$ nuk është refleksiv, prandaj nuk është relacion renditjeje në këtë kuptim. Ai quhet renditje e rreptë. Për nxënësin dallimi nuk ka rëndësi; për mësuesin shpjegon pse ndonjëherë thuhet «të paktën» dhe ndonjëherë «më shumë se».

Pohimi 11.1. Relacioni $a \mid b$ është relacion renditjeje në $\mathbb{N}$, dhe nuk është renditje e plotë.

Vërtetim. Refleksiviteti: $a = a \times 1$. Kalimtaria: nëse $b = a \times m$ dhe $c = b \times n$, atëherë $c = a \times (m \times n)$. Antisimetria: nëse $b = a \times m$ dhe $a = b \times n$, atëherë $a = a \times (m \times n)$. Meqë $a \times 1 = a \times (m \times n)$ dhe $a \neq 0$, nga vetia e thjeshtimit (pohimi 4.1 (vi)) marrim $m \times n = 1$. Në $\mathbb{N}$ kjo jep $m = n = 1$, sepse nëse $m \geq 2$, atëherë $m \times n \geq 2 \times 1 = 2$, pra $a = b$. Renditja nuk është e plotë, sepse as $2 \mid 3$, as $3 \mid 2$. ■

Renditja e pjesshme na lejon të krahasojmë dy gjëra vetëm ndonjëherë. Figura 9 tregon pjesëtuesit e 12-ës. Një vijë që ngjitet tregon se numri poshtë është pjesëtues i numrit lart. Ky është diagrami i Hasses: nuk vizatojmë as sythet, as shigjetat që dalin nga kalimtaria, sepse kuptohen. Numrat 4 dhe 6 nuk krahasohen.

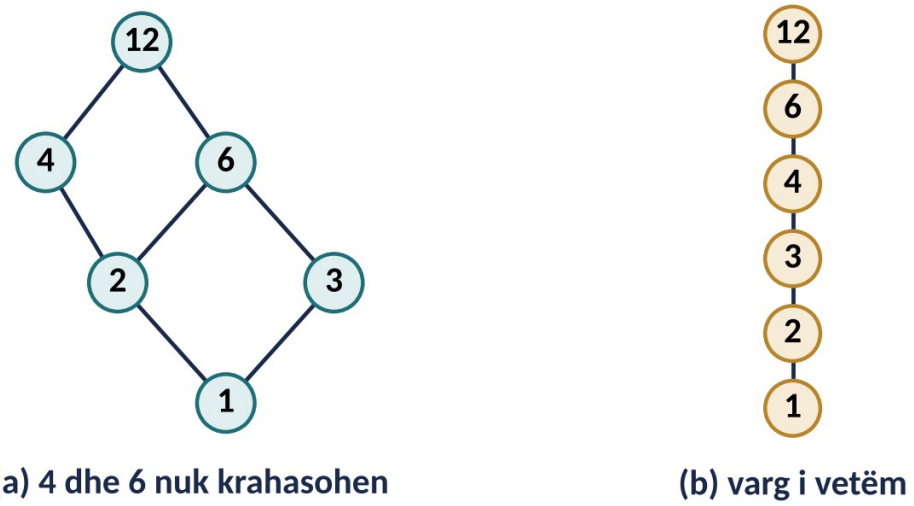


Figura 9. Dy renditje: (a) diagrami i Hasses për pjesëtuesit e 12-ës, renditje e pjesshme; (b) të njëjtët numra sipas $\leq$, një varg i vetëm, renditje e plotë.

Renditja e pjesshme është më e zakonshme sesa duket. Përfshirja e bashkësive është një shembull: $\{1\}$ dhe $\{2\}$ janë nënbashkësi të $\{1, 2\}$, por nuk krahasohen me njëra-tjetrën. E njëjta gjë ndodh me figurat, kur një figurë mund të hyjë ose jo brenda tjetrës.

11.2 Renditja në varg

Renditja e një bashkësie objektesh sipas gjatësisë, peshës ose vëllimit quhet renditje në varg, ose seriacion. Është një nga veprimtaritë e para matematikore dhe ka një strukturë të fshehtë që ia vlen ta shohim.

> **Pohimi 11.2.** Çdo bashkësi e fundme joboshe me renditje të plotë ka një element më të vogël, dhe elementet e saj mund të shkruhen në një varg të vetëm $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, ku $x < y$ do të thotë $x \mathrel{R} y$ dhe $x \neq y$.

Vërtetim. Për $n = 1$ është e qartë. Le të jetë pohimi i vërtetë për n elemente dhe le të kemi $n + 1$ elemente. Heqim një element x. Të tjerët kanë një më të vogël m. Nëse x është më i vogël se m, atëherë sipas kalimtarisë ai është më i vogli i të gjithëve; përndryshe m është më i vogli. E vendosim elementin më të vogël në krye dhe zbatojmë hipotezën për n elementet e tjerë. ■

Vërtetimi është vetë një algoritëm: gjej më të voglin, vëre në krye, përsërit. Kjo është mënyra që shumë fëmijë e zbulojnë me shkopinj. Një fëmijë tjetër mund të fusë çdo shkop të ri në vendin e vet, duke e krahasuar me të tjerët. Inhelder dhe Piaget (1964) përshkruan pikërisht kalimin nga çifte të veçuara te vargu i plotë.

Kalimtaria ka këtu një pasojë praktike. Për të kontrolluar nëse 5 shkopinj janë në radhë të saktë, nuk duhet të krahasojmë të 10 çiftet e mundshme. Mjaftojnë 4 krahasime të fqinjëve, sepse pjesa tjetër del nga kalimtaria. Për n objekte, çiftet janë $n \times (n - 1) : 2$, ndërsa krahasimet e fqinjëve janë $n - 1$. Nxënësi që kontrollon vargun duke e parë nga fundi në fund po e përdor kalimtarinë, ndoshta pa e ditur.

11.3 Njësi profesionale: renditja e shkopinjve

Shembull matematikor i zgjidhur. Për 4 shkopinj me gjatësi të ndryshme ka $4 \times 3 : 2 = 6$ çifte. Kur ata janë në varg, 3 krahasime fqinjësh mjaftojnë.

Paraqitja në klasë. Çdo nxënës merr 6 shkopinj me gjatësi afër njëri-tjetrit, ku ndryshimi duket vetëm kur vihen krah për krah. Detyra është t'i radhisë nga më i shkurtri te më i gjati, duke i mbajtur të rrafshuar në një skaj të përbashkët.

Pyetje diagnostikuese. «Ke një shkop të ri që duhet të hyjë në varg. Ku e fut? Me sa shkopinj duhet ta krahasosh?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «E krahasoj me të gjithë, një nga një.» Ose: «E krahasoj me atë në mes. Nëse është më i gjatë, nuk më duhen më të shkurtrit.»

Analiza didaktike. Përgjigjja e parë është e saktë dhe nuk përdor kalimtarinë. Përgjigjja e dytë e përdor plotësisht: «më i gjatë se ai në mes» do të thotë më i gjatë edhe se të gjithë të shkurtrit. Mësuesi nuk e vlerëson të parën si të gabuar. E pyet: «A mund të kursesh ndonjë krahasim?» Një nxënës mund të krijojë edhe çifte ose treshe të renditura pa e lidhur të gjithë vargun. Ky është një hap i njohur, dhe pyetja e dobishme është: «Ku shkon ky grup te grupi tjetër?»

Alternativë metodike. Nxënësi krahason fillimisht vetëm 3 shkopinj me gjatësi shumë të ndryshme, pastaj shton një nga një. Kontrolli në rast të ri: 5 numra në kartela, të fshehur, ku nxënësi mund të shohë vetëm dy njëkohësisht.

Pyetje reflektuese për studentin. Sa krahasime duhen, në rastin më të keq, për të gjetur më të voglin nga n numra? Pse kjo përgjigje nuk varet nga radha e kartelave?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

▸ Renditja është refleksive, antisimetrike dhe kalimtare; ajo është e plotë kur çdo dy elemente krahasohen.
▸ $\leq$ në $\mathbb{N}_0$ është renditje e plotë; pjesëtueshmëria në $\mathbb{N}$ është e pjesshme.
▸ Çdo bashkësi e fundme me renditje të plotë shkruhet si varg; vërtetimi është vetë një algoritëm renditjeje.
▸ Kalimtaria e bën që një varg të kontrollohet me $n - 1$ krahasime fqinjësh.

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 12

12. Shenja e barazimit si relacion

NË KËTË KAPITULL

– Çfarë thotë shenja =
– Nivele të kuptimit
– Vargu i barazimeve
– Mendimi relacional
– Njësi profesionale: 8 + 4 = □ + 5

12.1 Çfarë thotë shenja =

Matematikisht, $a = b$ do të thotë se a dhe b janë emra të të njëjtit numër. Barazimi është relacion ekuivalence në $\mathbb{N}_0$, dhe për shprehjet numerike ai ndan shprehjet në klasa: 12, 8 + 4, 7 + 5, 3 × 4 janë të gjitha në një klasë. Por nxënësi e sheh shenjën në një mënyrë tjetër. Pas 7 + 5 = vjen përgjigjja. Shenja i duket si urdhër: «tani llogarit». Kieran (1981) e përshkroi këtë kuptim veprimor te nxënësit, që e shohin shenjën si sinjal për të bërë diçka, jo si lidhje ndërmjet dy anëve.

Ky kuptim nuk del rastësisht. Ai është i natyrshëm në klasat ku çdo barazim ka trajtën $a + b = c$. Falkner et al. (1999) u dhanë nxënësve të klasave të para deri në të gjashtën barazimin 8 + 4 = □ + 5, dhe shumica nuk dhanë 7, por 12 ose 17. Përgjigjja 12 është rezultati i asaj që u kërkua majtas. Përgjigjja 17 është shuma e të gjithë numrave. Kuptimi i dobët i shenjës nuk mbaron me arsimin fillor: Knuth et al. (2006) gjetën se te nxënësit e arsimit të mesëm të ulët, kuptimi i shenjës si lidhje parashikon suksesin në zgjidhjen e ekuacioneve, edhe pasi merret parasysh aftësia e tyre e përgjithshme matematikore.

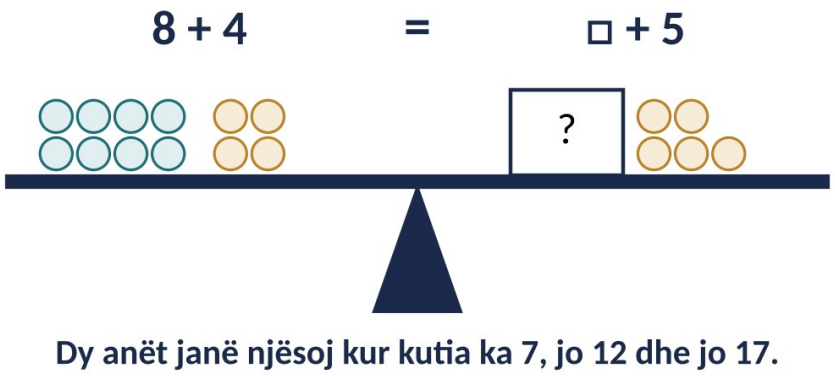


Figura 10. Barazimi si krahasim i dy anëve. Peshorja e bën të dukshme atë që shenja e fsheh: pyetja nuk është «sa bën?», por «sa duhet që të jenë njësoj?».

12.2 Nivele të kuptimit

Rittle-Johnson et al. (2011) ndërtuan një hartë të zhvillimit të këtij kuptimi, me katër nivele. Në nivelin e parë, veprimor i ngurtë, nxënësi pranon vetëm barazime me veprime në të majtë dhe rezultat në të djathtë. Në të dytin, veprimor i përkulshëm, pranon edhe 12 = 7 + 5. Në të tretin,

relacional bazë, pranon dhe zgjidh barazime me veprime në të dy anët. Në të katërtin, relacional krahasues, krahason dy anët pa llogaritur, duke parë strukturën.

Tabela 7. Katër nivele të kuptimit të shenjës së barazimit

Niveli	Çfarë pranon nxënësi	Detyrë që e provon
Veprimor i ngurtë	5 + 3 = 8	Sa bën 5 + 3?
Veprimor i përkulshëm	8 = 5 + 3, 8 = 8	Vërtetë apo gabim: 8 = 5 + 3?
Relacional bazë	5 + 3 = 6 + 2	Plotëso: 5 + 3 = □ + 2
Relacional krahasues	Krahason pa llogaritur	Pa llogaritur: 27 + 15 = 26 + 16?

Për mësuesin, tabela është një udhëzues për hartimin e detyrave. Carpenter et al. (2003) propozojnë dy lloje detyrash të thjeshta: barazime që nxënësi i gjykon si të vërteta ose të gabuara dhe barazime të hapura. Ato nuk kërkojnë kohë të veçantë. Mjafton që një pjesë e ushtrimeve të përditshme të mos jenë të trajtës $a + b = \square$.

12.3 Vargu i barazimeve

Rasti nga pyetja hyrëse del pikërisht nga kuptimi veprimor. Nxënësi shkruan

$$8+4=12+5=17.$$

Ai ka llogaritur 8 + 4, pastaj ka shtuar 5. Si varg hapash, mendimi është i saktë. Si fjali matematikore është e rreme, sepse sipas kalimtarisë do të thoshte 8 + 4 = 17. Mësuesja që e lë pa korrigjuar sepse «rezultati i fundit është i saktë» i dërgon nxënësit një mesazh: shenja nuk thotë gjë, ajo vetëm ndan hapat. Disa vjet më vonë, i njëjti nxënës do të ketë vështirësi në shkrimin e hapave të një ekuacioni ose të një vërtetimi. Ka një shkrim të saktë, po aq të shkurtër:

$$8+4=12\,,12+5=17.$$

Në klasë kjo nuk është çështje e bukurisë së shkrimit. Është çështje e përmbajtjes së shenjës.

12.4 Mendimi relacional

Kur nxënësi e sheh barazimin si lidhje, ai mund të përdorë strukturën në vend të llogaritjes. Te 27 + 15 = 26 + 16, numri majtas është 1 më i madh dhe numri tjetër 1 më i vogël, pra shumat janë të barabarta. Kjo është ruajtja e shumës nga Leksioni 4, e përdorur si arsyetim për barazimin. Një lidhje e tillë është pikërisht ajo që hap rrugën për algjebrën: nxënësi po përdor një veti që vlen për të gjithë numrat, pa e shkruar me shkronja.

12.5 Njësi profesionale: 8 + 4 = □ + 5

Shembull matematikor i zgjidhur. Ana e majtë është 12. Duhet □ + 5 = 12, pra □ = 7. Ose, pa llogaritur: 5 është 1 më shumë se 4, prandaj □ duhet të jetë 1 më pak se 8, pra 7.

Paraqitja në klasë. Mësuesi përdor një peshore me dy krahë ose kuti me objekte: majtas 8 dhe 4 objekte, djathtas 5 objekte dhe një kuti të mbyllur. Sa objekte duhet të ketë kutia që të dyja anët të jenë njësoj?

Pyetje diagnostikuese. «Mimoza ka shkruar 12 te kutia. Vendos 12 dhe lexo të gjithë barazimin: sa është majtas? Sa është djathtas?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Majtas 12. Djathtas 17. Nuk janë njësoj. Te kutia duhet ajo që i mungon 5-shit për të bërë 12.»

Analiza didaktike. Përgjigjja 12 sugjeron se nxënësi e lexon shenjën si «tani jep rezultatin». Përgjigjja 17 sugjeron se ai mbledh gjithçka që sheh. Por një përgjigje e vetme nuk i dallon këto nga një pakujdesi. Mësuesi jep dy barazime të tjera: □ = 3 + 6 dhe 6 + 3 = □ + 2. Nxënësi që pranon të parin dhe shkruan 9 te i dyti është në nivelin e dytë të Tabelës 7. Nxënësi që thotë se barazimi i parë «është mbrapsht» është në të parin. Korrigjimi «përgjigjja është 7» nuk e ndryshon kuptimin. Duhet bërë të dukshme që dy anët po krahasohen.

Alternativë metodike. Mësuesi lexon shenjën me zë si «është njësoj sa» dhe, për disa javë, përdor barazime në trajta të ndryshme në ushtrimet e përditshme: 8 = 8, 8 = 5 + 3, 5 + 3 = 3 + 5. Kontrolli në rast të ri: 6 + 5 = □ + 4 dhe □ + 2 = 3 + 6.

Pyetje reflektuese për studentin. Shikoni një faqe ushtrimesh në një tekst të klasës së dytë. Sa barazime kanë veprime në të dy anët? Çfarë do të ndryshonit, pa shtuar faqe?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

► Shenja e barazimit është relacion ekuivalence: dy anët janë emra të të njëjtit numër.

► Shumë nxënës e kuptojnë shenjën si urdhër për të llogaritur; kjo lidhet me llojin e barazimeve që shohin.

► Vargu 8 + 4 = 12 + 5 = 17 është i gabuar si fjali, edhe kur hapat janë të saktë.

► Barazimet me veprime në të dy anët dhe gjykimi «vërtetë apo gabim» e zhvillojnë kuptimin relacional.

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 13

13. Gabimet si burim informacioni

NË KËTË KAPITULL

– Modeli diagnostik
– Përmbledhje e rasteve
– Një bisedë diagnostikuese e modeluar
– Si zgjedhim ndërhyrjen

13.1 Modeli diagnostik

Rastet e kapitujve 2–12 ndjekin të njëjtin model me pesë hapa, që e kemi përdorur në Javën XI dhe në Javën XII: (1) çfarë ka shkruar ose thënë nxënësi; (2) të paktën dy shpjegime të mundshme; (3) pyetja ose detyra që i dallon; (4) ndërhyrja; (5) kontrolli në një rast të ri.

Për këtë leksion ka një vështirësi të veçantë. Gabimet te algoritmet lënë gjurmë në shifra. Gabimet te relacionet dhe te vetitë shpesh nuk lënë gjurmë, sepse rezultati del i saktë me arsyetim të pasaktë. Nxënësi që llogarit $5 \times 2 + 3 = 13$ duke lexuar nga e majta ka përgjigje të saktë. Nxënësi që shkruan $8 + 4 = 12 + 5 = 17$ ka rezultat të saktë të fundit. Prandaj detyra duhet të ndërtohet ashtu që kuptimi i gabuar të dalë në pah.

13.2 Përmbledhje e rasteve

Tabela 8. Gabime dhe keqkuptime të Javëve XIII dhe XV, me pyetje që i provojnë

Puna e nxënësit (simulim)	Hipoteza për t'u provuar	Pyetja ose detyra provuese	Rasti i ri
«5 − 8 nuk bëhet kurrë»	Kufiri i bashkësisë merret si veti e veprimit	Si bie temperatura 8 gradë nga 5?	3 − 7
43 − 19: 43 − 20 = 23, 23 − 1 = 22	Rregullimi bëhet në drejtim të gabuar	Sa ke hequr gjithsej?	52 − 28
6 : 0 = 0 ose 6 : 0 = 6	Arsyetim për situatën, jo për veprimin	Kontrolloje me shumëzim	0 : 7 dhe 7 : 0
□ − 7 = 5, □ = 2	Veprimi lexohet nga shenja	Cila është e tëra?	15 − □ = 6
2 + 3 × 4 = 20	Lexim nga e majta, si tekst	Për cilin tregim vlen 20?	5 + 2 × 3
24 : 4 × 2 = 3	Shumëzimi merret para pjesëtimit	Lexoje nga e majta: çfarë del?	30 : 5 × 2
«8 është dyfishi i 4» lexuar mbrapsht	Shigjeta shihet si lidhje pa drejtim	Sa është dyfishi i 8?	«3 më shumë se»
«Rregulli është shto 2» për 3, 5, 7	Lexim vertikal i tabelës	Çfarë hyn kur del 5?	Hyrje të përziera
Grupe «të kuqe» dhe «trekëndësha»	Dy kritere njëkohësisht	Ku shkon trekëndëshi i kuq?	Numrat 1–20
8 + 4 = □ + 5, □ = 12	Shenja si urdhër	Sa është secila anë?	6 + 5 = □ + 4

Tabelën e lexojmë si listë hipotezash, jo si diagnoza. Studenti propozon të paktën dy pyetje verifikuese para se të planifikojë ndërhyrjen.

13.3 Një bisedë diagnostikuese e modeluar

Mësuesja: «Ke shkruar 8 + 4 = 12 + 5 = 17. Lexoje pjesën e parë: sa është 8 + 4?»
Nxënësi 1: «12.»
Mësuesja: «Po pas shenjës së parë, deri te shenja e dytë, çfarë ke shkruar?»
Nxënësi 1: «12 + 5.»
Mësuesja: «Sa bën kjo?»
Nxënësi 1: «17.»
Mësuesja: «Shenja midis tyre thotë se janë njësoj. A janë njësoj 12 dhe 17?»
Nxënësi 1: «Jo. Por unë po shtoja pesëshin.»
Mësuesja: «E di. Si mund ta shkruash që të duket se ke bërë dy hapa?»

Ky dialog i simuluar nuk e korrigjon rezultatin, që është i saktë. E çon nxënësin te fjalia që ai ka shkruar pa e dashur. Fjala e fundit e mësueses e pranon mendimin e nxënësit dhe e kthen pyetjen te shkrimi.

13.4 Si zgjedhim ndërhyrjen

Te keqkuptimet e kësaj teme, ndërhyrja më e dobishme rrallë është një ushtrim më shumë i të njëjtit lloj. Nxënësi që e sheh shenjën si urdhër do të zgjidhë dhjetë ushtrime të tjera me të njëjtin kuptim. Ajo që ndryshon është lloji i detyrës: barazime me trajtë të re, situata ku shprehja del nga tregimi, klasifikime ku kriteri duhet thënë. Udhëzuesi i WWC (Fuchs et al., 2021) rekomandon gjuhë të qartë matematike dhe paraqitje të zgjedhura me kujdes. Te relacionet kjo do të thotë që fjalët «më shumë se», «njësoj sa», «është pjesëtues i» të lexohen me të dy drejtimet dhe të lidhen me një paraqitje konkrete. Asnjë nga këto udhëzime nuk e përcakton ndërhyrjen për një nxënës të caktuar. Ajo zgjidhet sipas asaj që ka treguar nxënësi te pyetja diagnostikuese dhe kontrollohet në rastin e ri.

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

► Gabimet te relacionet shpesh nuk lënë gjurmë në rezultat; detyra ndërtohet që kuptimi të dalë në pah.
► Një përgjigje e saktë nuk vërteton një arsyetim të saktë.
► Ndërhyrja ndryshon llojin e detyrës, jo vetëm numrin e ushtrimeve.
► Tabela e gabimeve është listë hipotezash, që kontrollohen në rast të ri.

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 14

14. Hartimi i mësimit: nga teoria te klasa

NË KËTË KAPITULL

– Një orë 45-minutëshe: shenja e barazimit
– Një sekuencë e shkurtër: klasifikimi
– Diferencimi

14.1 Një orë 45-minutëshe: shenja e barazimit

Qëllimi: nxënësi i klasës së dytë gjykon nëse dy anët e një barazimi janë njësoj dhe gjen numrin që mungon kur ka veprim në të dy anët. Ora nuk synon të mësojë një rregull. Synon të ndryshojë mënyrën si lexohet shenja.

Mësuesi nis me një peshore ose me dy tabaka. Majtas vendos 6 dhe 2 kapakë, djathtas 8. «Çfarë mund të themi?» Nxënësit përshkruajnë dhe mësuesi shkruan 6 + 2 = 8. Pastaj ndërron tabakat: 8 = 6 + 2. Pyet: «A ka ndryshuar gjë?» Në fazën e dytë, klasa gjykon me kartela vërtetë ose gabim disa barazime të zgjedhura me radhë: 8 = 8, 5 + 3 = 8, 5 + 3 = 6 + 2, 5 + 3 = 7 + 2, 8 = 5 + 3 + 1. Çdo mospajtim diskutohet.

Në fazën e tretë nxënësit punojnë me çifte te 8 + 4 = □ + 5 dhe pranë tij □ + 3 = 4 + 6. Mësuesi mbledh përgjigjet pa i gjykuar. Sipas pesë praktikave të Smith dhe Stein (2018), përgjigjet që paraqiten zgjidhen dhe renditen me qëllim: fillimisht 12, që e bën të dukshme leximin si urdhër, pastaj 17, dhe në fund 7. Klasa e provon secilën me kapakë.

Tabela 9. Plani i orës dhe vëzhgimi formues

Minutat	Veprimtaria	Pyetja kryesore	Çfarë duam të shohim
0–8	Tabakat dhe barazimi në dy drejtime	A ka ndryshuar gjë?	Barazimi pranohet nga të dy anët
8–20	Vërtetë apo gabim	Sa është secila anë?	Krahasim i dy anëve, jo vetëm llogaritje
20–32	Puna në çifte me □	Sa duhet të jetë që të jenë njësoj?	Përgjigje 12, 17 dhe 7, me arsye
32–41	Krahasimi i përgjigjeve	Provojeni me kapakë	Vetëkorrigjim
41–45	Bileta e daljes: 6 + 5 = □ + 4	Si e di?	Rasti i ri

Bileta e daljes tregon nëse kuptimi është zbatuar në një rast të ri. Nxënësi që shkruan 7 dhe thotë «5 është 1 më shumë se 4, prandaj…» po kalon në nivelin krahasues.

14.2 Një sekuencë e shkurtër: klasifikimi

Qëllimi: nxënësi i klasës së parë ndan kartela sipas një kriteri dhe e thotë kriterin. Veprimtaria përsëritet në tri ditë, nga 10 minuta. Në ditën e parë nxënësit ndajnë kartela sipas ngjyrës. Në ditën e dytë u jepet një ndarje e gatshme dhe gjejnë kriterin. Në ditën e tretë ndajnë të njëjtat

kartela sipas një kriteri tjetër dhe krahasojnë dy ndarjet: të njëjtat objekte, grupe të ndryshme. Kjo e tregon se klasa nuk është veti e objektit, por pasojë e kriterit.

14.3 Diferencimi

Diferencimi nuk do të thotë që një grup merr vetëm detyra të lehta. Te barazimi, të gjithë punojnë me të njëjtën ide: dy anët janë njësoj. Një nxënës përdor kapakë, një tjetër vizaton, një i tretë punon vetëm me numra. Nxënësi që e zotëron mund të marrë detyrën: «Shkruaj sa më shumë barazime të vërteta me numrat 2, 3, 4 dhe 5, ku secili përdoret një herë». Barazimet si $2 + 5 = 3 + 4$ dhe $5 - 3 = 4 - 2$ e çojnë te struktura, jo te llogaritja.

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

► Ora për shenjën e barazimit ndryshon llojin e barazimeve, jo vetëm numrat.

► Përgjigjet e nxënësve paraqiten me një radhë të zgjedhur, që gabimi të analizohet para përgjigjes së saktë.

► Klasifikimi përsëritet me kritere të ndryshme, që të duket se klasa vjen nga kriteri.

► Diferencimi ruan të njëjtën ide matematike dhe ndryshon shkallën e ndihmës.

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 15

15. Punëtoria universitare: detyra me analizë

NË KËTË KAPITULL

– Detyra 1: veprimi i brendshëm
– Detyra 2: rregullat e zbritjes
– Detyra 3: vetia shpërndarëse dhe drejtimi
– Detyra 4: rendi i veprimeve
– Detyra 5: vetitë e një relacioni
– Detyra 6: renditja e pjesshme
– Dymbëdhjetë detyra me zgjidhje

15.1 Detyra 1: veprimi i brendshëm

Detyrë. Cilat nga këto bashkësi janë të mbyllura ndaj mbledhjes dhe cilat ndaj shumëzimit: numrat çift, numrat tek, shumëfishat e 5-ës, numrat 0 dhe 1? Përgjigje: numrat çift dhe shumëfishat e 5-ës janë të mbyllura ndaj të dy veprimeve. Numrat tek janë të mbyllur ndaj shumëzimit, por jo ndaj mbledhjes, sepse $3 + 5 = 8$. Bashkësia $\{0, 1\}$ është e mbyllur ndaj shumëzimit, por jo ndaj mbledhjes, sepse $1 + 1 = 2$.

15.2 Detyra 2: rregullat e zbritjes

Detyrë. Shpjegoni me pohimin 3.3 strategjinë $72 - 38 = 72 - 40 + 2$ dhe llogaritni rezultatin. Përgjigje: $38 = 40 - 2$, dhe sipas rregullit (ii), $72 - (40 - 2) = (72 - 40) + 2 = 32 + 2 = 34$. Kontrolli: $34 + 38 = 72$.

15.3 Detyra 3: vetia shpërndarëse dhe drejtimi

Detyrë. Llogaritni $(36 + 12) : 6$ me dy mënyra dhe tregoni pse $36 : (6 + 12)$ nuk bën $6 + 3$. Përgjigje: $48 : 6 = 8$ dhe $36 : 6 + 12 : 6 = 6 + 2 = 8$. Nga ana tjetër, $36 : 18 = 2$. Sipas pohimit 4.3 (ii) pjesëtimi shpërndahet vetëm kur shuma është i pjesëtueshmi.

15.4 Detyra 4: rendi i veprimeve

Detyrë. Te $20 - 4 \times 3 + 2$, vendosni kllapa në të gjitha mënyrat e mundshme. A mund të dalë rezultati 10, 50 ose 2? Përgjigje: pa kllapa, $20 - 12 + 2 = 10$; $(20 - 4) \times 3 + 2 = 50$. Vlera 2 nuk del: tri vendosjet e tjera të kllapave japin $20 - 4 \times (3 + 2) = 0$, $(20 - 4) \times (3 + 2) = 80$ dhe $20 - (4 \times 3 + 2) = 6$. Studenti duhet të provojë të pesë vendosjet e mundshme dhe të thotë se vlerat që dalin janë 10, 50, 0, 80 dhe 6.

15.5 Detyra 5: vetitë e një relacioni

Detyrë. Në $A = \{1, 2, 3\}$ jepet $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$. Përcaktoni vetitë dhe, nëse është ekuivalencë, gjeni klasat. Përgjigje: relacioni është refleksiv dhe simetrik. Është kalimtar, sepse rrugët me dy hapa $1 \to 2 \to 1$ dhe $2 \to 1 \to 2$ mbyllen me sythe. Nuk është antisimetrik. Pra është ekuivalencë, me klasat $\{1, 2\}$ dhe $\{3\}$.

15.6 Detyra 6: renditja e pjesshme

Detyrë. Vizatoni diagramin e Hasses për pjesëtuesit e 18-ës dhe gjeni dy numra që nuk krahasohen. Përgjigje: pjesëtuesit janë 1, 2, 3, 6, 9, 18. Vijat janë 1–2, 1–3, 2–6, 3–6, 3–9, 6–18, 9–18. Numrat 2 dhe 3, 2 dhe 9, 6 dhe 9 nuk krahasohen.

15.7 Dymbëdhjetë detyra me zgjidhje

Provoni fillimisht vetë detyrat e seksionit 15.7.1. Zgjidhjet jepen më pas, në seksionin 15.7.2.

15.7.1 Detyrat

Detyra A. Vërtetoni se për $a \geq b$ dhe $c \geq d$ vlen $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$.

Detyra B. Provoni me një kundërshembull se $a - (b + c) = (a - b) + c$ nuk vlen në përgjithësi. Kur vlen?

Detyra C. Pse në $\mathbb{N}_0$ nga $a \times c = b \times c$ nuk del gjithmonë $a = b$? Jepni shembull.

Detyra D. Gjeni x te $15 - x = 6$, $x : 4 = 7$ dhe $28 : x = 7$, dhe thoni me fjalë cilën lidhje përdorni.

Detyra E. Llogaritni $18 - 3 \times 4 + 6 : 2$. Shkruani shprehjen me kllapa të plota, që të duket struktura.

Detyra F. Për $A = \{a, b\}$ dhe $B = \{1, 2, 3\}$, shkruani $A \times B$. Sa relacione nga A në B ka?

Detyra G. Jepet relacioni «x është 2 më i madh se y» në $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Shkruani çiftet dhe relacionin e kundërt.

Detyra H. Tregoni nëse relacioni «$a - b$ është çift» në $\mathbb{N}_0$, ku diferenca merret nga numri më i madh, është ekuivalencë. Sa klasa ka?

Detyra I. Sa ndarje të ndryshme ka bashkësia $\{1, 2, 3\}$? Shkruajini.

Detyra J. Në $\{1, 2, 3\}$ gjeni një relacion refleksiv dhe kalimtar që nuk është as simetrik, as antisimetrik.

Detyra K. Tregoni se $27 + 15 = 26 + 16$ pa llogaritur asnjë shumë, me pohimin 3.1.

Detyra L. Për 7 shkopinj, sa çifte ka dhe sa krahasime fqinjësh mjaftojnë për të kontrolluar vargun?

15.7.2 Zgjidhje dhe interpretim didaktik

Detyra A. Sipas përkufizimit, mjafton të tregojmë se $(b + d) + ((a - b) + (c - d)) = a + c$. Me vetitë ndërruese dhe shoqëruese, ana e majtë është $(b + (a - b)) + (d + (c - d)) = a + c$.

Detyra B. Për $a = 10$, $b = 3$, $c = 2$: $10 - 5 = 5$, ndërsa $7 + 2 = 9$. Barazimi vlen vetëm për $c = 0$, sepse sipas pohimit 3.3 (i) ana e majtë është $(a - b) - c$, dhe $(a - b) - c = (a - b) + c$ vetëm kur $c = 0$. Ky është pikërisht gabimi te kllapat.

Detyra C. Për $c = 0$: $2 \times 0 = 5 \times 0$, por $2 \neq 5$. Ky është kufizimi i pikës (vi) të pohimit 4.1, dhe i njëjti që përjashton pjesëtimin me zero.

Detyra D. $x = 15 - 6 = 9$ (zbritësi është e tëra pa diferencën). $x = 7 \times 4 = 28$ (i pjesëtueshmi është prodhimi i pjesëtuesit me herësin). $x = 28 : 7 = 4$ (pjesëtuesi është herësi i të pjesëtueshmit me herësin e dhënë).

Detyra E. $(18 - (3 \times 4)) + (6 : 2) = (18 - 12) + 3 = 9$. Kllapat tregojnë se shprehja ka tri pjesë: 18, heqja e 3×4 dhe shtimi i $6 : 2$.

Detyra F. $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$. Një relacion është çdo nënbashkësi e këtyre 6 çifteve, prandaj ka $2^6 = 64$ relacione, duke numëruar edhe relacionin bosh.

Detyra G. Çiftet janë (3, 1), (4, 2), (5, 3). Relacioni i kundërt, «x është 2 më i vogël se y», ka çiftet (1, 3), (2, 4), (3, 5).

Detyra H. Refleksiv: 0 është çift. Simetrik: diferenca është e njëjtë. Kalimtar: dy numra janë në relacion kur kanë të njëjtën mbetje me 2, dhe kjo është kalimtare. Ka dy klasa: numrat çift dhe numrat tek.

Detyra I. Janë 5: $\{\{1, 2, 3\}\}$; $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$; $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$; $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$; $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$. Sipas pohimit 10.1 kaq janë edhe relacionet e ekuivalencës në këtë bashkësi.

Detyra J. $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 3)\}$. Është refleksiv dhe kalimtar. Nuk është simetrik, sepse $(1, 3) \in R$ dhe $(3, 1) \notin R$. Nuk është antisimetrik, sepse $(1, 2), (2, 1) \in R$.

Detyra K. $27 + 15 = (26 + 1) + 15 = 26 + (1 + 15) = 26 + 16$. Përdorim vetinë shoqëruese dhe asnjë llogaritje të shumës së plotë.

Detyra L. $7 \times 6 : 2 = 21$ çifte dhe 6 krahasime fqinjësh.

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 16

16. Vlerësimi përmbyllës dhe vetëvlerësimi

NË KËTË KAPITULL

– Kriteret e vlerësimit
– Tri situata për seminar
– Test përmbledhës (30 minuta, 20 pikë)
– Çelësi orientues i testit
– Rubrikat

16.1 Kriteret e vlerësimit

Te kjo temë, një përgjigje e saktë pa arsyetim nuk tregon kompetencë profesionale. Vlerësimi kontrollon katër gjëra: (i) saktësinë e përkufizimeve dhe të kundërshembujve; (ii) justifikimin e një vetie me vërtetim, jo me disa shembuj; (iii) kalimin ndërmjet paraqitjeve të një relacioni; (iv) cilësinë e pyetjes diagnostikuese. Pika (iii) i përket asaj që Ball et al. (2008) e quajnë njohuri e specializuar e përmbajtjes: matematikë që i duhet vetëm atij që mëson të tjerët. Pika (iv) kërkon edhe njohurinë e përmbajtjes dhe të nxënësve, që në të njëjtin model përfshin njohjen e keqkuptimeve të zakonshme dhe të mënyrës si i interpretojnë nxënësit detyrat. Një student mund të thotë pa gabim përkufizimin e relacionit të ekuivalencës dhe të mos dijë ta dallojë një klasifikim të keq te fletorja e një nxënësi; kjo mangësi duhet thënë qartë.

16.2 Tri situata për seminar

Situata 1. Një mësues u thotë nxënësve: «Numri më i madh del gjithmonë i pari te zbritja.» Studentët tregojnë kufirin e kësaj fjalie, propozojnë një formulim të saktë për klasën e dytë dhe diskutojnë çfarë ndodh kur nxënësi takon numrat negativë.

Situata 2. Një tekst shkollor ka vetëm ushtrime të trajtës $a + b = \square$ në gjithë kapitullin. Studentët ndërtojnë pesë ushtrime shtesë që nuk kërkojnë kohë më shumë, duke ndjekur nivelet e Tabelës 7.

Situata 3. Nxënësit ndajnë numrat 1–12 në «çift» dhe «më të mëdhenj se 6». Studentët e analizojnë ndarjen me përkufizimin 10.2 dhe e ndërtojnë ndarjen e saktë me dy kritere, me një tabelë dyhyrëshe.

16.3 Test përmbledhës (30 minuta, 20 pikë)

Testi kërkon llogaritje, vërtetim dhe analizë didaktike, prandaj koha e parashikuar është 30 minuta. Në një version 16-minutësh mbahen vetëm detyrat 2 dhe 4. Një variant paralel, me çelës të vetin, jepet në Shtojcën B.

1) Vërtetoni se $a - (b - c) = (a - b) + c$, për $c \le b \le a$. Përdoreni për të shpjeguar $65 - 29$. (5 pikë; 7 minuta)

2) Jepet relacioni {(1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3)} në {1, 2, 3}. Paraqiteni me diagram shigjetash dhe me tabelë, dhe përcaktoni vetitë e tij. (5 pikë; 7 minuta)

3) Shpjegoni pse pjesëtimi me zero nuk ka kuptim, duke dalluar 5 : 0 nga 0 : 0. Shkruani si do t'ia shpjegonit një nxënësi. (4 pikë; 7 minuta)

4) Një nxënës shkruan 8 + 4 = □ + 5, □ = 12. Formuloni dy hipoteza, një pyetje që i dallon dhe një ndërhyrje. (6 pikë; 9 minuta)

16.4 Çelësi orientues i testit

1) Le të jetë $d = (a - b) + c$. Atëherë $(b - c) + d = (b - c) + (c + (a - b)) = ((b - c) + c) + (a - b) = b + (a - b) = a$, me vetinë ndërruese, vetinë shoqëruese dhe dy herë përkufizimin e diferencës, pra $a - (b - c) = d$. Për $65 - 29 = 65 - (30 - 1) = (65 - 30) + 1 = 36$. Pikët: 3 për vërtetimin, 2 për zbatimin.

2) Relacioni është refleksiv, antisimetrik dhe kalimtar, jo simetrik. Është renditja $\leq$ në {1, 2, 3}. Pikët: 2 për paraqitjet, 2 për vetitë me arsye, 1 për njohjen e renditjes.

3) 5 : 0 do të kërkonte c me $0 \times c = 5$, që nuk ekziston. 0 : 0 do të kërkonte c me $0 \times c = 0$, që plotësohet nga çdo numër, prandaj nuk përcakton një numër të vetëm. Shpjegimi për nxënësin mbështetet te kontrolli me shumëzim. Pikët: 1 për secilin rast, 2 për shpjegimin.

4) Përgjigjja e saktë është 7. H1: nxënësi e lexon shenjën si urdhër dhe shkruan rezultatin e anës së majtë. H2: e kupton barazimin, por ka shkruar 12 nga pakujdesia. Pyetja: «Vendos 12 dhe lexo: sa është djathtas?», e ndjekur nga rastet □ = 3 + 6 dhe 6 + 5 = □ + 4. Nëse gabimi përsëritet, H1 bëhet më e besueshme. Ndërhyrja: peshorja dhe barazime me trajtë të re, të lexuara si «është njësoj sa». Pikët: 2 për hipotezat, 2 për pyetjen dhe rastin e ri, 2 për ndërhyrjen e lidhur me hipotezën.

16.5 Rubrikat

Tabela 10. Rubrika analitike e punës së studentit (0–2 pikë për dimension)

Dimensioni	0 – i pamjaftueshëm	1 – pjesërisht	2 – plotësisht
Saktësia matematikore	Përkufizim i gabuar ose veti pa argument	Përkufizim i saktë, argument i paplotë	Përkufizim, argument dhe kundërshembull
Paraqitjet	Mungojnë	Një paraqitje pa lidhje me tjetrën	Dy paraqitje të lidhura
Analiza didaktike	Vetëm korrigjim	Hipotezë pa provë	Hipoteza, pyetje dhe ndërhyrje
Gjuha profesionale	Terma të pasaktë	Terminologji kryesisht e saktë	Gjuhë e saktë dhe e përshtatur

Tabela 11. Rubrika e diagnostikimit të keqkuptimeve (0–3)

Niveli	Interpretimi i punës	Cilësia e ndërhyrjes	Kontrolli në rast të ri
0 – i pamjaftueshëm	E ngatërron gabimin me diagnozën	Jep vetëm përgjigjen e saktë	Nuk parashikon kontroll
1 – fillestar	Gjen një hipotezë	Propozon një ushtrim të ngjashëm	Kontrollon vetëm rezultatin
2 – kompetent	Krahason dy hipoteza me pyetje	Ndryshon llojin e detyrës	Detyrë e ngjashme, e interpretuar
3 – i avancuar	Ndërton provë që i dallon hipotezat	Lidh paraqitjen me kuptimin e shenjës	Rast i ri me strukturë të ndryshuar

Rubrika e Tabelës 10 vlerëson produktin e punës së studentit në katër dimensione, prandaj përdor tri nivele, 0–2. Rubrika e Tabelës 11 përshkruan zhvillimin e një aftësie të vetme profesionale dhe ka katër nivele, 0–3. Dy shkallët nuk mblidhen; secila përdoret për qëllimin e vet.

Vetëvlerësim. A mund të them kur një veprim është i brendshëm në një bashkësi? A mund të shpjegoj pse pjesëtimi me zero nuk ka kuptim, pa përdorur fjalën «ndalohet»? A mund ta kaloj një relacion nga një paraqitje në tjetrën? A e dalloj një kriter klasifikimi të mirë nga një i keq? A mund të hartoj një detyrë që e nxjerr në pah kuptimin e shenjës së barazimit?

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 17

17. Përmbledhje dhe punë e pavarur

NË KËTË KAPITULL

– Sinteza e leksionit
– Punë individuale pas leksionit

17.1 Sinteza e leksionit

Katër veprimet në ℕ janë dy veprime dhe dy veprimet e tyre të kundërta. Mbledhja dhe shumëzimi janë të brendshme, zbritja dhe pjesëtimi jo; prandaj «nuk bëhet» është fjali për bashkësinë, jo për veprimin. Vetitë e mbledhjes dhe të shumëzimit dalin nga bashkësitë e fundme. Rregullat e zbritjes dhe të pjesëtimit dalin nga përkufizimi i tyre si veprime të kundërta. Pjesëtimi me zero nuk ka kuptim, sepse nuk përcakton një numër të vetëm. Rendi i veprimeve është marrëveshje e mbështetur te struktura e shprehjes.

Prodhimi i dy bashkësive çon te relacioni, që është një bashkësi çiftesh të renditura me disa paraqitje. Relacionet me vetitë e ekuivalencës dhe të renditjes janë dy veprimtaritë e para të mendimit matematikor të fëmijës: klasifikimi dhe renditja në varg. Shenja e barazimit, që nxënësi e sheh çdo ditë, është vetë një relacion ekuivalence. Kompetenca profesionale e mësuesit duket kur këto lidhje i vë re në një fjali të nxënësit dhe e zgjedh detyrën tjetër sipas tyre.

17.2 Punë individuale pas leksionit

- Hartoni një fletë diagnostike me 6 barazime që dallon katër nivelet e Tabelës 7; për çdo barazim shkruani çfarë pritet nga nxënësi i secilit nivel.
- Shkruani një analizë prej 500–700 fjalësh për gabimin $2 + 3 \times 4 = 20$: dy hipoteza, dy pyetje diagnostikuese, një model vizual dhe kontrolli në rast të ri.
- Përgatitni një mikromësimdhënie 10-minutëshe për klasifikimin me dy kritere.
- Gjeni në një tekst shkollor tri fjali që janë të vërteta vetëm në $\mathbb{N}_0$ dhe riformulojini.

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 18

18. Bankë problemesh për studim të pavarur

1. Vërtetoni se bashkësia e shumëfishave të 3-shit është e mbyllur ndaj mbledhjes.
2. Llogaritni $84 - 39$ me rregullin (ii) të pohimit 3.3.
3. Llogaritni $(15 + 25) : 5$ me dy mënyra.
4. Llogaritni $48 : 6 : 2$ dhe $48 : (6 : 2)$ dhe shpjegoni dallimin.
5. Vërtetoni se $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$, për $c \leq b$.
6. Gjeni x te $40 : x = 8$ dhe $x - 13 = 9$.
7. Llogaritni $6 + 4 \times 5 - 8 : 2$.
8. Sa çifte ka produkti $A \times B$, kur $|A| = 4$ dhe $|B| = 5$?
9. Për $A = \{1, 2, 3, 4\}$, shkruani çiftet e relacionit $x + y = 5$. Cilat veti ka?
10. Tregoni se «ka të njëjtën shifër të njësive» është relacion ekuivalence në $\mathbb{N}$. Sa klasa ka?
11. Vizatoni diagramin e Hasses për pjesëtuesit e 20-ës.
12. Gjeni numrin që mungon pa llogaritur shumat: $36 + 18 = 34 + \square$.

LEKSIONI 7 · KAPITULLI 19

19. Përgjigje të shkurtra për kontrollin e punës

1. $3 \times m + 3 \times n = 3 \times (m + n)$.
2. $84 - (40 - 1) = 44 + 1 = 45$.
3. $40 : 5 = 8$ dhe $3 + 5 = 8$.
4. $48 : 6 : 2 = 8 : 2 = 4$ dhe $48 : 3 = 16$. Pjesëtimi nuk është shoqërues.
5. Mjafton të tregojmë se $a \times c + a \times (b - c) = a \times (c + (b - c)) = a \times b$.
6. $x = 5$ dhe $x = 22$.
7. $6 + 20 - 4 = 22$.
8. $4 \times 5 = 20$.
9. (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1). Relacioni është simetrik; nuk është refleksiv, as antisimetrik, as kalimtar.
10. Barazimi i shifrave është refleksiv, simetrik dhe kalimtar; ka 10 klasa.
11. Pjesëtuesit janë 1, 2, 4, 5, 10, 20; vijat janë 1–2, 1–5, 2–4, 2–10, 5–10, 4–20, 10–20.
12. 34 është 2 më pak se 36, prandaj □ është 2 më shumë se 18, pra 20.

LEKSIONI 7

Bibliografia

Shënim mbi përdorimin e burimeve

Bibliografia ndjek stilin APA (botimi i 7-të). Argumentet matematikore mbështeten te vërtetimet në tekst; burimet empirike citohen vetëm për pohime mbi mësimdhënien dhe të nxënit. Shembujt, dialogët dhe rastet e nxënësve janë hartuar për këtë leksion.

Literatura e cituar

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bye, J. K., Chan, J. Y.-C., Closser, A. H., Lee, J.-E., Shaw, S. T., & Ottmar, E. R. (2024). Perceiving precedence: Order of operations errors are predicted by perception of equivalent expressions. *Journal of Numerical Cognition, 10*, Article e14103. https://doi.org/10.5964/jnc.14103

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*(4), 232–236. https://doi.org/10.5951/TCM.6.4.0232

Fuchs, L. S., Newman-Gonchar, R., Schumacher, R., Dougherty, B., Bucka, N., Karp, K. S., Woodward, J., Clarke, B., Jordan, N. C., Gersten, R., Jayanthi, M., Keating, B., & Morgan, S. (2021). *Assisting students struggling with mathematics: Intervention in the elementary grades* (WWC 2021006). National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. https://ies.ed.gov/ncee/WWC/PracticeGuide/26

Inhelder, B., & Piaget, J. (1964). *The early growth of logic in the child: Classification and seriation*. Routledge & Kegan Paul.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317–326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 297–312. https://doi.org/10.2307/30034852

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173–196. https://doi.org/10.1023/A:1003606308064

Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., & McEldoon, K. L. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology, 103*(1), 85–104. https://doi.org/10.1037/a0021334

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2018). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions* (2nd ed.). Corwin.

LEKSIONI 7 · SHTOJCA A

Shtojca A. Katër plane për orët në auditor

Planet e mëposhtme e zbërthejnë Tabelën 1 në minuta. Ato ndjekin ndarjen në tri shtresa të seksionit 1.3: në auditor paraqiten përkufizimet, pohimet dhe idetë e vërtetimeve, ndërsa vërtetimet e plota, njësitë profesionale dhe detyrat e kapitullit 15 kalojnë në seminar. Kolona e fundit tregon çfarë duhet të ketë prodhuar studenti në fund të çdo faze. Kohët janë orientuese dhe mund të përshtaten me grupin.

A.1 Ora I (Java XIII): veprimet e kryeshme, mbledhja dhe zbritja, kapitujt 2–3

Tabela 12. Ora I (Java XIII): plani në minuta

Minutat	Veprimtaria	Pyetja kryesore	Çfarë prodhon studenti
0–8	Pyetja hyrëse: «5 − 8 nuk bëhet»	Çfarë është e saktë dhe çfarë mungon në fjalinë e mësuesit?	Dallimi ndërmjet bashkësisë dhe veprimit
8–18	$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ dhe veprimi i brendshëm (2.2–2.3)	Cilat veprime janë të brendshme dhe me cilin kundërshembull rrëzohen të tjerat?	Kundërshembuj të saktë
18–32	Mbledhja si numër elementesh; zbritja si veprim i kundërt (3.1–3.3)	Pse diferenca, kur ekziston, është e vetme?	Lidhja e unicitetit me kontrollin me mbledhje
32–41	Rregullat e zbritjes dhe Tabela 2 (3.4)	Cili kusht mungon kur shkruajmë (2 − 3) + 5?	Kushti i shkruar veçmas për secilin identitet
41–45	Bileta e daljes: 72 − 38	Cilin rregull përdor dhe me çfarë kushti?	Rregulli dhe kushti i tij

A.2 Ora II (Java XIII): shumëzimi, pjesëtimi, ekuacionet dhe rendi i veprimeve, kapitujt 4–6

Tabela 13. Ora II (Java XIII): plani në minuta

Minutat	Veprimtaria	Pyetja kryesore	Çfarë prodhon studenti
0–8	Dy përkufizime të shumëzimit; rrjeta (4.1)	Pse 3 × 5 = 5 × 3, ndërsa situatat janë të ndryshme?	Argumenti me rrotullimin e rrjetës
8–16	Pjesëtimi si veprim i kundërt; pjesëtimi me zero (4.3–4.4)	Si ndryshon 5 : 0 nga 0 : 0?	Dy arsye të ndryshme, një kontroll me shumëzim
16–28	Gjashtë trajtat e ekuacionit; modeli i shiritit (5.2)	Te cilat trajta gabon rregulli «bëj veprimin e kundërt»?	Arsyetim me të tërën dhe pjesët
28–40	Rendi i veprimeve (6.1–6.3)	Cila shprehje e dallon leximin nga e majta nga rendi i saktë?	Një shprehje diagnostikuese e hartuar nga studenti
40–45	Vetëkontroll: Tabela 3 plotësohet pa libër	Cilat veti mungojnë te zbritja dhe te pjesëtimi?	Tabelë e plotësuar me argumente

A.3 Ora III (Java XV): relacioni, paraqitjet dhe vetitë, kapitujt 7–9

Tabela 14. Ora III (Java XV): plani në minuta

Minutat	Veprimtaria	Pyetja kryesore	Çfarë prodhon studenti
0–8	Fjali krahasimi nga klasa (7.1)	Çfarë kanë të përbashkët këto fjali?	Dy objekte dhe një lidhje me drejtim
8–16	Çifti i renditur, A × B dhe relacioni binar (7.2–7.3)	Pse (3, 5) ≠ (5, 3), ndërsa {3, 5} = {5, 3}?	Relacioni si nënbashkësi e A × B
16–28	Paraqitjet e relacionit (8.1–8.2)	Çfarë tregon dhe çfarë fsheh secila paraqitje?	Një relacion në katër paraqitje
28–40	Katër vetitë dhe Tabela 6 (9.1–9.2)	Vërtetim apo kundërshembull?	Një arsye për çdo qelizë të tabelës
40–45	Kundërshembulli i ditës	Pse simetria dhe kalimtaria nuk sjellin refleksivitetin?	Relacioni {(1, 1)} në {1, 2}

A.4 Ora IV (Java XV): ekuivalenca, renditja, shenja e barazimit dhe diagnostikimi, kapitujt 10–13

Tabela 15. Ora IV (Java XV): plani në minuta

Minutat	Veprimtaria	Pyetja kryesore	Çfarë prodhon studenti
0–12	Klasifikimi dhe ndarja; numri si klasë (10.1–10.2)	Kur një kriter jep ndarje?	Analiza e një klasifikimi me dy kritere
12–20	Renditja e plotë dhe e pjesshme (11.1–11.2)	Cilët pjesëtues të 12-ës nuk krahasohen?	Diagrami i Hasses
20–33	Shenja e barazimit dhe nivelet e kuptimit (12.1–12.3)	Çfarë tregojnë përgjigjet 12, 17 dhe 7 te 8 + 4 = □ + 5?	Përgjigjet e klasifikuara sipas Tabelës 7
33–42	Modeli diagnostik me pesë hapa (13.1)	Cila pyetje i dallon dy hipotezat?	Një pyetje diagnostikuese me rast të ri
42–45	Reflektim	Cilën fjali të klasës do ta formuloja ndryshe pas kësaj ore?	Një formulim i ri, i shkruar

LEKSIONI 7 · SHTOJCA B

Shtojca B. Varianti B i testit përmbledhës

Ky variant është paralel me testin e seksionit 16.3: mat të njëjtat rezultate të të nxënit, ka të njëjtën kohë (30 minuta) dhe të njëjtin numër pikësh (20). Mund të përdoret për grupin e dytë, për rikuperim ose për vetëkontroll. Vlerësohet vetëm me çelësin e mëposhtëm. Rubrikat e Tabelave 10 dhe 11 mbeten për punën me shkrim dhe për seminarin.

B.1 Detyrat

1) Jepni dy kundërshembuj që tregojnë se zbritja nuk është veprim i brendshëm në $\mathbb{N}_0$. Formuloni për nxënësin e klasës së dytë një fjali që nuk do të jetë e rreme kur ai të mësojë numrat e plotë. (4 pikë; 6 minuta)

2) Vërtetoni vetinë shpërndarëse $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ me produktin kartezian. Pastaj tregoni çfarë nga ky argument i duhet mësuesit dhe si e takon nxënësi të njëjtën ide në klasë. (4 pikë; 7 minuta)

3) Në $A = \{1, 2, 3\}$ jepet $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$. Paraqiteni relacionin me diagram shigjetash dhe me tabelë. Për secilën nga katër vetitë e përkufizimit 9.1 jepni një vërtetim ose një kundërshembull. (6 pikë; 8 minuta)

4) Një nxënës shkruan $8 + 4 = 12 + 5 = 17$. Formuloni dy hipoteza, një pyetje që i dallon, një ndërhyrje të lidhur me hipotezën më të besueshme dhe një detyrë kontrolli në rast të ri. (6 pikë; 9 minuta)

B.2 Çelësi orientues

1) Çdo çift me $b > a$ shërben, për shembull $3 - 5$ dhe $4 - 9$: nuk ka $c \in \mathbb{N}_0$ me $5 + c = 3$, sepse $5 + c \geq 5$ (pohimi 3.2). Fjalia për nxënësin: «Me numrat që dimë tani, nga 3 nuk mund të heqim 5.» Pikët: 1 për secilin kundërshembull me arsye, 2 për fjalinë që e lë derën të hapur (seksioni 2.4).

2) Marrim A, B, C me $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$ dhe $B \cap C = \varnothing$. Atëherë $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, dhe dy pjesët nuk kanë çift të përbashkët, sepse ndryshojnë në vendin e dytë. Sipas (4.2) dhe (3.1) del barazimi. Mësuesit i duhet argumenti; nxënësi e takon si ndarje të rrjetës në dy pjesë, për shembull $6 \times 7 = 6 \times 5 + 6 \times 2$. Pikët: 3 për vërtetimin, 1 për lidhjen me klasën.

3) Refleksiv: po, ka sythe te 1, 2 dhe 3. Simetrik: jo, $(1, 2) \in R$, por $(2, 1) \notin R$. Antisimetrik: po, asnjë çift elementesh të ndryshëm nuk ka shigjeta në të dy drejtimet. Kalimtar: jo, $(1, 2) \in R$ dhe $(2, 3) \in R$, por $(1, 3) \notin R$. Pikët: 2 për dy paraqitjet, 1 për secilën veti me arsye.

4) H1: nxënësi e lexon shenjën si «tani jep rezultatin» dhe shkruan hapat në varg. H2: e njeh kuptimin e shenjës, por e përdor si shkurtim shkrimi. Pyetja dalluese: «A janë njësoj $8 + 4$ dhe 17?» (seksioni 13.3). Nëse nxënësi thotë «po», H1 forcohet; nëse thotë «jo, por po shtoja 5», H2 është më e besueshme. Ndërhyrja: shkrimi në dy barazime, $8 + 4 = 12$ dhe $12 + 5 = 17$, bashkë

me barazime për t'u gjykuar si të vërteta ose të gabuara (seksioni 12.2). Rasti i ri: «Llogarit 9 + 6 dhe pastaj shto 3; shkruaji hapat.» Pikët: 2 për hipotezat, 1 për pyetjen, 2 për ndërhyrjen e lidhur me hipotezën, 1 për rastin e ri.