METODIKA E MATEMATIKËS 3 · LEKSIONI 6 · JAVA XII

Algoritmet me shkrim, klasat e numrave dhe renditja në $\mathbb{N}_0$

Milionat	Mijëshet	Njëshet
2	040	500

Mbledhja, zbritja, shumëzimi dhe pjesëtimi me shkrim; klasa e mijësheve, e milionave dhe e miliardave

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3\quad 9\quad 13} \\ 4\ 0\ 3 \\ -\ 1\ 6\ 8 \\ \hline \mathbf{2\ 3\ 5} \end{array}$$

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Formimi fillestar i mësuesve të arsimit fillor · 4 orë akademike, 180 minuta

PARASHIKIM · 4 MIN

Punë e simuluar e nxënësit

Dy nxënës, e njëjta zbritje, dy përgjigje

Nxënësi A

	3	9	13
	4	0	3
−	1	6	8
	2	**3**	**5**

Nxënësi B

	4	9	13
	4	0	3
−	1	6	8
	3	**3**	**5**

Sipër kolonave: A ka shkruar 3 · 9 · 13; B ka shkruar 4 · 9 · 13.

1. Çfarë ka bërë ndryshe nxënësi B?
2. Si mund ta kuptonte vetë se 335 nuk mund të jetë i saktë, pa e bërë zbritjen nga e para?

Shkruani përgjigjen. Do t'i rikthehemi pas pohimit 4.1.

Në fund të leksionit studenti shpjegon, jo vetëm llogarit

1

Njohuria matematikore

Justifikon çdo hap të algoritmeve; vërteton kufijtë e bartjes, unicitetin dhe rregullin e krahasimit.

2

Shpjegimi në arsimin fillor

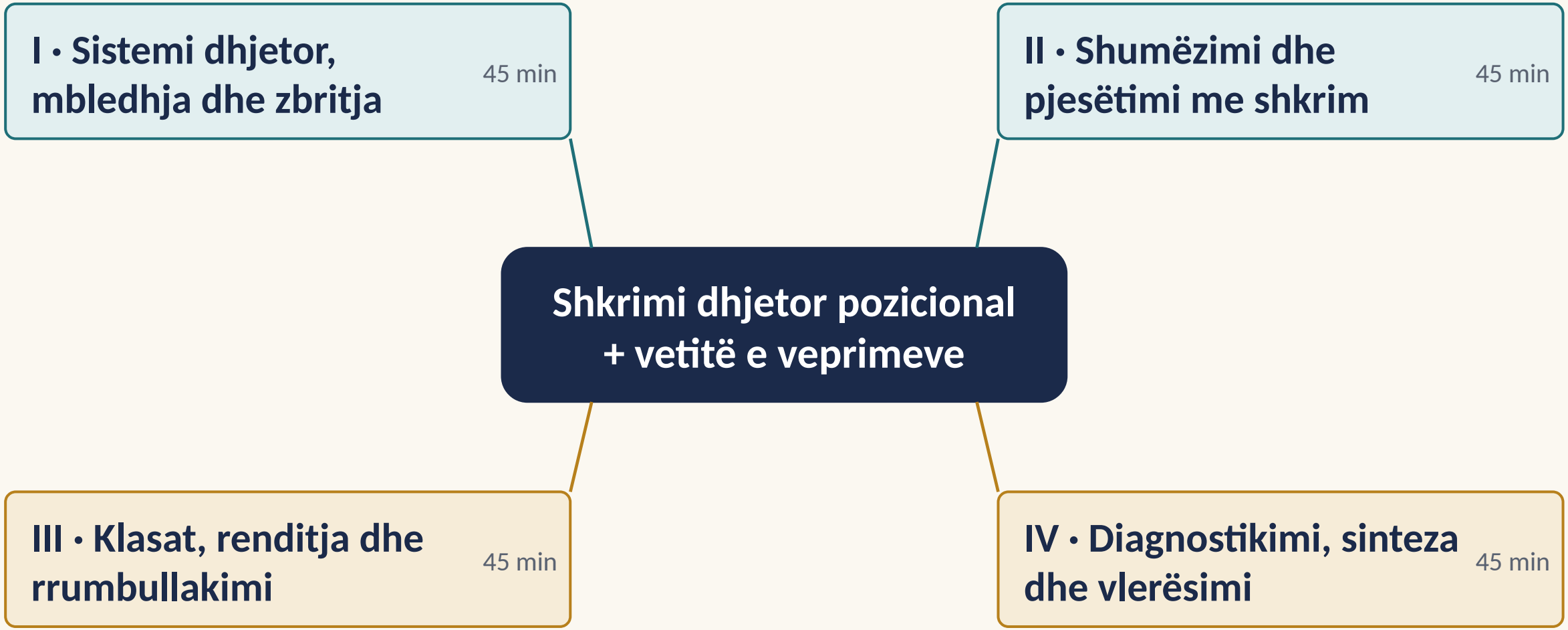
Vendos materialin e vlerës vendore pranë shkrimit në kolona; lexon, shkruan dhe krahason numra deri te miliardat.

3

Mendimi i nxënësit

Formulon hipoteza për gabimin, harton pyetjen që i dallon dhe kontrollon ndërhyrjen në një rast të ri.

Një bosht i vetëm: shkrimi dhjetor dhe vetitë e veprimeve



BLLOKU I · 45 MINUTA

Sistemi dhjetor, mbledhja dhe zbritja me shkrim

Hapja dhe Blloku I · minutat 0–45

Në këtë bllok

- Trajta dhjetore dhe dy leximet
- Bartja dhe kufiri i saj
- Rigrupimi dhe zeroja te i zbritshmi
- Pohimi 4.1 dhe shtimi i barabartë

Pozicioni i shifrës tregon rendin; çdo rend vlen dhjetë herë aq

$$4\,708 = 4 \times 1000 + 7 \times 100 + 0 \times 10 + 8$$

Mijëshe	Qindëshe	Dhjetëshe	Njësi
4	7	**0**	8
4 000	700	0	8

Zeroja nuk lexohet, por mban vendin e dhjetësheve.

Në përgjithësi

$$n = a_k \times 10^k + \ldots + a_1 \times 10 + a_0$$

$a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$; për $n \geq 1, a_k \neq 0$

Ekzistenca dhe uniciteti: pohimi 8.1 (Blloku III).

Dy lexime të të njëjtit numër: sipas rendeve dhe sipas një rendi

Sipas rendeve	4 708 = 4 mijëshe + 7 qindëshe + 0 dhjetëshe + 8 njësi
Sipas qindësheve	4 708 = 47 qindëshe + 8 njësi
Sipas dhjetësheve	4 708 = 470 dhjetëshe + 8 njësi

Ku e përdorim leximin e dytë?

- rigrupimi: 3 004 = 300 dhjetëshe e 4 njësi
- pjesëtimi: 2 436 : 6 nis me 24 qindëshe
- krahasimi: 998 janë 9 qindëshe e diçka, 1 009 janë 10 qindëshe e 9 njësi

Tri pyetje për çdo algoritëm

a **Cili barazim e justifikon procedurën?**

Zbërthimi sipas rendeve, i kombinuar me vetitë e veprimeve.

b **Çfarë bën algoritmi kur rezultati i një rendi nuk është shifër?**

Bartja, rigrupimi, këmbimi i mbetjes.

c **Si e kontrollon nxënësi rezultatin pa e përsëritur procedurën?**

Vlerësimi paraprak i madhësisë dhe veprimi i kundërt.

Mbledhim rend me rend; bartja rregullon shumat që kalojnë 9

$$a + b = 100 \times (a_2 + b_2) + 10 \times (a_1 + b_1) + (a_0 + b_0) \tag{3.1}$$

$$\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ & 4 & 7 & 8 \\ + & 3 & 6 & 5 \\ \hline & \mathbf{8} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{array}$$

algoritmi

zbërthimi

$400 + 300 = 700$

$70 + 60 = 130$

$8 + 5 = 13$

$700 + 130 + 13 = 843$

13 njësi = 1 dhjetëshe e 3 njësi; 14 dhjetëshe = 1 qindëshe e 4 dhjetëshe

PARASHIKIM · 2 MIN

Parashikoni: sa e madhe mund të jetë bartja?

1. Në mbledhjen me shkrim të dy numrave, a mund të dalë ndonjëherë bartja 2?

2. Po në mbledhjen e tre numrave? A mund të dalë bartja 3?

3. Cila është shuma më e madhe e mundshme e një kolone, përfshirë bartjen që vjen?

Argumentoni me rastin më të keq, jo vetëm me shembuj.

Pohimi 3.1: me m mbledhshëm, bartja nuk e kalon m − 1

Pohimi 3.1. (i) Në mbledhjen e dy numrave, bartja në çdo kolonë është 0 ose 1. (ii) Në mbledhjen e m numrave, m ≥ 2, bartja është e shumta m − 1.

Hapi induktiv

$$c \le m - 1 \Rightarrow 9 \times m + c \le 10 \times m - 1 < 10 \times m$$

Prandaj bartja që del është përsëri e shumta m − 1.

Mjet kontrolli: bartja 2 në mbledhjen e dy numrave tregon me siguri një gabim.

m = 3

$$\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 2} & \\ & 9 & 9 & 9 \\ & 9 & 9 & 9 \\ + & 9 & 9 & 9 \\ \hline & \mathbf{2} & \mathbf{9} & \mathbf{9} & \mathbf{7} \end{array}$$

Nga e djathta, çdo shifër e rezultatit shkruhet vetëm një herë

Nga e majta (me gojë)

$400 + 300 = 700$

$70 + 60 = 130;\ \ 700 + 130 = 830$

$8 + 5 = 13;\ \ 830 + 13 = 843$

Në shkrim: 7 bëhet 8, 3 bëhet 4. Duhet të kthehesh pas.

Nga e djathta (algoritmi)

njësi: 13 → shkruaj 3, barto 1

dhjetëshe: 14 → shkruaj 4, barto 1

qindëshe: 8 → shkruaj 8

Çdo shifër shkruhet një herë dhe nuk ndryshon më.

Cili kontroll e zbulon cilin gabim? 71 313 dhe 853

Dora

$$7 \mid 13 \mid 13 \rightarrow \mathbf{71313}$$

«Shkrova atë që më doli në çdo kolonë: 4 + 3 = 7, 7 + 6 = 13 dhe 8 + 5 = 13.»

Arbri

$$478 + 365 = 853$$

«Bartjen e dhjetësheve e shtova dy herë.»

Dy kontrolle: vlerësimi 478 + 365 ≈ 500 + 350 = 850 dhe zbritja 843 − 365 = 478.
Cili kontroll zbulon cilin gabim? Pse?

Rigrupimi ndryshon organizimin e të zbritshmit, jo vlerën e tij

$$a - b = 100 \times (a_2 - b_2) + 10 \times (a_1 - b_1) + (a_0 - b_0), \quad \text{kur } a_i \geq b_i$$

	6	14	12
	7	5	2
−	3	6	8
	3	**8**	**4**

$752 = 600 + 140 + 12$

6 Q, 14 D, 12 N: i njëjti numër, i organizuar ndryshe

$12 - 8 = 4, \; 14 - 6 = 8, \; 6 - 3 = 3$

Kontroll: $384 + 368 = 752$

752 − 368 = 416: «e vogla nga e madhja» në çdo kolonë

$$\begin{array}{r} 7\ 5\ 2 \\ -\ 3\ 6\ 8 \\ \hline \mathbf{4\ 1\ 6} \end{array}$$

$8 - 2 = 6$
$6 - 5 = 1$
$7 - 3 = 4$

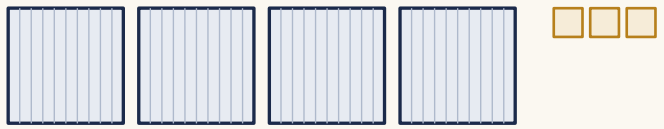
Defekt procedural

Një procedurë e qëndrueshme me një hap të gabuar jep rezultate të gabuara në mënyrë të parashikueshme (Brown dhe Burton, 1978).

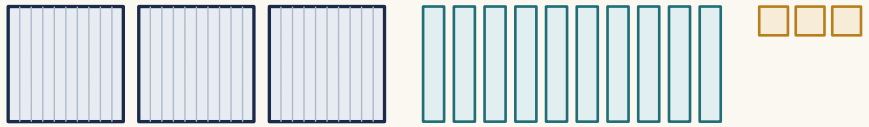
Prandaj

Defekti mund të identifikohet me disa ushtrime të zgjedhura mirë, por jo nga një përgjigje e vetme: i njëjti rezultat mund të ketë shkaqe të ndryshme.

403 − 168: pa dhjetëshe, këmbejmë dy herë



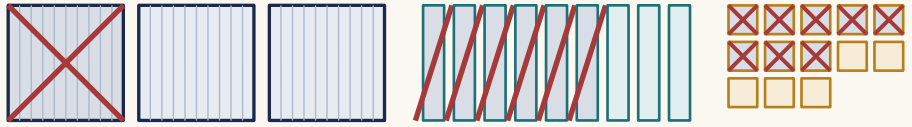
4 Q, 0 D, 3 N



këmbim 1: 3 Q, 10 D, 3 N



këmbim 2: 3 Q, 9 D, 13 N



hiqen 1 Q, 6 D, 8 N: mbeten 2 Q, 3 D, 5 N

	3	9	13
	4	0	3
−	1	6	8
	2	**3**	**5**

300 + 90 + 13 = 403

Pohimi 4.1: pa e zvogëluar 4-shin, rezultati del 100 më i madh

Pohimi 4.1. Le të jetë $a = 100 \times a_2 + a_0$ (zero te dhjetëshet), me $a_2 > b_2$ dhe $a_0 < b_0$. Nëse nxënësi shkruan 9 sipër zeros dhe $a_0 + 10$ sipër njësive, por e lë a_2, rezultati i tij është $(a - b) + 100$.

$$100 \times a_2 + 10 \times 9 + (a_0 + 10) = a + 100$$

$$(a + 100) - b = (a - b) + 100$$

Për mësuesin

403 − 168 = 335 = 235 + 100. Prova: 502 − 247 (e njëjta strukturë) dhe 752 − 368 (pa zero).

Për nxënësin

Mblidh numrat sipër kolonave: 400 + 90 + 13 = 503 ≠ 403. Kontrolli nuk kërkon rezultatin e saktë.

Dy nxënës, dy mënyra për 752 − 368: a janë të dyja të sakta?

Nxënësi A

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 6\quad 14\quad 12} \\ 7\ 5\ 2 \\ -\ 3\ 6\ 8 \\ \hline \mathbf{3\ 8\ 4} \end{array}$$

Nxënësi B

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle \quad\quad 15\quad 12} \\ 7\ 5\ 2 \\ -\ 3\ 6\ 8 \\ {\scriptstyle \quad 4\quad 7\quad\ } \\ \hline \mathbf{3\ 8\ 4} \end{array}$$

B: shifrat e vogla poshtë tregojnë zbritësin e ndryshuar (6 → 7, 3 → 4).

Dy rrugë për të njëjtën zbritje, dhe zero që përsëriten

Rigrupimi

ruan vlerën e të zbritshmit

$$752 = 600 + 140 + 12$$

Shtimi i barabartë

ruan diferencën

$$a - b = (a + d) - (b + d)$$

$$12 - 8,\ 15 - (6 + 1),\ 7 - (3 + 1)$$

3 004 − 1 657: zero që përsëriten

$$3\,004 = 300\ \mathrm{D} + 4\ \mathrm{N} = 299\ \mathrm{D} + 14\ \mathrm{N} = 2\,000 + 900 + 90 + 14$$

$$14 - 7 = 7,\ 9 - 5 = 4,\ 9 - 6 = 3,\ 2 - 1 = 1 \ \Rightarrow\ 1347$$

BLLOKU II · 45 MINUTA

Shumëzimi dhe pjesëtimi me shkrim

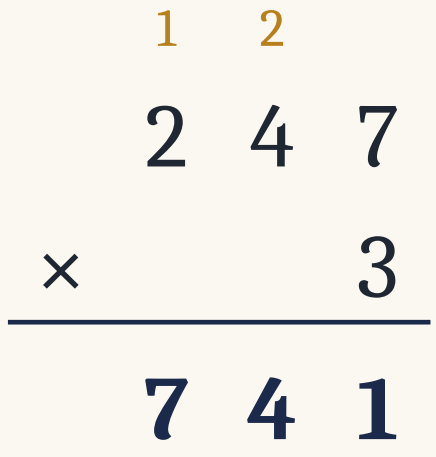
Minutat 45–90

Në këtë bllok

- Prodhimet e pjesshme dhe bartja
- Modeli i syprinës dhe rreshti i dytë
- Zeroja në faktor dhe në herës
- Vlerësimi i shifrës së herësit

3 × 247: prodhimet e pjesshme, të rregulluara gjatë rrugës

$$3 \times 247 = 3 \times 200 + 3 \times 40 + 3 \times 7 = 600 + 120 + 21 = 741$$



3 × 7 = 21 → shkruaj 1, barto 2 dhjetëshe

3 × 4 + 2 = 14 → shkruaj 4, barto 1 qindëshe

3 × 2 + 1 = 7 → shkruaj 7

Vlerësim: 3 × 250 = 750. Kontroll: 741 : 3 = 247.

Pohimi 5.1: me faktor m ≥ 1, bartja është e shumta m − 1

Pohimi 5.1. Për faktor njëshifror $m \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, bartja në çdo kolonë është e shumta $m - 1$, pra e shumta 8. Për $m = 0$, prodhimi dhe të gjitha bartjet janë zero.

$$c \le m - 1 \Rightarrow m \times a_i + c \le 9 \times m + m - 1 = 10 \times m - 1 < 10 \times m$$

Gabimi: bartja te shifra

$3 \times (4 + 2) = 18$ në vend të $3 \times 4 + 2 = 14$

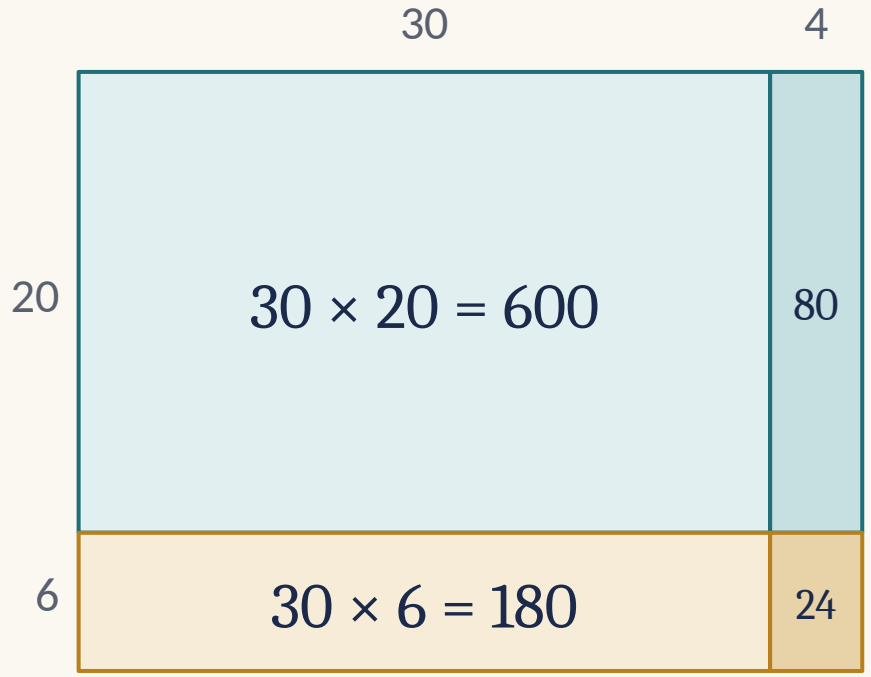
Rezultati del 981; vlerësimi $3 \times 250 = 750$ e zbulon.

Rasti kufitar: m = 9

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 8\ \ 8\ \ \ } \\ 9\ 9\ 9 \\ \times\ \ \ \ \ 9 \\ \hline 8\ 9\ 9\ 1 \end{array}$$

$9 \times 9 + 8 = 89 < 90$

34 × 26: katër pjesë të drejtkëndëshit, dy rreshta të algoritmit



$$\begin{array}{r} 3\ 4 \\ \times\quad 2\ 6 \\ \hline 2\ 0\ 4 \\ 6\ 8\ 0 \\ \hline 8\ 8\ 4 \end{array}$$

← 34 × 6 = 180 + 24

← 34 × 20 = 600 + 80

$$34 \times 26 = 600 + 180 + 80 + 24 = 884$$

Zhvendosja e rreshtit: rregull vendosjeje apo shumëzim me 20?

Rregull vendosjeje

«Rreshti i dytë fillon nën dhjetëshet.»

Funksionon derisa nxënësi ta mbajë mend. Kur e harron, nuk ka ku të mbështetet; me faktor treshifror duhet një rregull i ri.

Shumëzim me dhjetëshe

Shifra 2 e 26-ës vlen 20, prandaj rreshti i dytë është 34 × 20 = 680.

Nxënësi e rindërton rregullin vetë dhe e zgjeron: te 34 × 126 rreshti i tretë është 34 × 100.

Ma (1999)

Punë e simuluar e nxënësit

Analizë gabimi: Agroni shkruan 34 × 26 = 272

$$
\begin{array}{rrr}
 & 3 & 4 \\
\times & 2 & 6 \\
\hline
 & 2 & 0 & 4 \\
 & & 6 & 8 \\
\hline
 & 2 & 7 & 2
\end{array}
$$

Vëzhgimi

Çfarë ka shkruar Agroni në rreshtin e dytë? Në cilën pjesë të drejtkëndëshit 34 × 26 ka gabuar?

Hipoteza

Formuloni dy shpjegime të ndryshme për këtë rezultat.

Verifikimi

Çfarë rasti të ri do t'i jepnit që t'i dallonit dy shpjegimet?

272: pjesa e 20 rreshtave është llogaritur si 2 rreshta

$$204 + 68 = 34 \times 6 + 34 \times 2 = 34 \times 8 = 272$$

$$680 - 68 = 612 = 34 \times 18$$

Pjesa e sipërme nuk mungon: është llogaritur me 2 në vend të 20.

H1

Shifrën e dhjetësheve e merr si njësi; nuk e lidh me 20.

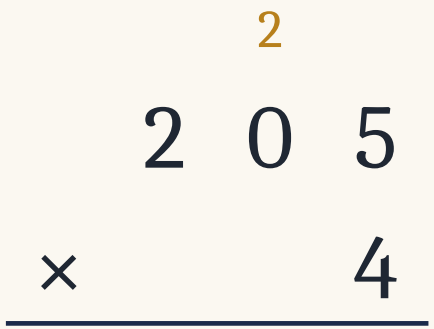
H2

Gabim i rastësishëm në një procedurë që e njeh.

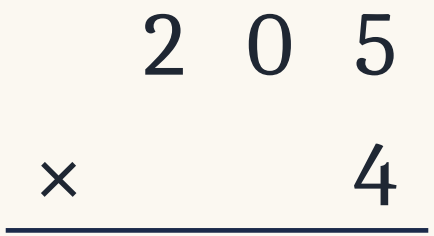
Verifikimi: 23 × 14

Nëse shkruan 92 + 23 = 115, H1 forcohet.

4 × 205 = 800: vlerësimi nuk e kap gabimin, veprimi i kundërt po



e sakta



bartja humbet te zeroja

Vlerësimi

$$4 \times 200 = 800$$

përputhet me gabimin

Veprimi i kundërt

$$800 : 4 = 200 \neq 205$$

Zbërthimi

$$800 + 4 \times 5 = 820$$

Nga Java XI: invarianti dhe herësi si numri më i madh i grupeve

$$P_k = b \times q_k + r_k, \quad 0 \le r_k < b$$

$$b \times q \le a < b \times (q + 1), \quad b > 0 \tag{6.1}$$

E re 1: i pjesëtueshmi katërshifror

Zeroja në herës shfaqet më shpesh: 2 436 : 6 = 406.

E re 2: pjesëtuesi dyshifror

Shifra e herësit nuk lexohet nga tabela; vlerësohet dhe korrigjohet.

2 436 : 6 = 406: zeroja tregon se çdo grup merr 0 dhjetëshe

2 4 3 6 : 6 = 4 0 6

− 2 4

3

3 6

− 3 6

0

24 Q : 6 = 4 Q

3 D : 6 = 0 D, mbeten 3 D

30 + 6 = 36 N

36 N : 6 = 6 N

Q	D	N
4	0	6

herësi në tabelën e rendeve

Kontroll: 6 × 406 = 2 436

2 436 : 6 = 46 dhe 4 × 205 = 800: çfarë humbet në secilin rast?

2 436 : 6 = 46

Humbet: shifra e dhjetësheve të herësit; 4 zë vendin e dhjetësheve.

Kontrolli: vlerësimi 6 × 400 = 2 400 ≤ 2 436, pra herësi ≥ 400.

Pyetja: «Çfarë bëre me 3 dhjetëshet?»

4 × 205 = 800

Humbet: bartja 2 nga njësitë, te zeroja e faktorit.

Kontrolli: veprimi i kundërt 800 : 4 = 200 ≠ 205; vlerësimi nuk e kap.

Pyetja: «Sa është 4 × 0 + 2?»

864 : 24: shifra e herësit vlerësohet dhe kontrollohet me (6.1)

$$
\begin{array}{r}
8\,6\,4 : 2\,4 = 3\,6 \\
-\,7\,2 \\
\hline
1\,4\,4 \\
-\,1\,4\,4 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Pjesa	Vlerësimi	Prova	Vendimi
86 D	8 : 2 → 4	24 × 4 = 96 > 86	shumë e madhe
86 D	2	24 × 2 = 48, mbetja 38 ≥ 24	shumë e vogël
86 D	3	24 × 3 = 72 ≤ 86, mbetja 14 < 24	3 ✓
144 N	14 : 2 → 7	24 × 7 = 168 > 144	shumë e madhe
144 N	6	24 × 6 = 144, mbetja 0	6 ✓

Kontroll: 24 × 36 = 864

Dy kushte për çdo shifër: prodhimi nuk e kalon pjesën, mbetja < b

$$b \times t \le P < b \times (t + 1)$$

$b \times t > P$

Shifra t është shumë e madhe: zvogëlohet.

$P - b \times t \ge b$

Shifra t është shumë e vogël: rritet.

$144 - 24 \times 5 = 24, \quad \text{por} \quad 24 \not< 24$

Zbritja ishte e mundur, por kushti r < b nuk plotësohet: shifra duhet të jetë 6.

Pohimi 6.1: dy vlerësime që e rrethojnë shifrën e herësit

Pohimi 6.1. Le të jetë $b = 10 \times b_1 + b_0$ ($b_1 \geq 1$), $P < 10 \times b$ dhe t herësi i P me b.
(i) herësi i P me $10 \times b_1$ nuk është më i vogël se t; (ii) herësi i P me $10 \times (b_1 + 1)$ nuk është më i madh se t.

(i) $10 \times b_1 \leq b \Rightarrow (10 \times b_1) \times t \leq b \times t \leq P$

(ii) $b < 10 \times (b_1 + 1) \Rightarrow b \times u \leq 10 \times (b_1 + 1) \times u \leq P$

86 : 24 86 : 20 jep 4, 86 : 30 jep 2, shifra e saktë 3

Çfarë nuk thotë pohimi 6.1: kufijtë varen vetëm nga b_1

P	b	$P : 10 \times b_1$	$P : 10 \times (b_1 + 1)$	shifra e saktë
86	21	4	2	**4**
86	24	4	2	**3**
86	29	4	2	**2**
180	19	18 → merret 9	9	**9**

Kufijtë nuk «largohen»

Varen nga b_1, jo nga b_0.

Kandidati i parë: e shumta 9

Sepse $P < 10 \times b$, shifra e herësit nuk e kalon 9.

VLERËSIM I SHIFRËS · INDIVIDUALISHT · 3 MIN

Vlerësoni shifrat e herësit: 875 : 24

$$875 : 24 = ?$$

1. Në çdo hap, shkruani vlerësimin me 20 dhe vlerësimin me 30.
2. Provoni kandidatin me prodhimin dhe me mbetjen; korrigjojeni nëse duhet.
3. Pse barazimi 875 = 24 × 35 + 35 nuk mjafton si kontroll?

875 = 24 × 36 + 11: kontrolli ka dy pjesë

87 D	$87 : 20$ jep 4, $87 : 30$ jep 2
prova	$24 \times 4 = 96 > 87 \Rightarrow 3$, mbetja 15
155 N	$155 : 20$ jep 7, $155 : 30$ jep 5
prova	$24 \times 7 = 168 > 155$, $24 \times 6 = 144 \Rightarrow 6$, mbetja 11
Kontrolli	$24 \times 36 + 11 = 875$ dhe $0 \le 11 < 24$

$875 = 24 \times 35 + 35$ është barazim i vërtetë, por $35 \ge 24$: mungon kushti për mbetjen.

BLLOKU III · 45 MINUTA

Klasat e numrave, renditja dhe rrumbullakimi

Minutat 90–135

Në këtë bllok

- Klasa e mijësheve; zeroja brenda klasës
- Milionat dhe miliardat
- Uniciteti i shkrimit dhjetor
- Renditja dhe rregulli i krahasimit

Rendet grupohen në klasa me nga tri rende

1 × 10 10 × 10 100 × 10 1 000 × 10 10 000 × 10 100 000

klasa e njësheve — klasa e mijësheve

Mijëshet			Njëshet		
Q	D	N	Q	D	N
	4	5	3	0	6

45 306 «dyzet e pesë **mijë** e treqind e gjashtë»

Dy numra deri në 999, të lidhur me emrin e klasës.

Parakusht: leximi i sigurt i çdo numri deri në 999.

Pas klasës së parë, çdo klasë shkruhet me saktësisht tri shifra

Fjalët	Klasat	Numri
pesë mijë	5 | 000	**5 000**
shtatë mijë e njëzet	7 | 020	**7 020**
katër mijë e pesëdhjetë	4 | 050	**4 050**
dy milionë e tre mijë e dyzet	2 | 003 | 040	**2 003 040**

Gabime për «4 050»

450 vetëm shifrat që dëgjoi

400050 «4 000» dhe «50» njëri pas tjetrit

Hapësirë, jo presje. Në shqip presja shënon numrat dhjetorë. Në një tekst anglisht, 3,004 do të thotë tre mijë e katër. Klasa e parë nga e majta shkruhet pa zero fillestare: 4 050, jo 004 050.

SHKRIM SIPAS KLASAVE · INDIVIDUALISHT · 2 MIN

Shkruani me shifra dhe parashikoni gabimet

a Shkruani me shifra: «dyzet mijë e tetë»

b Shkruani me shifra: «dy milionë e tre mijë e dyzet»

Parashikoni: çfarë mund të shkruajë një nxënës për «dyzet mijë e tetë»? Për secilin shkrim të gabuar, çfarë mund të tregojë për të kuptuarit e klasës?

«Dyzet mijë e tetë»: 40 8 dhe 408 tregojnë gjëra të ndryshme

Nxënësi A

40 8

njeh klasën, por jo tri rendet

Nxënësi B

408

vështirësi më e gjerë me vlerën vendore?

Mijëshet			Njëshet		
Q	D	N	Q	D	N
	4	0	0	0	8

$$40 \times 1000 + 8 = 40\,008$$

Pyetje diagnostikuese: «Sa shifra ka numri që shkrove? Sa shifra duhet të ketë një numër me dyzet mijë?»

Pyetje dalluese: «Te klasa e njësheve, sa qindëshe ke? Sa dhjetëshe? Sa njësi?»

Rast i ri: «shtatëdhjetë mijë e pesëqind»

Leximi i saktë nuk sjell vetvetiu ndjesinë e madhësisë

1 000 ditë pak më pak se 3 vjet

10 000 ditë **rreth 27 vjet**

Njohuri e sistemit të shkrimit

Lexon dhe shkruan saktë 10 000.

Njohuri e sasisë

E di që 10 000 është dhjetë herë aq sa 1 000 dhe e ndjen këtë dallim.

Çdo klasë e re është një mijë herë aq sa e mëparshmja

Miliardat			Milionat			Mijëshet			Njëshet		
Q	D	N	Q	D	N	Q	D	N	Q	D	N
		2	0	4	0	5	0	0	3	0	7

«dy miliardë, dyzet milionë, pesëqind mijë e treqind e shtatë»

1 milion $1000\,000 = 1000 \times 1000$

1 miliard $1000\,000\,000 = 1000 \times 1000\,000$

Rend: një pozicion; rendi pasues vlen 10 herë aq. **Klasë:** tri rende; klasa pasuese vlen 1 000 herë aq.

Billion = miliard; një milion sekonda ≈ 11,6 ditë

Anglisht	Shqip	Vlera
million	**milion**	10^6
billion	**miliard**	10^9
trillion	**bilion**	10^{12}

1 000 000 sekonda

≈ 11,6 ditë (një ditë ka 86 400 sekonda)

1 000 000 000 sekonda

≈ 31,7 vjet (përafrim)

Pyetje diagnostikuese: «Sa mijë ka në një milion?»
Përgjigje e mundshme: «Njëqind, sepse pas mijës vjen qindëshja.»
Pyetje pasuese: «Sa zero ka 1 000? Sa zero ka 1 000 000?»

Pohimi 8.1: çdo n ≥ 1 ka një dhe vetëm një shkrim dhjetor

Pohimi 8.1. Çdo numër natyror $n \geq 1$ shkruhet në një mënyrë të vetme si $n = a_k \times 10^k + \dots + a_1 \times 10 + a_0$, me $a_i \in \{0, \dots, 9\}$ dhe $a_k \neq 0$. Zeroja shkruhet 0 dhe trajtohet veçmas.

Ekzistenca: pjesëtim i përsëritur me 10

$4\,708 = 10 \times 470 + 8$ → **8**

$470 = 10 \times 47 + 0$ → **0**

$47 = 10 \times 4 + 7$ → **7**

$4 = 10 \times 0 + 4$ → **4**

shifrat dalin nga e djathta: 8, 0, 7, 4

Uniciteti: induksion sipas n

$$n = 10 \times m + a_0 = 10 \times m' + a'_0$$

Nga uniciteti në teoremën e pjesëtimit me mbetje: $a_0 = a'_0$ dhe $m = m'$. Meqë $m < n$, sipas hipotezës m ka një shkrim të vetëm; pra edhe n.

Renditja përkufizohet me mbledhjen: $a \le b$ kur $b = a + c$, $c \in \mathbb{N}_0$

$$a \le b \iff \text{ekziston } c \in \mathbb{N}_0 \text{ me } a + c = b$$

(i) refleksive	$a + 0 = a \Rightarrow a \le a$
(ii) antisimetrike	$b = a + c,\ a = b + e \Rightarrow c + e = 0 \Rightarrow a = b$
(iii) kalimtare	$b = a + c,\ d = b + e \Rightarrow d = a + (c + e)$
(iv) e pajtueshme	$b = a + c \Rightarrow b + m = (a + m) + c,\ \ b \times m = a \times m + c \times m$

Strikte: $a < b \Rightarrow a \times m < b \times m$ vetëm për $m \ge 1$

Renditja është e plotë; $\mathbb{N}_0$ ka pasardhës dhe element më të vogël

Trikotomia: a < b, a = b ose b < a, vetëm njëra

Ekzistenca (induksion sipas a): nëse a < b, atëherë b = (a + 1) + (c − 1), pra a + 1 ≤ b; nëse b ≤ a, atëherë b < a + 1.

Përjashtimi: a < b dhe b < a japin a = a + (c + e), me c, e ≥ 1: kundërshtim.

Pasardhësi

Ndërmjet a dhe a + 1 nuk ka numër natyror. «Ndërmjet 7 dhe 8 nuk ka numra natyrorë» e lë derën të hapur për thyesat.

Elementi më i vogël

Çdo nënbashkësi joboshe e $\mathbb{N}_0$ ka element më të vogël; parimi është i barasvlershëm me induksionin.

Pohimi 9.2: rregulli i krahasimit ka dy pjesë

Pohimi 9.2. (i) Çdo numër natyror pozitiv m me k shifra, pa zero fillestare, plotëson $10^{k-1} \le m < 10^k$; prandaj numri me më shumë shifra është më i madh. Zeroja trajtohet veçmas. (ii) Me po aq shifra, vendos rendi i parë nga e majta ku shifrat ndryshojnë.

(i) $$m \le 9 \times (10^{k-1} + \ldots + 10 + 1) = 10^k - 1 < 10^k$$

(ii) $$n - m \ge 10^j - (10^j - 1) = 1 > 0$$

Në klasë $$999 + 1 = 1000$$

Argumentoni: kush ka të drejtë, Era apo Bledi?

Era

«998 është më i madh, sepse 9 është më i madh se 1.»

Bledi

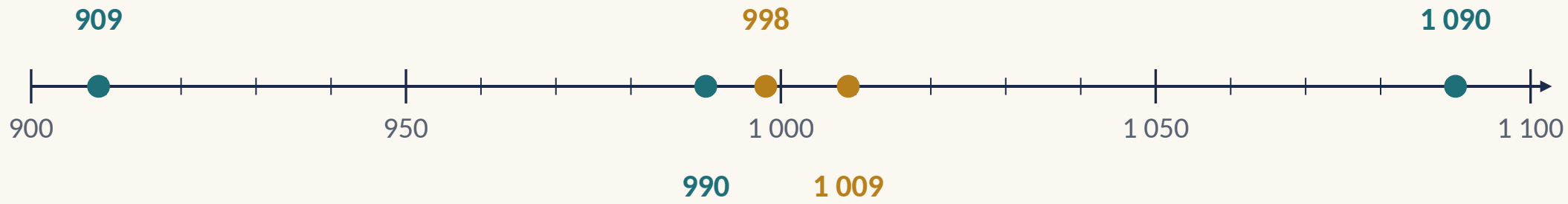
«1 009 është më i madh, sepse ka më shumë shifra.»

Kush ka të drejtë? Argumentoni me vlerën e shifrave, jo vetëm me rregullin. Cila pjesë e pohimit 9.2 vendos? Çfarë pyetjeje do t'i bënit Erës?

998 < 1 009: vendos numri i shifrave

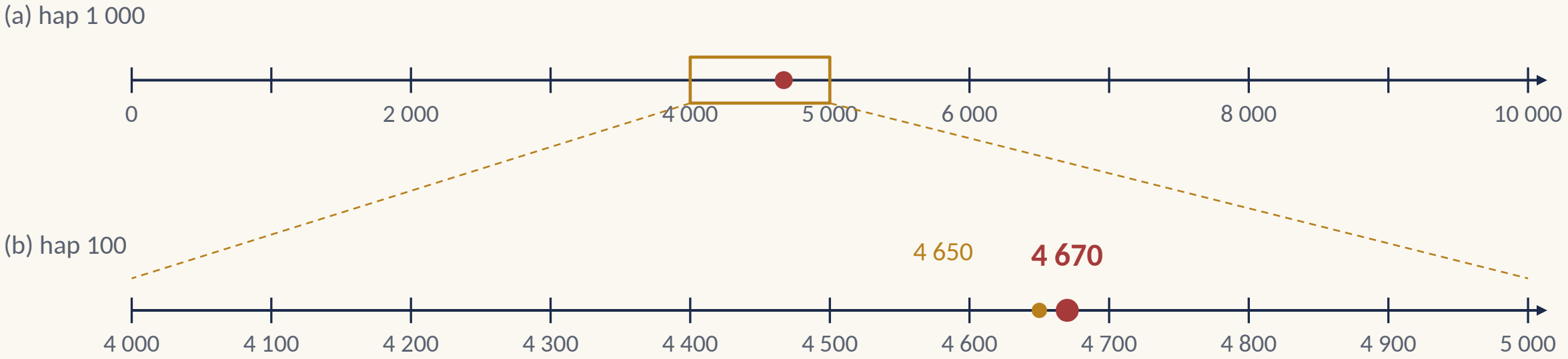
Era: «998 është më i madh, sepse 9 është më i madh se 1.»

$$998 \leq 999 < 1000 \leq 1009$$



Pyetje alternative: «Sa qindëshe ka 998? Sa qindëshe ka 1 009?» **Rast i ri:** 4 999 dhe 10 001

Rrumbullakimi është krahasim largësish në boshtin numerik



Mijëshja më e afërt

4 670 → 5 000

Qindëshja më e afërt

4 670 → 4 700

4 649 dhe 4 650

4 600 nga largësia; 4 700 nga marrëveshja

INDIVIDUALISHT · 4 MIN

Renditni dhe argumentoni çdo krahasim me pohimin 9.2

$$10\,090,\quad 9\,999,\quad 10\,009,\quad 10\,900$$

(i) shifrat	9 999 ka 4 shifra, të tjerët 5 $\Rightarrow$ 9 999 është më i vogli
(ii) qindëshet	10 900: shifra 9 te qindëshet $\Rightarrow$ më i madhi
(ii) dhjetëshet	10 009 < 10 090: vendos rendi i dhjetësheve
Radha	$9\,999 < 10\,009 < 10\,090 < 10\,900$

BLLOKU IV · 45 MINUTA

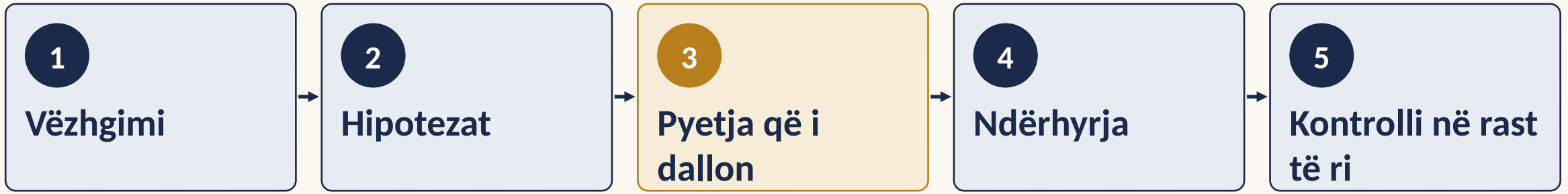
Diagnostikimi, sinteza dhe vlerësimi

Minutat 135–180

Në këtë bllok

- Modeli diagnostik në pesë hapa
- Formulimi i pyetjes diagnostikuese
- Rikthim te pyetja hyrëse
- Testi: 30 minuta, 20 pikë

Një gabim është hipotezë për t'u provuar, jo diagnozë



Gabim i rastësishëm

Nuk përsëritet në raste të ngjashme.

Vështirësi procedurale

E qëndrueshme në një hap; kur pyetet, nxënësi e shpjegon vlerën vendore.

Keqkuptim konceptual

Shfaqet edhe kur pyetet për vlerën e shifrave ose madhësinë e rezultatit.

Brown dhe Burton (1978): defekte procedurale të qëndrueshme japin rezultate të parashikueshme.

Formuloni pyetjen diagnostikuese

Grupi 1

$752 - 368 = 416$

Grupi 2

$3 \times 247 = 981$

Grupi 3

$2436 : 6 = 46$

Grupi 4

$4 \times 205 = 800$

Hipoteza	Çfarë procedure mund të ketë ndjekur nxënësi?
Pyetja	Çfarë i thoni që ta provoni hipotezën, pa ia dhënë përgjigjen?
Rasti i ri	Çfarë ushtrimi me të njëjtën strukturë i jepni pastaj?

Hipoteza dhe pyetje: mbledhja, zbritja dhe shumëzimi

Puna e nxënësit	Hipoteza për t'u provuar	Pyetja ose detyra provuese	Rasti i ri
478 + 365 = 71313	Shumat e kolonave shkruhen pa bartje	Sa është afërsisht 478 + 365?	586 + 247
752 − 368 = 416	E vogla nga e madhja në çdo kolonë	Sa bën 416 + 368?	641 − 257
403 − 168 = 335	Zeroja bëhet 9, qindëshja nuk zvogëlohet	Mblidh numrat sipër kolonave	502 − 247
3 × 247 = 981	Bartja i shtohet shifrës para shumëzimit	Sa është 3 × 4 + 2? Po 3 × 250?	4 × 136
34 × 26 = 272	Shifra e dhjetësheve merret si njësi	Ku është 34 × 20 në drejtkëndësh?	23 × 14

Hipoteza dhe pyetje: zeroja, klasat dhe krahasimi

Puna e nxënësit	Hipoteza për t'u provuar	Pyetja ose detyra provuese	Rasti i ri
4 × 205 = 800	Bartja humbet te zeroja	Sa është 800 : 4?	6 × 305
2436 : 6 = 46	Zeroja në herës nuk shkruhet	Sa është 6 × 400?	3248 : 8
40008 shkruar 408	Shkruhen vetëm shifrat që dëgjohen	Sa shifra ka një numër me dyzet mijë?	70500
998 > 1009	Krahasohet vetëm shifra e parë	Sa qindëshe ka secili numër?	4999 dhe 10001

Rikthim: 335 = 235 + 100, dhe nxënësi mund ta zbulojë vetë

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\quad 9\quad 13} \\ 4\ 0\ 3 \\ -\ 1\ 6\ 8 \\ \hline \mathbf{3\ 3\ 5} \end{array}$$

335 = 235 + 100

Vlerësimi 400 − 170 = 230, jo afër 335

Rishkrimi 400 + 90 + 13 = 503 ≠ 403

Veprimi i kundërt 335 + 168 = 503 ≠ 403

Prova e hipotezës: 502 − 247 (e njëjta strukturë) dhe 752 − 368 (pa zero).

VLERËSIM INDIVIDUAL · 30 MIN

Testi përmbledhës: 30 minuta, 20 pikë

1	5 pikë · 7 min	Llogaritni 3 004 − 1 657, shpjegoni rigrupimin dhe kontrolloni rezultatin.
2	4 pikë · 6 min	Shkruani me shifra «dyzet mijë e tetë» dhe «dy milionë e tre mijë e dyzet». Krahasoni 998 dhe 1 009 me pohimin 9.2.
3	5 pikë · 8 min	Për $b = 10 \times b_1 + b_0$ dyshifror dhe $P < 10 \times b$, vërtetoni se herësi i P me $10 \times b_1$ nuk është më i vogël se herësi i P me b. Ilustroni me 86 dhe 24.
4	6 pikë · 9 min	Një nxënës shkruan $34 \times 26 = 272$. Formuloni dy hipoteza, një pyetje që i dallon dhe një ndërhyrje.

Sinteza: një bazë e përbashkët, katër procedura të dallueshme

Mbledhja dhe zbritja

bartja ≤ m − 1; rigrupimi ruan vlerën;
shtimi i barabartë ruan diferencën

Shumëzimi dhe pjesëtimi

dy rreshta = katër pjesë;
b × t ≤ P < b × (t + 1)

Shkrimi dhjetor pozicional + vetitë e veprimeve

Klasat dhe renditja

tri shifra pas klasës së parë;
më shumë shifra, pastaj rendi i parë

Diagnostikimi

hipotezë → pyetje →
ndërhyrje → rast i ri

Punë e pavarur pas leksionit

Fletë diagnostike

6 ushtrime zbritjeje që dallojnë «e vogla nga e madhja» nga defekti me zeron; për secilin, rezultati që jep secili defekt.

Analizë 500–700 fjalë

Gabimi 34 × 26 = 272: dy hipoteza, dy pyetje, modeli vizual dhe kontrolli në rast të ri.

Mikromësimdhënie 10 minuta

Leximi i numrave me zero brenda klasës së mijësheve.

Lexim: Ma (1999)

250–300 fjalë: «marrja hua» kundrejt «këmbimit të një njësie të rendit më të lartë».

Vetëkontroll: detyrat 12.7 dhe banka e problemeve (kapitulli 15) të dokumentit; zgjidhjet jepen pas detyrave.

A1 · Kufijtë e bartjes: pohimet 3.1 dhe 5.1

3.1, njësitë	$a_0 + \ldots \le 9 \times m < 10 \times m \Rightarrow \text{bartja} \le m - 1$
3.1, hapi	$c \le m - 1 \Rightarrow 9 \times m + c \le 10 \times m - 1 < 10 \times m$
5.1, njësitë	$m \times a_0 \le 9 \times m < 10 \times m, \quad m \in \{1, \ldots, 9\}$
5.1, hapi	$m \times a_i + c \le 9 \times m + m - 1 = 10 \times m - 1 < 10 \times m$
m = 0	prodhimi dhe të gjitha bartjet janë 0

A2 · Pohimi 4.1 dhe zgjerimi i tij për 3 004

Numri sipër	$100 \times a_2 + 10 \times 9 + (a_0 + 10) = a + 100$
Kolonat	$a_0 + 10 \geq b_0, \quad 9 \geq b_1, \quad a_2 \geq b_2$
Rezultati	$(a + 100) - b = (a - b) + 100$
3 004 − 1 657	$3000 + 900 + 90 + 14 = 4004 = 3004 + 1000$
Pasoja	$\text{rezultati } 2347 = 1347 + 1000$

A3 · Pohimi 6.1: vërtetimi i plotë

Karakterizimi $q = \text{herësi i } P \text{ me } d \iff d \times q \le P < d \times (q+1)$

(i) $10 \times b_1 \le b \Rightarrow (10 \times b_1) \times t \le b \times t \le P \Rightarrow t \le \text{herësi me } 10 \times b_1$

(ii) $b < 10 \times (b_1 + 1) \Rightarrow b \times u \le 10 \times (b_1 + 1) \times u \le P \Rightarrow u \le t$

P < 10 × b $b \times t \le P < 10 \times b \Rightarrow t \le 9$

A4 · Pohimi 8.1: ekzistenca dhe uniciteti i shkrimit dhjetor

Ekzistenca

$$n = 10 \times q_1 + a_0,\quad q_1 = 10 \times q_2 + a_1,\quad \ldots,\quad q_k = 10 \times 0 + a_k$$

Mbaron

$$q_i \geq 1 \Rightarrow q_{i+1} < q_i;\quad a_k \neq 0$$

Uniciteti

$$n = 10 \times m + a_0 = 10 \times m' + a'_0,\quad 0 \leq a_0, a'_0 \leq 9$$

Teorema

$$a_0 = a'_0,\quad m = m';\quad m < n \Rightarrow$$ m ka një shkrim të vetëm

Zeroja

$n = 0$ shkruhet 0 dhe trajtohet veçmas

A5 · Çelësi orientues i testit dhe ndarja e pikëve

Detyra	Përgjigjja kryesore	Pikët
1	3 004 = 2 000 + 900 + 90 + 14; 1347; 1347 + 1657 = 3 004	2 rigrupimi · 2 zbritja · 1 kontrolli
2	40 008; 2 003 040; 998 ≤ 999 < 1000 ≤ 1009	1 + 1 numrat · 2 krahasimi
3	(10 × b_1) × t ≤ b × t ≤ P; 86 me 20 jep 4 ≥ 3	2 mosbarazimi · 2 karakterizimi · 1 shembulli
4	884; H1 (34 × 8), H2 (harresë); «Ku është 34 × 20?»; 23 × 14	2 hipotezat · 2 pyetja e rasti · 2 ndërhyrja

A6 · Rubrika e punës së studentit (0–2)

Dimensioni	0 – i pamjaftueshëm	1 – pjesërisht	2 – plotësisht
Saktësia matematikore	Rregull i gabuar ose rezultat pa kontroll	Llogaritje e saktë, justifikim i paplotë	Llogaritje, justifikim dhe kontroll
Paraqitjet	Mungojnë	Një paraqitje pa lidhje me algoritmin	Paraqitje e lidhur hap pas hapi me algoritmin
Analiza didaktike	Vetëm korrigjim	Hipotezë pa provë	Hipoteza, pyetje dhe ndërhyrje
Gjuha profesionale	Terma të pasaktë	Terminologji kryesisht e saktë	Gjuhë e saktë dhe e përshtatur

Rubrika e diagnostikimit ka nivele 0–3, sepse përshkruan zhvillimin e një aftësie të vetme (Shtojca A7).

A7 · Rubrika e diagnostikimit të gabimeve (0–3)

Niveli	Interpretimi i punës	Cilësia e ndërhyrjes	Kontrolli në rast të ri
0 – i pamjaftueshëm	E ngatërron gabimin me diagnozën	Jep vetëm përgjigjen e saktë	Nuk parashikon kontroll
1 – fillestar	Gjen një hipotezë	Propozon një ushtrim të ngjashëm	Kontrollon vetëm rezultatin
2 – kompetent	Krahason dy hipoteza me pyetje	Zgjedh një model që i përshtatet gabimit	Detyrë e ngjashme, e interpretuar
3 – i avancuar	Ndërton provë që i dallon hipotezat	Kalon nga materiali te shkrimi sipas nevojës	Rast i ri me strukturë të ndryshuar

A8 · Një bisedë diagnostikuese e modeluar

Mësuesja: «Ke shkruar 403 − 168 = 335. Sa është afërsisht 400 − 170?» 1

Nxënësi: «Rreth 230.»

Mësuesja: «Po ty të doli 335. Shkruaje me numra atë që shkrove sipër kolonave.» 2

Nxënësi: «4 qindëshe, 9 dhjetëshe dhe 13 njësi.»

Mësuesja: «Sa bëjnë bashkë?» 3

Nxënësi: «400 + 90 + 13 = 503. Po unë kisha 403!»

Mësuesja: «Nga i more 9 dhjetëshet?» 4

1 vlerësim · 2 rishkrim · 3 kontroll · 4 kthim te këmbimi

A9 · Plani i një ore 45-minutëshe: zbritja me zero

Min.	Veprimtaria	Pyetja kryesore	Çfarë duam të shohim
0–6	Problemi dhe vlerësimi	Afër 200 apo afër 300?	Lidhja me numra të rrumbullakuar
6–18	Rigrupimi me material	Çfarë mund të këmbesh?	Dy këmbimet në radhën e duhur
18–28	Materiali dhe kolonat krah për krah	Ku është 9-a te materiali?	Lidhja e çdo shifre me një rend
28–37	Krahasimi i 235 dhe 335	Sa bëjnë numrat sipër kolonave?	Kontrolli i rigrupimit
37–43	Ushtrim: 502 − 247	Si e kontrollon?	Zbatim i pavarur
43–45	Bileta e daljes: 600 − 254	Pse sipër dy zerove ka 9 dhe 10?	Rasti i ri

Smith dhe Stein (2018): zgjidhjet zgjidhen dhe renditen me qëllim; gabimi vjen pasi kontrolli është i njohur.

A10 · Ndarja e ngarkesës: auditor, seminar, studim individual

Auditor

Kapitujt 2–9, pa vërtetimet e plota; seksioni 10.1

Seminar

Vërtetimet 3.1, 4.1, 5.1, 6.1, 8.1, 9.1, 9.2; njësitë profesionale; kapitujt 10–11; detyrat 12.1–12.6

Studim individual

Detyrat 12.7; banka e problemeve (kap. 15); puna 14.2; testi për vetëkontroll

Referencat

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Brown, J. S., & Burton, R. R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. Cognitive Science, 2(2), 155–192. https://doi.org/10.1207/s15516709cog0202_4

Education Endowment Foundation. (2017). Improving mathematics in Key Stages Two and Three: Guidance report. https://educationendowmentfoundation.org.uk/education-evidence/guidance-reports/maths-ks-2-3

Fuchs, L. S., Newman-Gonchar, R., Schumacher, R., Dougherty, B., Bucka, N., Karp, K. S., Woodward, J., Clarke, B., Jordan, N. C., Gersten, R., Jayanthi, M., Keating, B., & Morgan, S. (2021). Assisting students struggling with mathematics: Intervention in the elementary grades (WWC 2021006). Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. https://ies.ed.gov/ncee/WWC/PracticeGuide/26

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. Journal for Research in Mathematics Education, 28(2), 130–162. https://doi.org/10.2307/749759

Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Lawrence Erlbaum Associates.

Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. Educational Psychology Review, 27(4), 587–597. https://doi.org/10.1007/s10648-015-9302-x

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2018). 5 practices for orchestrating productive mathematics discussions (2nd ed.). Corwin.