METODIKA E MATEMATIKËS 3 · LEKSIONI 7 · JAVA XIII DHE JAVA XV

Veprimet në bashkësinë ℕ dhe metodika e relacioneve

Mbledhja dhe zbritja · shumëzimi dhe pjesëtimi · rendi i veprimeve · relacionet, vetitë, ekuivalenca, renditja dhe shenja e barazimit



12 çifte në produkt; relacioni zgjedh 7 prej tyre.

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Formimi fillestar i mësuesve të arsimit fillor · 4 orë akademike, 180 minuta

PARASHIKIM · 4 MIN

Situata të simuluara

Dy mësues, dy korrigjime në fletore

Mësuesi i parë

$$5 - 8 = ?$$

«5 − 8 nuk bëhet.»

Mësuesja e dytë

$$8 + 4 = 12 + 5 = 17$$

E lë pa korrigjuar: «rezultati i fundit është i saktë».

1. Çfarë është e saktë dhe çfarë mungon në secilin korrigjim?
2. Çfarë mund të ndërtojë nxënësi nga këto fjali në vitet që vijnë?

Shkruani përgjigjen. Do t'i rikthehemi pas kapitullit 2 dhe pas kapitullit 12.

Në fund të leksionit studenti justifikon, jo vetëm llogarit

1

Njohuria matematikore

Përkufizon katër veprimet në $\mathbb{N}$ dhe $\mathbb{N}_0$; vërteton vetitë dhe i rrëzon me kundërshembull; vërteton lidhjen ekuivalencë–ndarje.

2

Shpjegimi në arsimin fillor

Formulon fjali që nuk janë të rreme; shpjegon pjesëtimin me zero me kontrollin me shumëzim; kalon ndërmjet paraqitjeve të një relacioni.

3

Mendimi i nxënësit

Analizon kuptimin e shenjës së barazimit; harton detyra që e nxjerrin gabimin në pah; zgjedh ndërhyrjen sipas hipotezës.

Një leksion, dy javë: nga veprimet te relacionet

I · Veprimet e kryeshme; mbledhja dhe zbritja

Java XIII · kap. 2–3 · 45 min

II · Shumëzimi, pjesëtimi, ekuacionet, rendi

Java XIII · kap. 4–6 · 45 min

Struktura e $\mathbb{N}_0$: dy veprime, një renditje dhe relacionet që i lidhin

III · Relacioni, paraqitjet dhe vetitë

Java XV · kap. 7–9 · 45 min

IV · Ekuivalenca, renditja, shenja =, diagnostikimi

Java XV · kap. 10–13 · 45 min

Java XIV: kolokviumi i dytë

ORA I · 45 MINUTA

Veprimet e kryeshme, mbledhja dhe zbritja

Java XIII · minutat 0–45

Në këtë orë

- $\mathbb{N}$ dhe $\mathbb{N}_0$; veprimi i brendshëm
- «Nuk bëhet» apo «nuk bëhet këtu»
- Mbledhja si numër elementesh
- Zbritja si veprim i kundërt
- Rregullat e zbritjes dhe kushtet e tyre

Veprimi është i brendshëm kur rezultati ekziston dhe mbetet në bashkësi

Përkufizimi 2.1. Një veprim në S i shoqëron çdo çifti (a, b), me $a, b \in S$, një element të vetëm të S. Themi se S është e mbyllur ndaj veprimit.

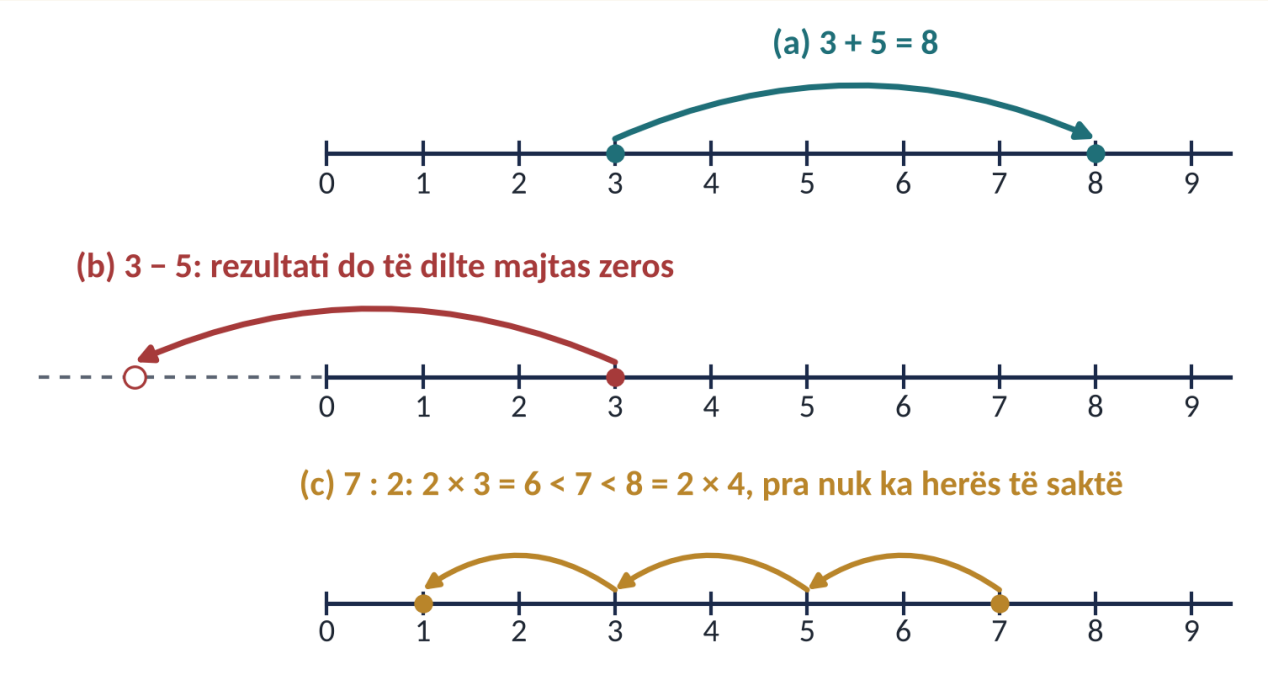
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ $\quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Veprimi	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}_0$	Kundërshembulli
Mbledhja	po	po	—
Shumëzimi	po	po	—
Zbritja	jo	jo	$3 - 5$; në $\mathbb{N}$ edhe $5 - 5$
Pjesëtimi	jo	jo	$7 : 2$; në $\mathbb{N}_0$ edhe $a : 0$

Pohimi 2.1 dhe arsyet

- Shuma dhe prodhimi numërojnë elementet e një bashkësie të fundme.
- $5 + c \geq 5$, prandaj $5 + c = 3$ s'ka zgjidhje.
- Ose $c \leq 3$ dhe $2 \times c \leq 6$, ose $c \geq 4$ dhe $2 \times c \geq 8$: $2 \times c \neq 7$.

«5 − 8 nuk bëhet» është fjali për bashkësinë, jo për veprimin



Shumëzimi me 1 nuk e rrit numrin; shumëzimi me 0 e zvogëlon çdo numër pozitiv.

Fjali me kufi të fshehur

«5 − 8 nuk bëhet kurrë.»

«Shumëzimi e rrit numrin.»

«Pjesëtimi e zvogëlon numrin.»

Fjali që nuk do të jetë e rreme

«Me numrat që dimë tani, nga 5 nuk mund të heqim 8. Më vonë do të mësojmë numra të tjerë.»

NJËSI PROFESIONALE · 4 MIN

Kartolinat dhe termometri: e njëjta zbritje, dy situata

Pyetja diagnostikuese

«A mund të heqësh 8 kartolina nga 5? Po në termometër, a mund të bjerë temperatura 8 gradë nga 5 gradë?»

Përgjigje e mundshme

«Kartolinat jo, se nuk i kam. Termometri po, se shkon nën zero.»

Analiza. Nxënësi dallon sasinë që nuk bëhet negative nga shkalla që vazhdon nën zero.

Nëse thotë «termometri nuk bën»: ose nuk e ka parë temperaturën nën zero, ose ka mësuar «nuk bëhet» si rregull të përgjithshëm. Pyetja dalluese: «Ku e ke parë temperaturën nën zero?»

Kontrolli në rast të ri: «Sa bën 3 − 7?», disa javë pasi fjalia e kushtëzuar është përdorur në klasë.

Mbledhja: numri i elementeve të bashkimit pa element të përbashkët

$$A \cap B = \varnothing,\ |A| = a,\ |B| = b$$
$$a + b = |A \cup B| \qquad (3.1)$$

Kushti «pa element të përbashkët» është thelbësor: 12 nxënës luajnë futboll dhe 9 basketboll nuk do të thotë 21 nxënës.

Nga (3.1): shuma e dy numrave nga $\mathbb{N}_0$ ekziston dhe i përket $\mathbb{N}_0$.

Pohimi 3.1. Për çdo $a, b, c \in \mathbb{N}_0$:

- ndërruese: $a + b = b + a$
- shoqëruese: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- neutrali: $a + 0 = a$
- thjeshtimi: $a + c = b + c \Rightarrow a = b$

(i)–(iii) dalin nga barazime bashkësish. (iv) kërkon lemën 3.1 dhe induksionin; asnjë hap nuk përdor një veti që vjen më pas.

Zbritja: numri që i shtohet zbritësit për të marrë të zbritshmin

Përkufizimi 3.1. Për $a, b \in \mathbb{N}_0$, diferenca $a - b$ është numri $c \in \mathbb{N}_0$ me $b + c = a$, kur ai ekziston.

Pohimi 3.2. $a - b$ ekziston në $\mathbb{N}_0$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $b \le a$, dhe kur ekziston është e vetme.

Vërtetim. Ekzistenca është vetë përkufizimi i $b \le a$ (Leksioni 6). Uniciteti: $b + c = b + c'$ jep $c = c'$, nga vetia ndërruese dhe thjeshtimi. ∎

Në klasë

«Sa mbeten?» dhe «sa duhen?» i përgjigjen të njëjtit përkufizim.

Uniciteti e bën të mundur kontrollin me mbledhje: 24 + 19 = 43.

Tri rregulla të zbritjes, secila me kushtin e vet

$(10 - 4) - 3 = 3$, $10 - (4 - 3) = 9$: zbritja nuk është shoqëruese.

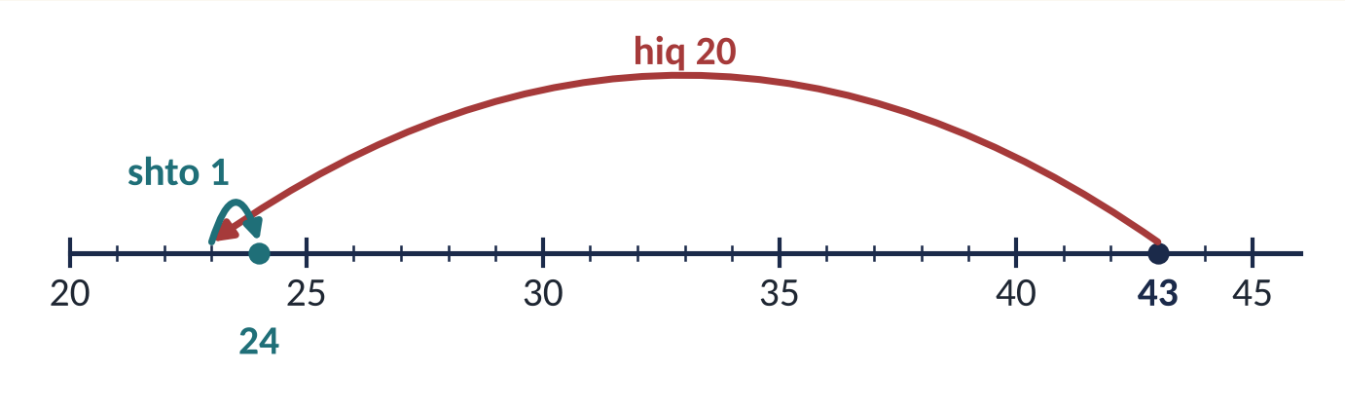
Rregulli	Kushti në $\mathbb{N}_0$	Zbatimi mekanik që e prish
(i) $(a - b) - c = a - (b + c)$	$b + c \le a$	10 − (4 + 3) = 3, jo 10 − 4 + 3 = 9
(ii) $a - (b - c) = (a - b) + c$	$c \le b \le a$	43 − (20 − 1) = 24, jo 43 − 20 − 1 = 22
(iii) $(a + b) - c = (a - c) + b$	$c \le a$	(2 + 5) − 3: 2 − 3 nuk ekziston; përdoret 2 + (5 − 3)

(i) është zbritja me pjesë: 43 − 18 = 43 − 10 − 8. (ii) është kompensimi: 43 − 19 = 43 − 20 + 1.

Kushtet shkruhen veçmas, sepse nuk janë të njëjta: te (ii), për $a = 3$, $b = 5$, $c = 4$, ana e majtë ekziston (3 − 1 = 2), ana e djathtë jo.

Punë e simuluar e nxënësit

Genti: 43 − 19 = 43 − 20 − 1 = 22



Dy hipoteza

H1: «ndrysho numrin dhe rregulloje», pa drejtim.

H2: vetia shoqëruese e mbledhjes, e zbatuar te zbritja.

1. Hartoni një pyetje që i dallon H1 dhe H2.
2. Çfarë do të tregonte përgjigjja «ka hequr 21, duhej 19»?
3. Propozoni kontrollin në rast të ri.

BILETË · 4 MIN

Bileta e Orës I

1. Shpjegoni $72 - 38 = 72 - 40 + 2$ me pohimin 3.3. Cili rregull dhe me çfarë kushti?
2. Pse $7 : 2$ tregon se pjesëtimi nuk është veprim i brendshëm në $\mathbb{N}$?
3. Riformuloni për klasën e dytë: «Numri i vogël nuk zbritet nga i madhi.»

Përgjigjet krahasohen në fillim të Orës II.

ORA II · 45 MINUTA

Shumëzimi, pjesëtimi, ekuacionet dhe rendi i veprimeve

Java XIII · minutat 45–90

Në këtë orë

- Dy përkufizime të shumëzimit
- Pjesëtimi si veprim i kundërt
- Pse nuk pjesëtojmë me zero
- Katër veprimet si sistem
- Rendi i veprimeve

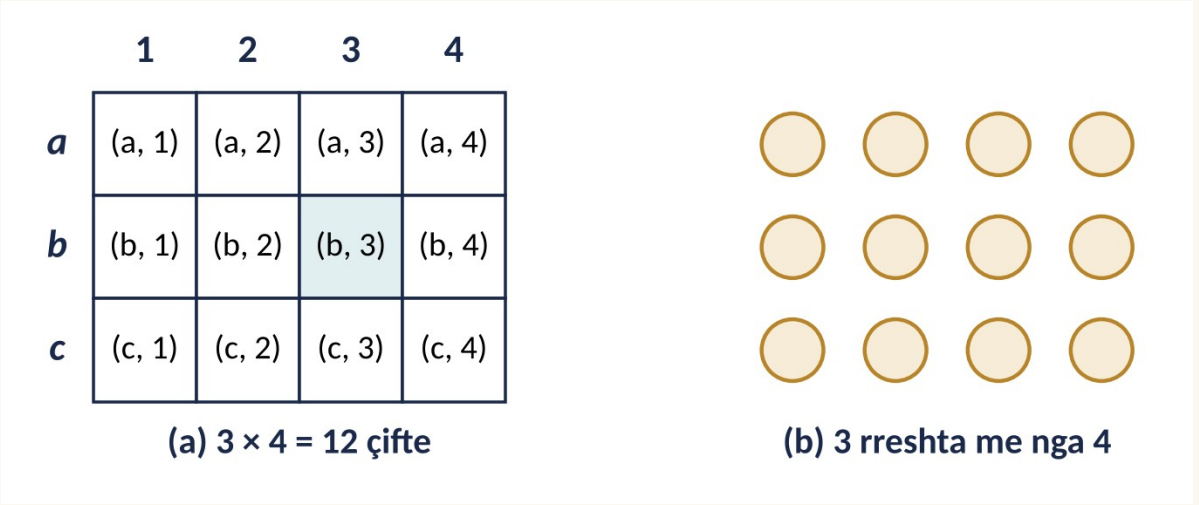
Shumëzimi: grupe të barabarta dhe numër çiftesh

$$0 \times n = 0, \quad (m+1) \times n = m \times n + n \qquad (4.1)$$

$$|A| = m, |B| = n: \quad m \times n = |A \times B| \qquad (4.2)$$

(4.1) e përcakton prodhimin hap pas hapi, por nuk tregon pse $3 \times 5 = 5 \times 3$.

(4.2): 3 bluza dhe 4 pantallona japin 3×4 veshje, sepse çdo veshje është një çift.



Vetitë e shumëzimit dalin nga numërimi i çifteve

Pohimi 4.1. Për $a, b, c \in \mathbb{N}_0$:

- ndërruese: $(x, y) \mapsto (y, x)$
- shoqëruese: $((x, y), z) \mapsto (x, (y, z))$
- $1 \times a = a$, nga (4.1)
- shpërndarëse: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $a \times b = 0 \iff a = 0$ ose $b = 0$
- thjeshtimi: $a \times c = b \times c, c \neq 0 \Rightarrow a = b$

Marrëveshja dhe vetia

Në klasë $m \times n$ do të thotë m grupe me nga n. Marrëveshja i përket situatës; vetia ndërruese i përket numrit.

Vetia shpërndarëse qëndron pas çdo strategjie me gojë dhe pas algoritmit me shkrim (Leksionet 5 dhe 6).

Thjeshtimi është çelësi i unicitetit të herësit.

Pjesëtimi: numri me të cilin shumëzohet pjesëtuesi

Përkufizimi 4.2. Për $a, b \in \mathbb{N}_0$, $b \neq 0$, herësi $a : b$ është numri $c \in \mathbb{N}_0$ me $b \times c = a$, kur ai ekziston. Shkruajmë $b \mid a$.

Uniciteti

Del nga thjeshtimi: $b \times c = b \times c'$ dhe $b \neq 0$ japin $c = c'$.

Ekzistenca

Teorema e pjesëtimit me mbetje (Java XI): $a = b \times q + r$, $0 \leq r < b$. Herësi i saktë ekziston kur $r = 0$.

Dy kuptime

Ndarje: $3 \times ? = 12$, tri grupe me sa? Matje: $? \times 3 = 12$, sa grupe me nga tre? Të dy i përgjigjen përkufizimit.

Pjesëtimi me zero: dy arsye të ndryshme, jo një

Pohimi 4.2. Nuk ka numër të vetëm c me $0 \times c = a$: për $a \neq 0$ nuk ka asnjë, për $a = 0$ e plotëson çdo numër.

$5 : 0$

$0 \times ? = 5$

Asnjë numër: $0 \times c = 0 \neq 5$.

$0 : 0$

$0 \times ? = 0$

Çdo numër: asnjë mënyrë natyrore për të zgjedhur njërin.

$0 : 5$

$5 \times ? = 0$

Vetëm 0: krejt në rregull, $0 : 5 = 0$.

Nuk është ndalim i vendosur nga dikush; është pasojë e faktit që pjesëtimi është veprimi i kundërt i shumëzimit.

NJËSI PROFESIONALE · 4 MIN

Punë e simuluar e nxënësit

Arbi: 6 : 0 = 0

Situata me matje

«Kam 6 mollë dhe i vendos në qese me nga 2. Sa qese mbush? Po me nga 1? Po me nga 0?»

Pyetja diagnostikuese

«Si mund ta kontrollojmë pjesëtimin me shumëzim? A del?»

Përgjigje e mundshme: «Duhet 0 × 0 të bëjë 6, por bën 0. Asnjë numër nuk del.»

Dy burime të gabimit: ngatërrimi me 6 × 0 = 0, ose «nuk kam me çfarë të ndaj, pra s'ka asgjë». Përgjigjja 6 : 0 = 6 vjen nga «nuk i ndava, më mbeten 6».

Ndërhyrja: kontrolli me shumëzim, i njëjti që nxënësi përdor për çdo pjesëtim; rasti nuk paraqitet si përjashtim për t'u mësuar përmendsh.

Rasti i ri: «Sa bën 0 : 7? Sa bën 7 : 0? Pse përgjigjet nuk janë të njëjta?»

Pjesëtimi shpërndahet nga e djathta, jo nga e majta

Pohimi 4.3. Për $c \neq 0$:

- $b \times c \mid a$: $(a : b) : c = a : (b \times c)$
- $c \mid a, c \mid b$: $(a + b) : c = a : c + b : c$
- $c \mid a$: $(a \times b) : c = (a : c) \times b$

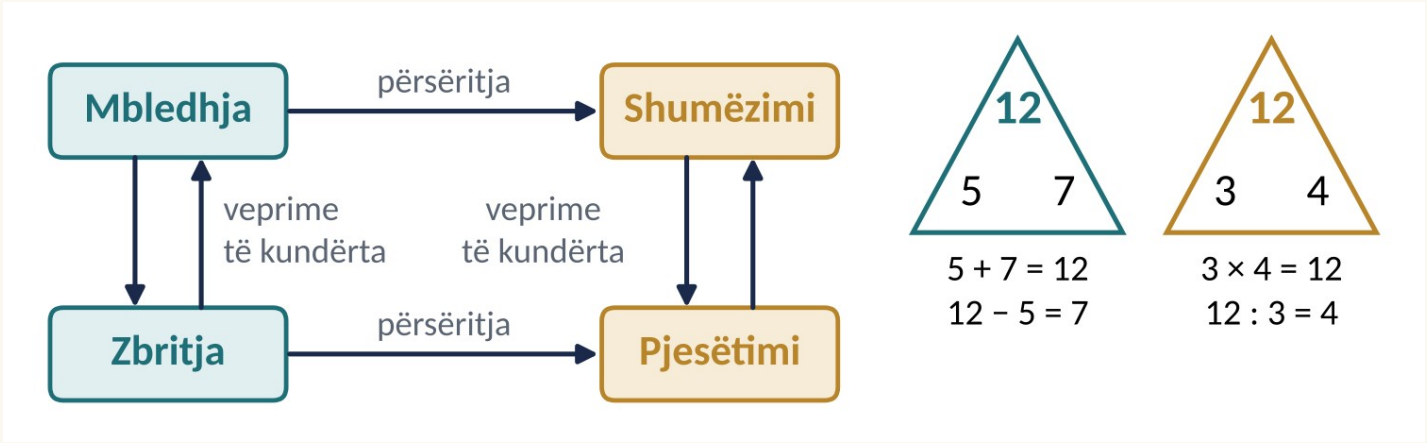
$$(12 + 6) : 3 = 4 + 2 \quad \surd$$

$$12 : (2 + 4) = 2 \neq 6 + 3$$

Drejtimi i vetisë: $4 \mid (3 + 5)$, por 4 nuk pjesëton as 3, as 5.

Strategjia $52 : 4 = 40 : 4 + 12 : 4 = 13$ vlen vetëm kur zbërthimi bëhet në numra të pjesëtueshëm me 4.

Katër veprimet: dy veprime dhe dy veprime të kundërta



Vetia	+	−	×	:
I brendshëm	po	jo	po	jo
Ndërrues	po	jo	po	jo
Shoqërues	po	jo	po	jo
Neutrali	0	0 dj.	1	1 dj.

Një barazim jep një familje: nga $3 \times 4 = 12$ dalin $4 \times 3 = 12$, $12 : 3 = 4$ dhe $12 : 4 = 3$.

Nxënësi që njeh 3×4 nuk ka nevojë ta mësojë veçmas $12 : 4$.

«dj.» = vetëm nga e djathta: $7 - 0 = 7$, por $0 - 7$ nuk është 7.

Gjashtë trajta të ekuacionit; dy prej tyre janë kurthe

Trajta	I panjohuri	Zgjidhja	Shembull
$x + a = b$	mbledhori	$b - a$	$x + 7 = 12$
$x - a = b$	i zbritshmi	$b + a$	$x - 7 = 5$
$a - x = b$	zbritësi	$a - b$	$12 - x = 5$
$a \times x = b$	faktori	$b : a$	$3 \times x = 12$
$x : a = b$	i pjesëtueshmi	$b \times a$	$x : 3 = 4$
$a : x = b$	pjesëtuesi	$a : b$	$12 : x = 4$

Rregulli «bëj veprimin e kundërt»

funksionon te $x + 7 = 12$,

gabon te $12 - x = 5$ (zgjidhet përsëri me zbritje),

gabon te $12 : x = 4$.

Ajo që funksionon: marrëdhënia e të tërës me pjesët, në modelin e shiritit.

Rendi i veprimeve është marrëveshje, por jo e rastësishme

$$2 + (3 \times 4) = 14 \qquad (2 + 3) \times 4 = 20$$

Marrëveshja 6.1. Pa kllapa, shumëzimi dhe pjesëtimi kryhen para mbledhjes dhe zbritjes; veprimet me të njëjtën përparësi kryhen nga e majta në të djathtë; kllapat kanë përparësi ndaj të gjithave.



Pse shumëzimi i pari?

4 708 = 4 × 1 000 + 7 × 100 + 0 × 10 + 8 shkruhet pa kllapa, sepse çdo prodhim është një «grup».

«2 lapsa dhe 3 pako me nga 4»: 3 × 4 është emri i një sasie.

ANALIZË GABIMI · 6 MIN

Punë e simuluar e nxënësit

Liri: 2 + 3 × 4 = 20

Dy tregime

A: «2 lapsa dhe 3 pako me nga 4».

B: «2 lapsa të kuq e 3 blu në çdo pako, 4 pako».

Për cilin tregim vlen 20?

«Shumëzim, pjesëtim, mbledhje, zbritje»

24 : 4 × 2 jep 3, jo 12.

10 − 3 + 2 jep 5, jo 9.

Dy çifte, secili me përparësinë e vet.

Detyra diagnostikuese duhet të dallojë: 5 + 2 × 3 e dallon leximin nga e majta; 5 × 2 + 3 jo, sepse leximi nga e majta jep rezultatin e saktë.

Bye et al. (2024): gabimet në rendin e veprimeve janë më të shpeshta kur veprimi më i majtë nuk mund të kryhet i pari.

Ndërhyrja: nxënësi vë në qark çdo prodhim dhe e lexon si një sasi. **Rasti i ri:** 20 − 2 × 5 dhe (20 − 2) × 5.

ORA III · 45 MINUTA

Relacioni, paraqitjet dhe vetitë

Java XV · minutat 90–135

Në këtë orë

- Çifti i renditur dhe A × B
- Relacioni binar dhe relacioni i kundërt
- Pesë paraqitje të një relacioni
- Rregulli i fshehtë
- Katër vetitë në diagram

Nxënësi flet me relacione çdo ditë, pa e thënë fjalën

«Besa është më e gjatë se Ana.»

«Unë kam aq kartolina sa ti.»

«7 është më i madh se 5.»

«Ky është shoku im.»

«Kjo kuti është e njëjtë me atë.»

Në secilën fjali: **dy objekte** dhe **një lidhje**, për të cilën pyesim: vlen apo nuk vlen?

«Njohje» në titullin e programit: në arsimin fillor relacioni nuk përkufizohet. Nxënësi krahason, klasifikon dhe rendit; mësuesi duhet ta njohë konceptin plotësisht.

Relacioni ka drejtim: çifti i renditur dhe A × B

Përkufizimi 7.1. $(a, b) = (c, d)$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $a = c$ dhe $b = d$.

$$(3, 5) \neq (5, 3)$$
$$\{3, 5\} = \{5, 3\}$$

$$A = \{1, 2\},\ B = \{a\}$$
$$A \times B = \{(1, a), (2, a)\} \neq B \times A$$

Në shkollë çifti duket te loja me rrjetë ose te harta: «rreshti 3, kolona 5».

Prodhimi i numrave është ndërrues; produkti i bashkësive nuk është, edhe pse $|A \times B| = |B \times A|$.

Relacioni është një bashkësi çiftesh

Përkufizimi 7.2. Një relacion nga A në B është çdo $R \subseteq A \times B$. Kur $(x, y) \in R$ shkruajmë $x\,R\,y$. Kur $A = B$, R është relacion në A.

$A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{4, 6, 8, 9\}$, «x është pjesëtues i y»:

$R = \{(2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8)\}$

12 çifte në $A \times B$; R zgjedh 7.

Në $\{1, 2, 3\}$: «$x + y = 3$» dhe «$x \times y = 2$» janë **i njëjti relacion**: $\{(1, 2), (2, 1)\}$.

Në $\mathbb{N}_0$ jo: (0, 3) i përket vetëm të parit.

Funksioni është relacion me një kusht: çdo element i nisjes ka një shok të vetëm. Mbledhja: $((a, b), c)$ me $a + b = c$. «Pjesëtues i» nuk është funksion: 2 ka tre shokë.

Relacioni i kundërt nuk është mohimi i relacionit

Përkufizimi 7.3. $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$, relacion nga B në A.

Relacioni	I kundërti	Mohimi
më i madh se	më i vogël se	më i vogël ose i barabartë
është dyfishi i	është gjysma e	nuk është dyfishi i
ka 3 më shumë se	ka 3 më pak se	nuk ka 3 më shumë se

Te problemet e krahasimit (Leksionet 2 dhe 4): «Ana ka 3 më shumë se Besa» dhe «Besa ka 3 më pak se Ana» thonë të njëjtën gjë.

Teuta lexon shigjetën

8 → 4, «është dyfishi i».

Teuta: «4 është dyfishi i 8».

Kontroll: «Dyfishi i 8 është 16. Shigjeta lexohet nga 8.»

Ndërhyrja: «___ është dyfishi i ___».

Pesë mënyra për të thënë të njëjtën gjë

Lista e çifteve

(2, 4)

(2, 6)

(2, 8)

(3, 6)

Diagrami i shigjetave

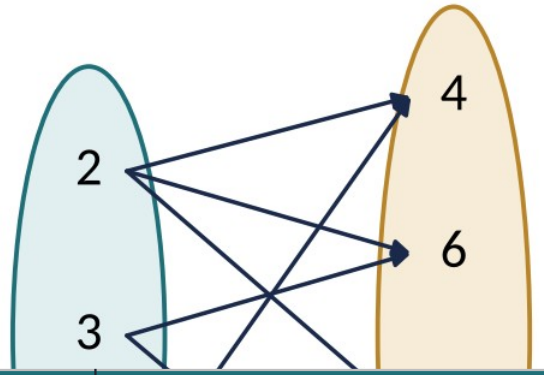
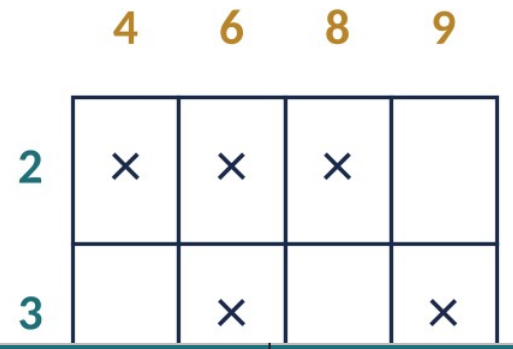
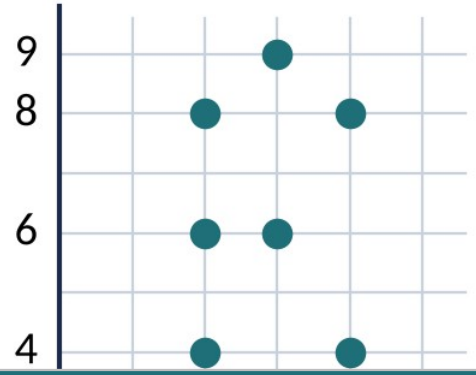


Tabela me kryqe



Rrjeta



Paraqitja	Tregon mirë	Fsheh
Fjalia	kuptimin dhe rregullin	sa çifte ka, kush mbetet pa shok
Diagrami i shigjetave	drejtimin, numrin e shokëve	bëhet i ngjeshur me shumë çifte
Tabela me kryqe	kontrollin e plotësisë	drejtimin, nëse nuk lexohet me kujdes

PARASHIKIM · 2 MIN

Rregulli i fshehtë: disa çifte nuk e përcaktojnë rregullin

Mësuesi jep vetëm (2, 4).

- dyfishi: 2 × 2
- shto 2: 2 + 2
- vetvetja herë vetvetja: 2 × 2

(3, 6) përjashton dy të fundit.

Dea, te makina me 1 → 3, 2 → 5, 3 → 7:

«Rregulli është shto 2.»

Pyetja: «Çfarë hyn kur del 5? Sa i shtohet?»

Nxënësi tjetër: «Hyn 2, del 5. I shtohen 3, jo 2.»

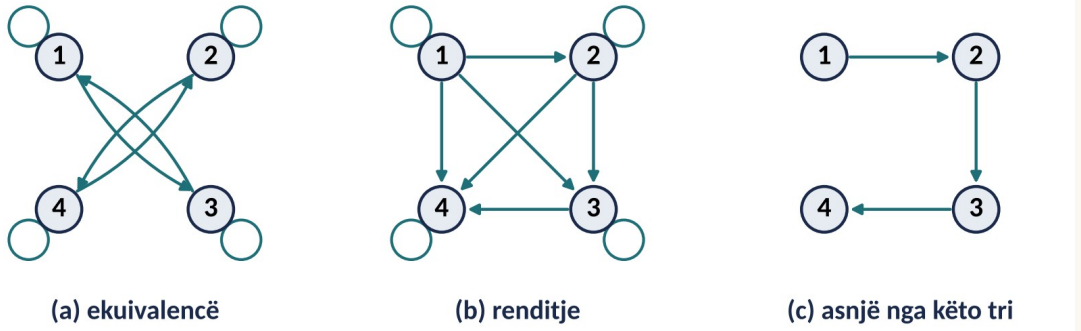
Dea lexon kolonën vertikalisht; rregulli lidh hyrjen me daljen, horizontalisht.

Ndërhyrja: hyrje të përziera (5, 2, 7, 1) dhe pyetje për 10, pa tabelë. Fjalia e saktë e nxënësit: «rregulli im përputhet me të gjitha çiftet që kemi».

Katër vetitë lexohen drejtpërdrejt në diagram

Përkufizimi 9.1. R në A është:

- refleksiv: $a\ R\ a$ për çdo a
- simetrik: $a\ R\ b \Rightarrow b\ R\ a$
- antisimetrik: $a\ R\ b$ dhe $b\ R\ a \Rightarrow a = b$
- kalimtar: $a\ R\ b$ dhe $b\ R\ c \Rightarrow a\ R\ c$



(a) ekuivalencë (b) renditje (c) asnjë nga këto tri

Vetia	Në diagram
refleksiv	sythe në çdo element
simetrik	çdo shigjetë ka kthimin
kalimtar	çdo rrugë me dy hapa ka shkurtore

Relacioni bosh është simetrik, antisimetrik dhe kalimtar: kushti «nëse…» nuk plotësohet kurrë.

Nuk është refleksiv, nëse $A \neq \varnothing$: mjafton një element pa sythe.

PUNË NË ÇIFTE · 6 MIN

Vërtetim apo kundërshembull: plotësoni tabelën

Relacioni	Refl.	Sim.	Antisim.	Kal.
$a = b$ në $\mathbb{N}_0$	po	po	po	po
$a \le b$ në $\mathbb{N}_0$	po	jo	po	po
$a < b$ në $\mathbb{N}_0$	jo	jo	po	po
$a \neq b$ në $\mathbb{N}_0$	?	?	?	?
$a \mid b$ në $\mathbb{N}$	?	?	?	?
e njëjta mbetje me 3, në $\mathbb{N}_0$	?	?	?	?
$a + b$ tek, në $\mathbb{N}$	?	?	?	?
«është shok me»	?	?	?	?

Rregulli i lojës

Për çdo «po»: një argument.

Për çdo «jo»: një kundërshembull konkret.

Rreshtat e plotësuar janë model.

Dy kurthe të arsyetimit për vetitë

Antisimetria nuk është e kundërta e simetrisë

$a = b$ i ka të dyja.

Në $\{1, 2, 3\}$, $\{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$ nuk ka asnjërën.

Pohimi 9.1. Nëse R është simetrik dhe antisimetrik, atëherë $a\ R\ b \Rightarrow a = b$: të vetmet shigjeta janë sythe.

«Simetria dhe kalimtaria japin refleksivitetin»

«$a\ R\ b \Rightarrow b\ R\ a$, pastaj $a\ R\ a$.»

Në $\{1, 2\}$, $R = \{(1, 1)\}$ është simetrik dhe kalimtar, por 2 nuk është në relacion me vete.

Arsyetimi supozon se çdo element ka të paktën një shok.

NJËSI PROFESIONALE · 4 MIN

Kalimtaria: krahasimi pa e parë

Tri shirita prapa kartonit

E kuqja > bluja, bluja > e gjelbra.

«Cila është më e gjatë, e kuqja apo e gjelbra? Si e di?»

Dy përgjigje

«Nuk e di, nuk i kam parë bashkë.»

«E kuqja, sepse është më e gjatë se bluja, dhe bluja më e gjatë se e gjelbra.»

Përgjigjja e parë nuk është domosdoshmërisht gabim: mund të jetë qëndrim i kujdesshëm. Pyetja: «Nëse e kuqja del më e shkurtër se e gjelbra, çfarë do të thoshte kjo për blunë?»

Kalimtaria qëndron pas matjes: litari është objekti i tretë. Gur–letër–gërshërë: relacioni «mund» nuk është kalimtar.

ORA IV · 45 MINUTA

Ekuivalenca, renditja, shenja e barazimit dhe diagnostikimi

Java XV · minutat 135–180

Në këtë orë

- Ekuivalenca dhe ndarja
- Numri si klasë
- Renditja e plotë dhe e pjesshme
- Shenja e barazimit si relacion
- Modeli diagnostik, sinteza, bileta

Klasifikimi dhe relacioni i ekuivalencës janë e njëjta gjë

Ekuivalencë: refleksiv, simetrik, kalimtar. Klasa: $[a] = \{x \in A : x\ R\ a\}$.

Ndarje: pjesë joboshe; çdo element në një dhe vetëm një pjesë.

Pohimi 10.1. Klasat formojnë ndarje; çdo ndarje jep një ekuivalencë.

Thelbi i vërtetimit: $c \in [a] \cap [b] \Rightarrow a\ R\ c$ dhe $c\ R\ b \Rightarrow a\ R\ b \Rightarrow [a] = [b]$.

Dy klasa ose përputhen, ose janë të ndara.



Një kriter i mirë klasifikimi e vendos çdo objekt në një grup dhe vetëm një.

Nëse një kartelë shkon në dy grupe ose në asnjë, kriteri nuk është ekuivalencë.

Numri si klasë: tri gjëra që gjuha i shkrin në një

Bashkësia konkrete

A = {Ana, Besa}: një objekt, me elemente të caktuara.

Kardinaliteti

$|A|$ = 2: përgjigjja e pyetjes «sa elemente ka?».

Klasa e ekuivalencës

$[A]$ = $\{B \in F : B$ ka aq elemente sa $A\}$, brenda një familjeje të fiksuar F.

$|A| = |B|$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $[A] = [B]$. Çfarë kanë të përbashkët dy dele, dy gurë dhe dy sy? Numrin 2.

Në klasë nuk themi «2 është bashkësia e të gjitha çifteve». Themi «këtu ka dy» dhe krahasojmë me përputhje një për një.

NJËSI PROFESIONALE · 4 MIN

Punë e simuluar e nxënësit

Sara: trekëndëshat këtu, të kuqet aty

Pyetja diagnostikuese

«Ku do ta vendosë trekëndëshin e kuq? Ku do ta vendosë rrethin blu?»

Dy përgjigje

«Trekëndëshin e kuq mund ta vë te të dyja. Rrethi blu nuk shkon askund.»

«E vë te të kuqet, se e pashë ngjyrën të parën.»

	i kuq	blu	i verdhë
trekëndësh	■		
rreth		■	
katror			

Ndërhyrja: tabela me dy hyrje, forma në rreshta dhe ngjyra në kolona; çdo kartelë ka një kuti të vetme.

Kjo është një ndarje sipas çiftit (forma, ngjyra): klasifikimi lidhet me produktin kartezian.

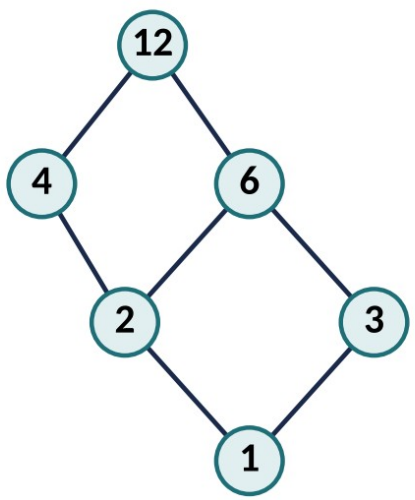
Renditja: e plotë te ≤, e pjesshme te pjesëtueshmëria

Renditje: refleksiv, antisimetrik, kalimtar. **E plotë:** çdo dy elemente krahasohen.

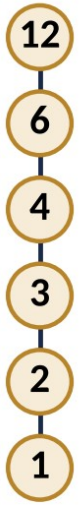
≤ në $\mathbb{N}_0$: renditje e plotë (Leksioni 6, pohimi 9.1). < është renditje e rreptë.

Pohimi 11.1. $a \mid b$ është renditje në $\mathbb{N}$, jo e plotë: as 2 | 3, as 3 | 2.

Antisimetria: $a \times 1 = a \times (m \times n) \Rightarrow m \times n = 1 \Rightarrow m = n = 1$.



(a) 4 dhe 6 nuk krahasohen



(b) varg i vetëm

Diagrami i Hasses: pa sythe dhe pa shigjetat që dalin nga kalimtaria. 4 dhe 6 nuk krahasohen.

Renditja në varg: kalimtaria kursen krahasime

Pohimi 11.2. Çdo bashkësi e fundme joboshe me renditje të plotë ka një element më të vogël dhe shkruhet si varg $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

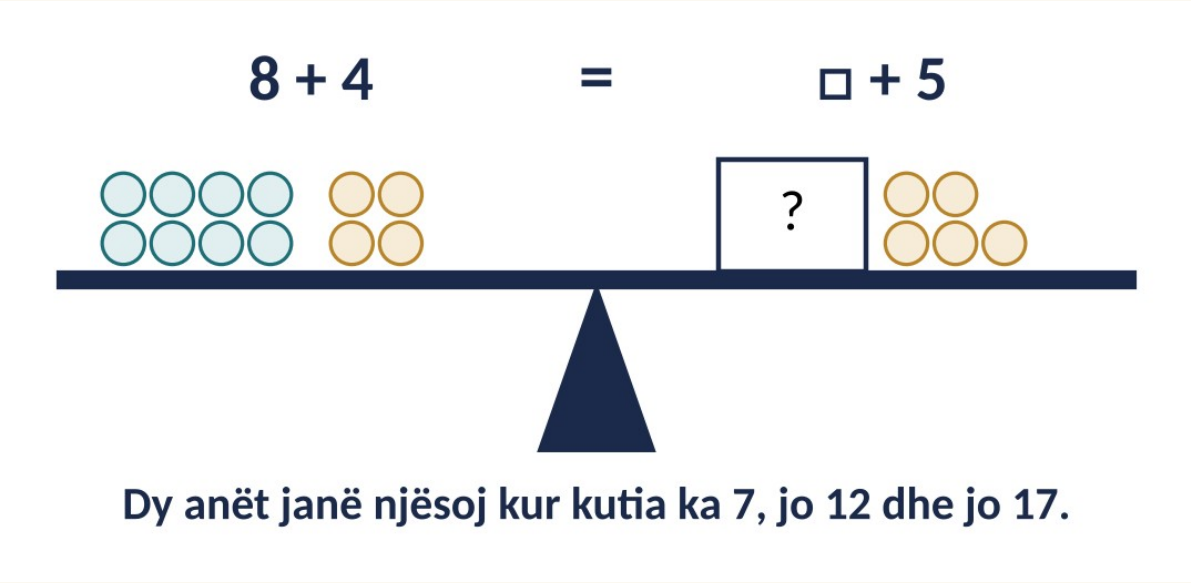
n	Çifte: $n \times (n-1) : 2$	Krahasime fqinjësh
4	6	3
5	10	4
7	21	6

Vërtetimi është vetë një algoritëm: gjej më të voglin, vëre në krye, përsërit.

Shkopinjtë: «E krahasoj me atë në mes. Nëse është më i gjatë, nuk më duhen më të shkurtrit.» Ky nxënës e përdor kalimtarinë plotësisht.

PARASHIKIM · 4 MIN

8 + 4 = □ + 5: çfarë shkruajnë nxënësit?



Dy anët janë njësoj kur kutia ka 7, jo 12 dhe jo 17.

Parashikoni para se ta shihni:

Çfarë përqindjeje e nxënësve të klasave I–VI shkruajnë 7?

Cilat janë dy përgjigjet e tjera më të shpeshta?

Falkner et al. (1999): shumica nuk dhanë 7, por **12** (rezultati i së majtës) ose **17** (shuma e të gjithë numrave).

Kieran (1981): shenja si urdhër, «tani llogarit».

Katër nivele të kuptimit të shenjës së barazimit

Niveli	Çfarë pranon nxënësi	Detyrë që e provon
Veprimor i ngurtë	vetëm 5 + 3 = 8	Sa bën 5 + 3?
Veprimor i përkulshëm	edhe 8 = 5 + 3 dhe 8 = 8	Vërtetë apo gabim: 8 = 5 + 3?
Relacional bazë	veprime në të dy anët: 5 + 3 = 6 + 2	Plotëso: 5 + 3 = □ + 2
Relacional krahasues	krahason pa llogaritur	Pa llogaritur: 27 + 15 = 26 + 16?

Carpenter et al. (2003): barazime **vërtetë / gabim** dhe barazime **të hapura**. Nuk kërkojnë kohë të veçantë: mjafton që një pjesë e ushtrimeve të përditshme të mos jenë të trajtës $a + b = \square$.

8 + 4 = 12 + 5 = 17: rezultati është i saktë, fjalia është e rreme

Mësuesja: «Lexoje pjesën e parë: sa është 8 + 4?»

Nxënësi: «12.»

Mësuesja: «Pas shenjës së parë, deri te e dyta, çfarë ke shkruar?» — «12 + 5.» — «Sa bën?» — «17.»

Mësuesja: «Shenja midis tyre thotë se janë njësoj. A janë njësoj 12 dhe 17?»

Nxënësi: «Jo. Por unë po shtoja pesëshin.»

Mësuesja: «E di. Si mund ta shkruash që të duket se ke bërë dy hapa?»

$$8 + 4 = 12 + 5 = 17$$

sipas kalimtarisë: $8 + 4 = 17$

$$8 + 4 = 12, \quad 12 + 5 = 17$$

po aq e shkurtër, dhe e vërtetë

Modeli diagnostik në pesë hapa

1 · Çfarë shkroi
fjala ose shkrimi i nxënësit, pa e zëvendësuar

2 · Dy hipoteza
të paktën dy shpjegime të mundshme

3 · Pyetja dalluese
pyetje ose detyrë që i dallon

4 · Ndërhyrja
e lidhur me hipotezën më të besueshme

5 · Rasti i ri
kontroll me strukturë të ngjashme

Vështirësia e kësaj teme: gabimet te relacionet shpesh nuk lënë gjurmë në rezultat.

5 × 2 + 3 = 13 duke lexuar nga e majta jep përgjigje të saktë; 8 + 4 = 12 + 5 = 17 ka rezultatin e fundit të saktë.

Prandaj detyra ndërtohet ashtu që kuptimi i gabuar të dalë në pah. Ndërhyrja ndryshon llojin e detyrës, jo vetëm numrin e ushtrimeve.

Sinteza: një strukturë, dy javë

Java XIII

- Mbledhja dhe shumëzimi janë të brendshme; zbritja dhe pjesëtimi jo: «nuk bëhet» është fjali për bashkësinë.
- Vetitë dalin nga bashkësitë e fundme; rregullat e zbritjes dhe pjesëtimit nga përkufizimi si veprime të kundërta.
- Pjesëtimi me zero nuk përcakton një numër të vetëm.
- Rendi i veprimeve është marrëveshje e mbështetur te struktura.

Java XV

- Relacioni është një bashkësi çiftesh të renditura, me disa paraqitje.
- Ekuivalenca = klasifikimi; renditja = renditja në varg.
- Shenja e barazimit është vetë një relacion ekuivalence.
- Kompetenca e mësuesit duket kur i sheh këto lidhje në një fjali të nxënësit.

BILETË · 4 MIN

Bileta e daljes

1. Në {1, 2, 3} jepet R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)}. Cilat nga katër vetitë ka? Për çdo «jo», një kundërshembull.

2. Një nxënës shkruan 6 + 5 = □ + 4, □ = 11. Formuloni një hipotezë dhe një pyetje që e provon.

3. Pse ndarja e numrave 1–12 në «çift» dhe «më të mëdhenj se 6» nuk është ndarje?

Pas leksionit

- Hartoni një fletë diagnostike me 6 barazime që dallon katër nivelet e Tabelës 7.
- Analizë 500–700 fjalë për $2 + 3 \times 4 = 20$: dy hipoteza, dy pyetje, një model vizual, kontrolli në rast të ri.
- Mikromësimdhënie 10-minutëshe për klasifikimin me dy kritere.
- Tri fjali nga një tekst shkollor që janë të vërteta vetëm në $\mathbb{N}_0$, të riformuluara.
- Seminari: vërtetimet e plota, njësitë profesionale, detyrat 15.1–15.6. Studim individual: 15.7, banka e problemeve, testi.

A1 · Lema 3.1 dhe vetia e thjeshtimit të mbledhjes

Lema 3.1. $x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y$.

Marrim X, Y me $|X| = x$, $|Y| = y$, $p \notin X$, $q \notin Y$, dhe një përputhje një për një $f : X \cup \{p\} \to Y \cup \{q\}$. Nëse $f(p) = q$, kufizimi i f në X është përputhje. Përndryshe $f(p) = y_0 \in Y$ dhe $q = f(x_0)$, $x_0 \in X$; përkufizojmë $g(x_0) = y_0$, $g(t) = f(t)$ për $t \neq x_0$. g është përputhje nga X te Y. ∎

Thjeshtimi. Induksion sipas c. Për $c = 0$ nga neutrali. Nëse vlen për c: $a + (c + 1) = b + (c + 1)$ jep $(a + c) + 1 = (b + c) + 1$ (shoqëruesja), lema jep $a + c = b + c$, hipoteza jep $a = b$. ∎

A2 · Rregullat e zbritjes nga përkufizimi

Për të treguar $x - y = d$ mjafton $y + d = x$ (përkufizimi 3.1).

(i) $b + c \le a$: $d = a - (b + c)$, $(b + c) + d = a \Rightarrow b + (c + d) = a \Rightarrow a - b = c + d \Rightarrow (a - b) - c = d$.

(ii) $c \le b \le a$: $(b - c) + ((a - b) + c) = ((b - c) + c) + (a - b) = b + (a - b) = a$.

(iii) $c \le a$: $c + ((a - c) + b) = (c + (a - c)) + b = a + b$. ∎

Kundërshembuj ndaj zbatimit mekanik: te (ii) $a = 3$, $b = 5$, $c = 4$; te (iii) $a = 2$, $b = 5$, $c = 3$.

A3 · Thjeshtimi i shumëzimit dhe vetitë e pjesëtimit

4.1 (v). $a = 0$ ose $b = 0 \Rightarrow A \times B = \varnothing$. Nëse $x \in A$, $y \in B$, atëherë $(x, y) \in A \times B \neq \varnothing$.

4.1 (vi). $c \neq 0$, $a \times c = b \times c$, $a \neq b$. Renditja është e plotë: $a < b$, $b = a + d$, $d \geq 1$. Atëherë $b \times c = a \times c + d \times c$, prandaj $d \times c = 0$, në kundërshtim me (v). ∎

4.3 (i). $(b \times c) \times d = a \Rightarrow b \times (c \times d) = a \Rightarrow a : b = c \times d \Rightarrow (a : b) : c = d.$

4.3 (ii). $c \times (a : c + b : c) = a + b.$ **(iii).** $c \times ((a : c) \times b) = (c \times (a : c)) \times b = a \times b.$ ∎

A4 · Ekuivalenca dhe ndarja; renditja në varg

10.1 (i). $a \in [a]$. Nëse $c \in [a] \cap [b]$, atëherë $c\ R\ a$, $c\ R\ b$; simetria jep $a\ R\ c$, kalimtaria $a\ R\ b$. Për $x \in [a]$: $x\ R\ a$ dhe $a\ R\ b \Rightarrow x \in [b]$; njësoj $[b] \subseteq [a]$.

10.1 (ii). «në të njëjtën pjesë» është refleksiv, simetrik dhe kalimtar, sepse çdo element është në një pjesë të vetme. ∎

11.2. Induksion sipas n. Heqim x; të tjerët kanë më të voglin m. Nëse $x < m$, x është më i vogli (kalimtaria); përndryshe m (plotësia). E vendosim në krye dhe zbatojmë hipotezën. ∎ ($x < y$ do të thotë $x\ R\ y$ dhe $x \neq y$.)

Referencat

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Bye, J. K., Chan, J. Y.-C., Closser, A. H., Lee, J.-E., Shaw, S. T., & Ottmar, E. R. (2024). Perceiving precedence. *Journal of Numerical Cognition, 10*, e14103.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically.* Heinemann.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality. *Teaching Children Mathematics, 6*(4), 232–236.

Fuchs, L. S., et al. (2021). *Assisting students struggling with mathematics* (WWC 2021006). IES.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1964). *The early growth of logic in the child.* Routledge & Kegan Paul.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317–326.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? *JRME, 37*(4), 297–312.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173–196.

Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., & McEldoon, K. L. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence. *Journal of Educational Psychology, 103*(1), 85–104.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2018). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions* (2nd ed.). Corwin.