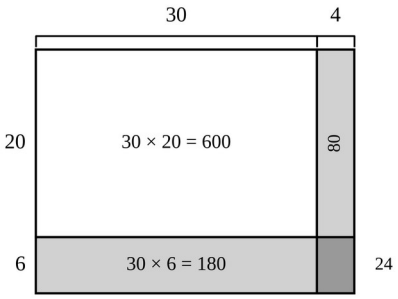
METODIKA E MATEMATIKËS 3

Leksioni 6 · Java XII

Algoritmet me shkrim, klasat e numrave dhe renditja në ℕ

Mbledhja, zbritja, shumëzimi dhe pjesëtimi me shkrim · Klasa e mijësheve, e milionave dhe e miliardave



(a)

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 26 \\ \hline 204 \\ 680 \\ \hline 884 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow 34 \times 6 \\ \leftarrow 34 \times 20 \\ \\ \end{array}$$

(b)

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Material universitar për formimin fillestar të mësuesve të arsimit fillor

Metodika e Matematikës 3 · Leksioni 6 · Java XII

Mbledhja dhe zbritja me shkrim. Shumëzimi dhe pjesëtimi me shkrim. Klasa e mijësheve. Klasa e milionave dhe e miliardave. Renditja në bashkësinë ℕ

Autorja: Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Destinacioni: studentët e programit të formimit fillestar të mësuesve të arsimit fillor. Materiali mbulon Javën XII të temës 5 të programit, për katër orë akademike dhe për studim të pavarur.

SI TË LEXOHET KY MATERIAL

Përkufizimet, pohimet dhe vetitë paraqiten në kuti me sfond të kaltër të lehtë; vërtetimet vijojnë menjëherë pas tyre dhe mbyllen me shenjën ∎.

Njësitë profesionale, me shirit të errët në krye, ndjekin gjithmonë të njëjtat shtatë hapa: shembulli i zgjidhur, paraqitja në klasë, pyetja diagnostikuese, përgjigja e mundshme e nxënësit, analiza didaktike, alternativa ose kundërshembulli dhe pyetja reflektuese.

Kapitujt 2–11 mbyllen me kutinë «Idetë kryesore të kapitullit», që shërben për përsëritje dhe vetëkontroll.

Dialogët, përgjigjet e nxënësve dhe rastet e gabimeve janë simulime didaktike dhe nuk paraqiten si të dhëna empirike. Figurat, problemet, sekuencat mësimore dhe rubrikat janë hartuar posaçërisht për këtë leksion.

© 2026 Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Përmbajtja

Hyrje....6
Si të studiohet ky leksion....6
Pyetja hyrëse....6
1. Vendi në program dhe rezultatet e të nxënit....7
1.1 Roli i leksionit në vazhdimësinë e programit....7
1.2 Rezultatet e të nxënit....7
1.3 Organizimi i katër orëve akademike....8
2. Shkrimi dhjetor: baza e përbashkët e algoritmeve....9
2.1 Trajta dhjetore e një numri....9
2.2 Algoritmi si zbërthim i shkruar shkurt....9
2.3 Tri pyetje për çdo algoritëm....10
3. Mbledhja me shkrim....11
3.1 Mbledhja sipas rendeve....11
3.2 Bartja dhe kufiri i saj....11
3.3 Nga zbërthimi te shkrimi i shkurtër....12
3.4 Vlerësimi dhe kontrolli i mbledhjes....13
3.5 Njësi profesionale: shumat e kolonave pa bartje....13
4. Zbritja me shkrim....15
4.1 Zbritja sipas rendeve dhe kushti i saj....15
4.2 Rigrupimi....15
4.3 Kur i zbritshmi ka zero....16
4.4 Një metodë tjetër: shtimi i barabartë....18
4.5 Kur zeroja përsëritet....18
4.6 Njësi profesionale: zeroja te i zbritshmi....19
5. Shumëzimi me shkrim....20
5.1 Shumëzimi me një faktor njëshifror....20
5.2 Shumëzimi me një faktor dyshifror....20
5.3 Zeroja në faktor....21
5.4 Njësi profesionale: rreshti i dytë pa zhvendosje....22
6. Pjesëtimi me shkrim: pjesëtuesi dyshifror dhe të pjesëtueshmit katërshifrorë....24
6.1 Çfarë mbetet nga Java XI....24
6.2 Të pjesëtueshmit katërshifrorë dhe zeroja....24
6.3 Pjesëtuesi dyshifror: vlerësimi i shifrës së herësit....25
6.4 Dy vlerësime që e rrethojnë shifrën....25
6.5 Kontrolli i pjesëtimit me mbetje....26
6.6 Njësi profesionale: zeroja në herës me të pjesëtueshëm katërshifror....26
7. Klasa e mijësheve....28
7.1 Nga rendet te klasat....28
7.2 Leximi dhe shkrimi....28
7.3 Ndjesia e madhësisë....29
7.4 Njësi profesionale: zeroja brenda klasës....29
8. Klasa e milionave dhe e miliardave....31
8.1 Çdo klasë është një mijë herë aq sa e mëparshmja....31
8.2 Sa i madh është një milion....31
8.3 Pse çdo numër ka një shkrim të vetëm....32
8.4 Njësi profesionale: emrat e klasave....32

9. Renditja në bashkësinë $\mathbb{N}_0$ 34
9.1 Përkufizimi dhe vetitë 34
9.2 Pasardhësi dhe elementi më i vogël 35
9.3 Krahasimi i numrave sipas shifrave 35
9.4 Boshti numerik me shkallë të ndryshme 36
9.5 Njësi profesionale: më shumë shifra apo shifër më e madhe? 36
10. Gabimet si burim informacioni 38
10.1 Modeli diagnostik 38
10.2 Përmbledhje e rasteve 38
10.3 Një bisedë diagnostikuese e modeluar 39
10.4 Si zgjedhim ndërhyrjen 40
11. Hartimi i mësimit: nga teoria te klasa 41
11.1 Një orë 45-minutëshe: zbritja kur i zbritshmi ka zero 41
11.2 Një sekuencë e shkurtër: klasa e mijësheve 42
11.3 Diferencimi 43
12. Punëtoria universitare: detyra me analizë 44
12.1 Detyra 1: mbledhja me zbërthim 44
12.2 Detyra 2: kufiri i bartjes 44
12.3 Detyra 3: dy metoda zbritjeje 44
12.4 Detyra 4: shumëzimi dhe modeli i syprinës 45
12.5 Detyra 5: vlerësimi i shifrës së herësit 45
12.6 Detyra 6: renditja 45
12.7 Dymbëdhjetë detyra me zgjidhje 45
13. Vlerësimi përmbyllës dhe vetëvlerësimi 48
13.1 Kriteret e vlerësimit 48
13.2 Tri situata për seminar 48
13.3 Test përmbledhës (30 minuta, 20 pikë) 48
13.4 Çelësi orientues i testit 49
13.5 Rubrikat 50
14. Përmbledhje dhe punë e pavarur 51
14.1 Sinteza e leksionit 51
14.2 Punë individuale pas leksionit 51
15. Bankë problemesh për studim të pavarur 51
16. Përgjigje të shkurtra për kontrollin e punës 52
Bibliografia 53
Shënim mbi përdorimin e burimeve 53
Literatura e cituar 53

L E K S I O N I 6

Hyrje

Si të studiohet ky leksion

Java XII mbyll temën e katër veprimeve në numrat natyrorë. Lexoni fillimisht kapitullin 2, sepse shkrimi dhjetor është baza e përbashkët e katër algoritmeve. Pastaj studioni algoritmet njërin pas tjetrit dhe, për secilin, ndaloni te dy pyetje: cila veti e veprimeve e justifikon çdo hap dhe ku mund të gabojë nxënësi. Kapitujt 7–9 kalojnë te numrat e mëdhenj dhe te renditja në $\mathbb{N}_0$. Detyrat e zgjidhura përdorini për vetëkontroll, pasi të keni provuar vetë zgjidhjen.

Ndjekim marrëveshjet e Javës XI: shumëzimin e shënojmë me ×, pjesëtimin me dy pika (:), dhe në m × n faktori i parë numëron grupet ose rreshtat. Me $\mathbb{N}_0$ shënojmë bashkësinë {0, 1, 2, …}, me $\mathbb{N}$ numrat natyrorë pozitivë. Për rendet e vlerës vendore përdorim shkurtimet N (njësi), D (dhjetëshe), Q (qindëshe). Algoritmet i ilustrojmë me numra treshifrorë dhe katërshifrorë; klasat e milionave dhe të miliardave trajtohen për lexim, shkrim dhe krahasim, jo për llogaritje me shkrim. Dialogët dhe rastet e nxënësve janë simulime didaktike, jo të dhëna nga studime empirike.

Pyetja hyrëse

> Dy nxënës kanë llogaritur 403 − 168. I pari ka shkruar 235, i dyti 335. Të dy kanë shkruar 9 sipër zeros dhe 13 sipër 3-shit. Çfarë ka bërë i dyti ndryshe? Pa e bërë zbritjen nga e para, si mund ta kuptonte vetë nxënësi se rezultati i tij nuk mund të jetë i saktë? Shkruani përgjigjen tuaj dhe rikthehuni te ajo pas kapitullit 4.

1. Vendi në program dhe rezultatet e të nxënit

NË KËTË KAPITULL

- Roli i leksionit në vazhdimësinë e programit
- Rezultatet e të nxënit
- Organizimi i katër orëve akademike

1.1 Roli i leksionit në vazhdimësinë e programit

Në Javën X studentët punuan me mbledhjen dhe zbritjen me gojë deri në 100 dhe me varësinë e shumës e të diferencës nga përbërësit. Në Javën XI kaluan te shumëzimi me gojë, te pjesëtimi me shkrim me pjesëtues njëshifror dhe te varësia e prodhimit e të herësit. Java XII ka tri detyra. E para është të tregojë se katër algoritmet me shkrim janë zbërthime sipas vlerës vendore, të shkruara shkurt. E dyta është të zgjerojë numrat përtej mijëshes, te klasat e mijësheve, milionave dhe miliardave. E treta është të formulojë dhe të vërtetojë renditjen në $\mathbb{N}_0$, që deri tani është përdorur pa u thënë.

Algoritmet nuk janë temë e re për studentin, i cili i di të gjitha që nga shkolla. Prandaj synimi i leksionit nuk është mësimi i procedurave. Synimi është që studenti të shpjegojë pse procedura jep rezultatin e saktë, të njohë gabimet tipike dhe të dallojë një gabim procedural nga një vështirësi me vlerën vendore. Kjo është njohuria që Ball et al. (2008) e quajnë njohuri e specializuar e përmbajtjes: njohuri matematikore që i duhet mësuesit, jo çdo të rrituri që di të llogarisë.

1.2 Rezultatet e të nxënit

Në përfundim të punës në auditor dhe të studimit individual, studenti duhet të jetë në gjendje:

- të justifikojë me shkrimin dhjetor dhe me vetitë e veprimeve çdo hap të algoritmeve të mbledhjes, zbritjes, shumëzimit dhe pjesëtimit me shkrim;
- të vërtetojë kufijtë e bartjes në mbledhje dhe në shumëzim me një faktor njëshifror;
- të krahasojë rigrupimin dhe shtimin e barabartë te zbritja dhe të tregojë cilën veti përdor secila metodë;
- të shpjegojë zhvendosjen e rreshtit të dytë te shumëzimi dhe vlerësimin e shifrës së herësit kur pjesëtuesi është dyshifror;
- të lexojë, të shkruajë dhe të krahasojë numra deri në klasën e miliardave dhe të shpjegojë rolin e zeros brenda klasës;
- të vërtetojë vetitë e renditjes në $\mathbb{N}_0$ dhe rregullin e krahasimit sipas shifrave;

- të analizojë një gabim të nxënësit si hipotezë, të hartojë pyetjen që e dallon dhe të propozojë një ndërhyrje që kontrollohet në rast të ri.

1.3 Organizimi i katër orëve akademike

Tabela 1. *Organizimi orientues i katër orëve akademike*

Ora	Bërthama	Puna e studentit	Çfarë prodhon studenti
I · 45 min	Shkrimi dhjetor; mbledhja dhe zbritja me shkrim	Krahasim i zbërthimit me algoritmin; analizë e rigrupimit	Justifikim i bartjes dhe i rigrupimit
II · 45 min	Shumëzimi dhe pjesëtimi me shkrim	Lidhja e algoritmit me modelin e syprinës; vlerësimi i shifrës së herësit	Zgjidhje e komentuar me kontroll
III · 45 min	Klasat e numrave dhe renditja në $\mathbb{N}_0$	Lexim, shkrim, krahasim; vërtetim i rregullit të krahasimit	Tabelë klasash dhe argument i shkruar
IV · 45 min	Diagnostikim, hartim mësimi, vlerësim	Analizë e punës së nxënësit; plan ndërhyrjeje	Fletë diagnostike dhe test i shkurtër

Për menaxhimin e ngarkesës, materiali ndahet në tri shtresa:

- *Në auditor* trajtohen detyrimisht kapitujt 2–9, pa vërtetimet e plota, dhe seksioni 10.1.
- *Në seminar* punohen vërtetimet (pohimet 3.1, 4.1, 5.1, 6.1, 8.1, 9.1 dhe 9.2), njësitë profesionale, rastet e kapitullit 10, kapitulli 11 dhe detyrat 12.1–12.6.
- *Në studim individual* mbeten detyrat 12.7, banka e problemeve në kapitullin 15 dhe puna e pavarur në 14.2; testi i kapitullit 13 përdoret për vetëkontroll ose për vlerësim.

Teksti nuk është menduar të lexohet i tëri në auditor. Ndarja mund të përshtatet me orarin e lëndës.

2. Shkrimi dhjetor: baza e përbashkët e algoritmeve

NË KËTË KAPITULL

- Trajta dhjetore e një numri
- Algoritmi si zbërthim i shkruar shkurt
- Tri pyetje për çdo algoritëm

2.1 Trajta dhjetore e një numri

Çdo numër natyror shkruhet si shumë e shumëfishave të fuqive të 10-ës. Për numrin 4 708 kemi

$$4\,708 = 4 \times 1\,000 + 7 \times 100 + 0 \times 10 + 8. \tag{2.1}$$

Në përgjithësi, një numër me k + 1 shifra shkruhet $n = a_k \times 10^k + \ldots + a_1 \times 10 + a_0$, ku çdo shifër a_i është një nga numrat 0, 1, …, 9 dhe, për $n \geq 1$, shifra e parë a_k nuk është zero; numri zero shkruhet 0. Pozicioni i shifrës tregon *rendin*: rendi i njësive, i dhjetësheve, i qindësheve, i mijësheve. Çdo rend vlen dhjetë herë aq sa rendi në të djathtë të tij. Në kapitullin 8 do të vërtetojmë se kjo trajtë ekziston dhe është e vetme për çdo numër.

Barazimi (2.1) ka dy lexime që nxënësi duhet t'i ketë të dyja. Leximi i parë është *sipas rendeve*: 4 mijëshe, 7 qindëshe, 0 dhjetëshe, 8 njësi. Leximi i dytë është *sipas një rendi të vetëm*: 4 708 është edhe 47 qindëshe e 8 njësi, ose 470 dhjetëshe e 8 njësi. Fuson et al. (1997) i përshkruajnë këto si struktura konceptuale të ndryshme që fëmijët ndërtojnë për numrat shumëshifrorë. Leximi i dytë është ai që përdoret te rigrupimi në zbritje dhe te pjesëtimi me shkrim.

2.2 Algoritmi si zbërthim i shkruar shkurt

Katër algoritmet me shkrim kanë të njëjtën strukturë. Numrat zbërthehen sipas rendeve; veprimi kryhet rend pas rendi, me ndihmën e vetive të veprimeve; në fund rezultati rregullohet që të jetë përsëri në trajtë dhjetore. Katër algoritmet janë procedura të dallueshme, por të mbështetura në sistemin dhjetor pozicional dhe në vetitë përkatëse të veprimeve. Krahasuar me zbërthimin e gjatë, algoritmi i shkurtër ndryshon kryesisht radhën e punës dhe mënyrën e shkrimit: rregullimin e bën gjatë llogaritjes, jo në fund, dhe shkruan vetëm shifrat, jo vlerat e plota.

Ky vëzhgim ka pasojë didaktike. Kur nxënësi e mëson algoritmin si varg urdhrash pa e lidhur me zbërthimin, ai mund të marrë rezultate të sakta për një kohë të gjatë. Por kur harron një hap ose has një rast të ri, si zero në mes të numrit, nuk ka ku të mbështetet për ta rindërtuar. Kur e mëson si shkurtim të zbërthimit, kthehet te shkrimi i gjatë sa herë që një hap i bëhet i paqartë. Rittle-Johnson et al. (2015) argumentojnë se njohuria konceptuale dhe ajo procedurale zhvillohen duke ndikuar njëra-tjetrën. Për algoritmet me shkrim kjo do të thotë se kuptimi i

vlerës vendore e bën procedurën më të sigurt, dhe ushtrimi i procedurës sjell raste të reja për të menduar mbi vlerën vendore.

2.3 Tri pyetje për çdo algoritëm

Për secilin nga katër algoritmet e këtij leksioni do t'u përgjigjemi tri pyetjeve:

(a) Cili barazim e justifikon procedurën? Përgjigjja është gjithmonë një zbërthim i numrave sipas rendeve, i kombinuar me vetitë e veprimeve.

(b) Çfarë bën algoritmi kur rezultati i një rendi nuk është shifër? Kjo është bartja te mbledhja dhe te shumëzimi, rigrupimi te zbritja dhe këmbimi i mbetjes te pjesëtimi.

(c) Si e kontrollon nxënësi rezultatin pa e përsëritur të njëjtën procedurë? Përgjigjja është vlerësimi paraprak i madhësisë dhe veprimi i kundërt.

Pyetja (c) është e rëndësishme sepse përsëritja e të njëjtës procedurë shpesh përsërit edhe të njëjtin gabim. Nxënësi që e bën bartjen gabim në mbledhje do ta bëjë gabim edhe herën e dytë. Kontrolli me një veprim tjetër e zbulon gabimin pikërisht sepse nuk varet nga procedura që po kontrollohet.

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Çdo numër natyror ka trajtë dhjetore; pozicioni i shifrës tregon rendin, dhe çdo rend vlen dhjetë herë aq sa rendi në të djathtë.
- Një numër lexohet sipas rendeve, por edhe sipas një rendi të vetëm (4 708 janë 47 qindëshe e 8 njësi); leximi i dytë përdoret te rigrupimi dhe te pjesëtimi.
- Katër algoritmet janë procedura të dallueshme, të mbështetura në sistemin dhjetor pozicional dhe në vetitë përkatëse të veprimeve.
- Kontrolli me vlerësim dhe me veprimin e kundërt nuk varet nga procedura, prandaj e zbulon gabimin që përsëritja nuk e zbulon.

3. Mbledhja me shkrim

NË KËTË KAPITULL

- Mbledhja sipas rendeve
- Bartja dhe kufiri i saj
- Nga zbërthimi te shkrimi i shkurtër
- Vlerësimi dhe kontrolli i mbledhjes
- Njësi profesionale: shumat e kolonave pa bartje

3.1 Mbledhja sipas rendeve

Le të jenë

$$a = 100 \times a_2 + 10 \times a_1 + a_0 \quad \text{dhe} \quad b = 100 \times b_2 + 10 \times b_1 + b_0$$

dy numra treshifrorë. Me vetinë ndërruese, shoqëruese dhe shpërndarëse marrim

$$a + b = 100 \times (a_2 + b_2) + 10 \times (a_1 + b_1) + (a_0 + b_0). \tag{3.1}$$

Barazimi (3.1) thotë se mbledhim njësitë me njësitë, dhjetëshet me dhjetëshet dhe qindëshet me qindëshet. Kjo është arsyeja pse në algoritëm numrat vendosen në kolona, me shifrat e të njëjtit rend njëra nën tjetrën. Kur të gjitha shumat e kolonave janë shifra, si te 352 + 146 = 498, (3.1) është vetë rezultati në trajtë dhjetore. Por shumat $a_0 + b_0$, $a_1 + b_1$ dhe $a_2 + b_2$ mund të kalojnë 9. Atëherë ana e djathtë e (3.1) është e saktë si barazim, por nuk është më shkrim dhjetor, dhe duhet rregulluar.

3.2 Bartja dhe kufiri i saj

Rregullimi bëhet nga e djathta. Nëse $a_0 + b_0 \geq 10$, shkruajmë $a_0 + b_0 = 10 + s_0$, ku s_0 është shifër. Dhjetë njësitë formojnë një dhjetëshe, që i shtohet kolonës së dhjetësheve. Këtë hap e quajmë *bartje*; në shkollë thuhet edhe «e mbajmë mend». I njëjti hap përsëritet në çdo kolonë. Te 478 + 365, në njësi kemi

$$8 + 5 = 13 = 10 + 3:$$

shkruajmë 3 dhe bartim 1 dhjetëshe. Në dhjetëshe kemi 7 + 6 + 1 = 14: shkruajmë 4 dhe bartim 1 qindëshe. Në qindëshe kemi 4 + 3 + 1 = 8. Rezultati është 843 (Figura 1).

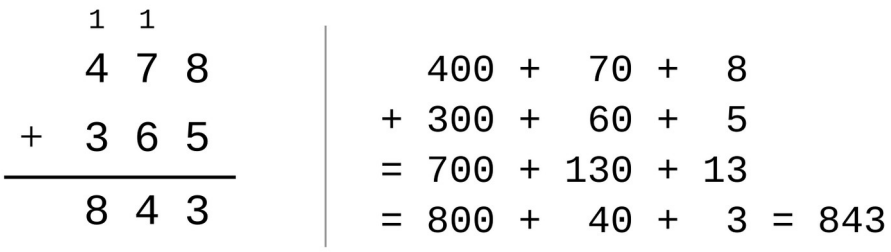


Figura 1. Mbledhja 478 + 365 = 843 (majtas) dhe zbërthimi që e justifikon (djathtas). Shifrat e vogla sipër kolonave janë bartjet: 13 njësi japin 1 dhjetëshe e 3 njësi; 14 dhjetëshe japin 1 qindëshe e 4 dhjetëshe.

Pohimi 3.1. (i) Në mbledhjen me shkrim të dy numrave, bartja në çdo kolonë është 0 ose 1.

(ii) Në mbledhjen me shkrim të m numrave, me $m \geq 2$, bartja në çdo kolonë është e shumta $m - 1$.

Vërtetim. Vërtetojmë (ii); (i) është rasti $m = 2$. Bëjmë induksion sipas kolonave, nga e djathta. Në kolonën e njësive nuk ka bartje të ardhur, dhe shuma e m shifrave është e shumta $9 \times m < 10 \times m$; prandaj bartja që del është e shumta $m - 1$. Le të ketë ardhur në një kolonë bartja $c \leq m - 1$. Shuma e kolonës është e shumta

$$9 \times m + (m - 1) = 10 \times m - 1 < 10 \times m,$$

prandaj edhe bartja që del është e shumta $m - 1$. ∎

Pohimi ka një përdorim praktik: nëse në mbledhjen e dy numrave nxënësi shkruan bartjen 2, ka gabuar patjetër, dhe gabimi ndodhet në atë kolonë ose në kolonën para saj. Në mbledhjen e tre numrave bartja 2 është e mundur, si te

$$999 + 999 + 999 = 2\,997.$$

3.3 Nga zbërthimi te shkrimi i shkurtër

Zbërthimi në të djathtë të Figurës 1, 700 + 130 + 13, është hap i ndërmjetëm i dobishëm. Nxënësi mbledh fillimisht çdo rend veçmas dhe vetëm pastaj i rregullon shumat. Kur kalon te algoritmi i shkurtër, ndryshon kryesisht radha: rregullimin e bën gjatë mbledhjes dhe jo pas saj. Ky kalim duhet bërë me zë. Mësuesi pyet: «Ku është 130-shi në algoritmin e shkurtër? Ku është 13-shi?» Nxënësi duhet të gjejë 3-shin dhe bartjen 1 te kolona e njësive, dhe 4-shin me bartjen 1 te kolona e dhjetësheve.

Rendi nga e djathta nuk është i detyrueshëm matematikisht. Mund të mbledhim edhe nga e majta, siç bëjmë shpesh me gojë:

$$400 + 300 = 700, \qquad 70 + 60 = 130,$$

$8 + 5 = 13$, dhe pastaj $700 + 130 + 13 = 843$. Algoritmi i shkurtër fillon nga e djathta sepse kështu çdo shifër e rezultatit shkruhet vetëm një herë: bartja e një kolone dihet para se të llogaritet

kolona pasuese. Kur nxënësi fillon nga e majta, duhet të kthehet e të ndryshojë shifra që i ka shkruar tashmë.

3.4 Vlerësimi dhe kontrolli i mbledhjes

Para llogaritjes, nxënësi vlerëson madhësinë me numra të rrumbullakuar: 478 + 365 është afër 500 + 350 = 850. Pas llogaritjes, mund ta kontrollojë rezultatin me zbritje: 843 − 365 = 478. Vlerësimi nuk e zbulon çdo gabim. Një rezultat si 853, me bartje të shtuar dy herë, i shpëton vlerësimit, ndërsa kontrolli me zbritje e kap. Nga ana tjetër, vlerësimi e zbulon menjëherë gabimin që del kur shumat e kolonave, 4 + 3 = 7, 7 + 6 = 13 dhe 8 + 5 = 13, shkruhen njëra pas tjetrës pa bartje:

$$478 + 365 = 71\,313,$$

një numër shumë larg vlerësimit 850.

3.5 Njësi profesionale: shumat e kolonave pa bartje

Shembull matematikor i zgjidhur. 478 + 365: 8 + 5 = 13, shkruajmë 3 dhe bartim 1; 7 + 6 + 1 = 14, shkruajmë 4 dhe bartim 1; 4 + 3 + 1 = 8. Rezultati është 843. Vlerësimi 500 + 350 = 850 e mbështet; kontrolli 843 − 365 = 478 e vërteton.

Paraqitja në klasë. Nxënësit ndërtojnë të dy numrat me pllaka qindëshe, shufra dhjetëshe dhe kube njësi, dhe i bashkojnë. Pastaj numërojnë: 13 kube. Mësuesi pyet çfarë mund të bëjnë me dhjetë prej tyre, dhe nxënësit i këmbejnë me një shufër. E njëjta gjë ndodh me 14 shufrat.

Pyetje diagnostikuese. «Dora ka shkruar 478 + 365 = 71 313. Sa është afërsisht 478 + 365? Ku e gjen 13-shin te rezultati i Dorës, dhe ku duhej të shkonte 1-shi i tij?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Shkrova atë që më doli në çdo kolonë: 4 + 3 = 7, 7 + 6 = 13 dhe 8 + 5 = 13.»

Analiza didaktike. Përgjigjja sugjeron se nxënësi i mbledh kolonat saktë, por nuk e lidh shumën e një kolone me rendin. Ai mund të mos e dijë se 13 njësi janë 1 dhjetëshe e 3 njësi, ose mund ta dijë, por të mos e ketë lidhur me shkrimin. Pyetja pasuese, «Sa dhjetëshe mund të formosh me 13 kube?», i dallon dy rastet.

Alternativë metodike. Nxënësi shkruan fillimisht zbërthimin e plotë, 700 + 130 + 13, dhe vetëm pastaj e rregullon. Për kontroll në rast të ri jepet 586 + 247; nëse nxënësi shkruan 833 pa ndihmë, e mbështet me vlerësimin 600 + 250 = 850 dhe shpjegon secilën bartje, kalimi te algoritmi i shkurtër ka filluar. Qëndrueshmëria kontrollohet në disa raste të tjera gjatë javëve pasuese.

> **Pyetje reflektuese për studentin.** Pse vlerësimi paraprak e zbulon gabimin 71 313, por nuk e zbulon gabimin 853? Çfarë kontrolli tjetër i duhet nxënësit?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Mbledhja me shkrim mbështetet te barazimi (3.1): mbledhim sipas rendeve dhe pastaj i rregullojmë shumat e kolonave.
- Bartja është rregullimi i një shume kolone që kalon 9; në mbledhjen e dy numrave ajo është 0 ose 1, në mbledhjen e m numrave e shumta m − 1.
- Algoritmi fillon nga e djathta që çdo shifër e rezultatit të shkruhet vetëm një herë.
- Vlerësimi kap gabimet e mëdha të vlerës vendore; kontrolli me zbritje kap edhe gabimet e vogla.

4. Zbritja me shkrim

NË KËTË KAPITULL

- Zbritja sipas rendeve dhe kushti i saj
- Rigrupimi
- Kur i zbritshmi ka zero
- Një metodë tjetër: shtimi i barabartë
- Kur zeroja përsëritet
- Njësi profesionale: zeroja te i zbritshmi

4.1 Zbritja sipas rendeve dhe kushti i saj

Për zbritjen, vetia shpërndarëse ndaj zbritjes jep

$$a - b = 100 \times (a_2 - b_2) + 10 \times (a_1 - b_1) + (a_0 - b_0). \tag{4.1}$$

Ky barazim ka kuptim në $\mathbb{N}_0$ vetëm kur në çdo kolonë $a_i \geq b_i$. Atëherë zbresim kolonë pas kolone dhe nuk ka nevojë për asnjë rregullim, si te 865 − 432 = 433. Kur në një kolonë $a_i < b_i$, diferenca e asaj kolone nuk është numër natyror, dhe duhet ta ndryshojmë mënyrën si është shkruar i zbritshmi. Kjo është ideja e rigrupimit.

4.2 Rigrupimi

Te 752 − 368, në kolonën e njësive 2 < 8. Një dhjetëshe e të zbritshmit këmbehet me dhjetë njësi; pastaj, në kolonën e dhjetësheve 4 < 6, një qindëshe këmbehet me dhjetë dhjetëshe. I zbritshmi shkruhet si 6 qindëshe, 14 dhjetëshe dhe 12 njësi:

$$752 = 600 + 140 + 12. \tag{4.2}$$

Numri nuk ndryshon; ndryshon vetëm organizimi i tij. Tani zbresim në çdo kolonë: 12 − 8 = 4, 14 − 6 = 8, 6 − 3 = 3, dhe marrim 384 (Figura 2a). Kontrolli 384 + 368 = 752 e vërteton rezultatin.



(a) e saktë (b) gabim: e vogla nga e madhja

Figura 2. Zbritja 752 − 368: (a) me rigrupim, ku shifrat e vogla tregojnë të zbritshmin e rishkruar si 6 Q, 14 D, 12 N; (b) gabimi «e vogla nga e madhja», ku në çdo kolonë zbritet shifra më e vogël nga më e madhja.

Figura 2b tregon një gabim të njohur. Nxënësi nuk rigrupon, por në çdo kolonë zbret shifrën më të vogël nga më e madhja: 8 − 2 = 6, 6 − 5 = 1, 7 − 3 = 4. Rezultati 416 mund të tregojë se nxënësi e kupton zbritjen si «hiq numrin e vogël nga i madhi» edhe brenda kolonës, pa e lidhur me të zbritshmin dhe zbritësin. Brown dhe Burton (1978) treguan se shumë gabime të nxënësve në zbritje nuk janë të rastësishme, por vijnë nga një procedurë e qëndrueshme me një hap të gabuar, që ata e quajtën *defekt procedural* (bug). Një defekt i tillë jep rezultate të gabuara në mënyrë të parashikueshme. Kjo e bën të mundur diagnostikimin me detyra të zgjedhura, por nuk e bën të sigurt nga një përgjigje e vetme.

4.3 Kur i zbritshmi ka zero

Rasti më i vështirë është kur i zbritshmi ka zero në rendin nga i cili duhet të këmbejmë. Te 403 − 168, në njësi 3 < 8, por nuk ka asnjë dhjetëshe për ta këmbyer. Duhet të këmbejmë fillimisht një qindëshe me dhjetë dhjetëshe dhe pastaj një nga këto dhjetëshe me dhjetë njësi. I zbritshmi shkruhet 300 + 90 + 13, dhe zbritja jep 13 − 8 = 5, 9 − 6 = 3, 3 − 1 = 2, pra 235 (Figura 3).

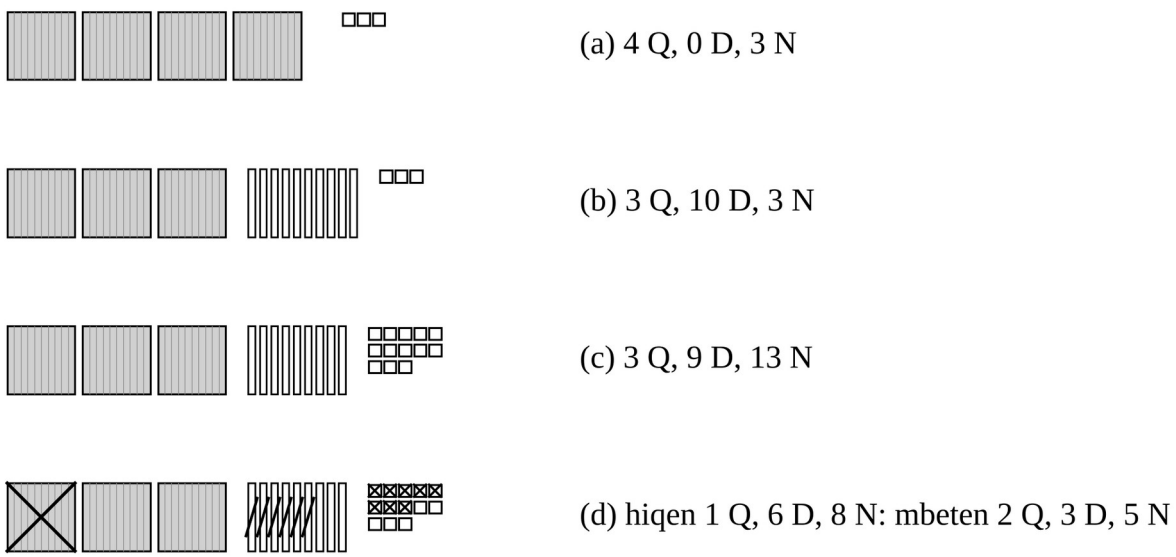


Figura 3. Zbritja 403 − 168 me dy këmbime: (a) 4 Q, 0 D, 3 N; (b) një qindëshe këmbehet me 10 dhjetëshe; (c) një dhjetëshe këmbehet me 10 njësi: 3 Q, 9 D, 13 N; (d) pas zbritjes mbeten 2 Q, 3 D, 5 N.

Shkrimi 403 = 300 + 90 + 13 tregon menjëherë nëse të dy këmbimet janë bërë saktë. Me nxënësin mund ta përdorim si kontroll: «Mblidh numrat që shkrove sipër kolonave. A të del 403?» Ky kontroll e zbulon gabimin e pyetjes hyrëse, siç tregon pohimi pasues.

Pohimi 4.1. Le të jetë

$$a = 100 \times a_2 + a_0$$

një numër treshifror me zero në rendin e dhjetësheve dhe

$$b = 100 \times b_2 + 10 \times b_1 + b_0,$$

me $a_2 > b_2$ dhe $a_0 < b_0$. Nëse nxënësi shkruan 9 sipër zeros dhe $a_0 + 10$ sipër njësive, por e lë a_2 të pandryshuar, dhe pastaj zbret saktë sipas kolonave, rezultati i tij është $(a - b) + 100$. Për 403 − 168 ky defekt jep 335 = 235 + 100.

Vërtetim. Pas shkrimit të nxënësit, numri sipër kolonave është

$$100 \times a_2 + 10 \times 9 + (a_0 + 10) = 100 \times a_2 + a_0 + 100 = a + 100.$$

Në çdo kolonë zbritja është e mundur: $a_0 + 10 \geq b_0$, $9 \geq b_1$ dhe $a_2 \geq b_2$. Prandaj, sipas (4.1), zbritja sipas kolonave jep saktësisht

$$(a + 100) - b = (a - b) + 100.$$

∎

Pohimi jep dy mjete për mësuesin. I pari është diagnostik: kur rezultati del saktësisht 100 më i madh, defekti «zeroja bëhet 9, por qindëshja nuk zvogëlohet» është një hipotezë e fortë, që mund të provohet me një rast të dytë të ndërtuar me të njëjtën strukturë, si 502 − 247. I dyti është kontrolli që i duhet nxënësit: shuma e numrave sipër kolonave,

$$400 + 90 + 13 = 503,$$

nuk është 403. Ky kontroll nuk kërkon të dihet rezultati i saktë.

4.4 Një metodë tjetër: shtimi i barabartë

Zbritjen me shkrim mund ta bëjmë edhe pa rigrupim, me *metodën e shtimit të barabartë*. Te 752 − 368, kur në njësi kemi 2 < 8, të zbritshmit i shtojmë 10 njësi dhe zbritësit 1 dhjetëshe. Në njësi marrim 12 − 8 = 4. Në dhjetëshe zbritësi ka tani 6 + 1 = 7 dhjetëshe, dhe 5 < 7; i shtojmë të zbritshmit 10 dhjetëshe dhe zbritësit 1 qindëshe: 15 − 7 = 8. Në qindëshe, 7 − (3 + 1) = 3. Rezultati është përsëri 384.

Metoda mbështetet te ruajtja e diferencës nga Java

$$\mathrm{X}\colon\ \mathrm{a} - \mathrm{b} = (\mathrm{a} + \mathrm{d}) - (\mathrm{b} + \mathrm{d}).$$

Në çdo hap të dy numrave u shtojmë të njëjtën sasi, njërit në trajtën e 10 njësive të një rendi, tjetrit në trajtën e 1 njësie të rendit pasues. Krahasimi i dy metodave është i dobishëm për studentin, sepse dy procedura që duken shumë të ndryshme mbështeten te dy veti të ndryshme: rigrupimi ndryshon vetëm organizimin e të zbritshmit, ndërsa shtimi i barabartë ndryshon të dy numrat pa ndryshuar diferencën. Mësuesi nuk ka pse ta mësojë këtë metodë në klasë, por duhet ta njohë, sepse një nxënës mund ta ketë mësuar nga familja.

4.5 Kur zeroja përsëritet

Me numrat katërshifrorë rasti i zeros mund të përsëritet. Te 3 004 − 1 657, në njësi 4 < 7, ndërsa në dhjetëshe dhe në qindëshe nuk ka asgjë për të këmbyer. Duhet të këmbejmë një mijëshe me dhjetë qindëshe, një qindëshe me dhjetë dhjetëshe dhe një dhjetëshe me dhjetë njësi. I zbritshmi shkruhet

$$3\,004 = 2\,000 + 900 + 90 + 14, \tag{4.3}$$

dhe zbritja jep 14 − 7 = 7, 9 − 5 = 4, 9 − 6 = 3, 2 − 1 = 1, pra 1 347. Kontrolli:

$$1\,347 + 1\,657 = 3\,004.$$

Në vend të tri këmbimeve të njëpasnjëshme, mund ta lexojmë 3 004 si 300 dhjetëshe e 4 njësi, një lexim sipas një rendi të vetëm nga seksioni 2.1. Një dhjetëshe e këmbejmë me dhjetë njësi dhe na mbeten 299 dhjetëshe e 14 njësi, pra pikërisht koeficientët 2, 9, 9 dhe 14 të zbërthimit (4.3); 14-a nuk është shifër, por numri i njësive pas këmbimit. Ky lexim i bën të tria këmbimet një hap të vetëm.

4.6 Njësi profesionale: zeroja te i zbritshmi

Shembull matematikor i zgjidhur. 403 − 168: pas rigrupimit 403 = 300 + 90 + 13 marrim 13 − 8 = 5, 9 − 6 = 3, 3 − 1 = 2. Pra 403 − 168 = 235. Kontrolli: 235 + 168 = 403.

Paraqitja në klasë. Nxënësit kanë 4 pllaka qindëshe dhe 3 kube. Duhet të heqin 1 qindëshe, 6 dhjetëshe dhe 8 njësi. Mësuesi pyet: «A ke mjaft njësi? A ke dhjetëshe? Çfarë mund të këmbesh?» Vetëm pasi materiali është rigrupuar, nxënësi shkruan në kolona.

Pyetje diagnostikuese. «Shoku yt ka shkruar 403 − 168 = 335. Sipër zeros ka 9 dhe sipër 3-shit 13, por 4-shi ka mbetur 4. Mblidh numrat sipër kolonave: a të del 403?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Del 400 + 90 + 13 = 503. Pra ka marrë 100 nga askund. Duhej ta bënte 4-shin 3.»

Analiza didaktike. Nxënësi që jep këtë përgjigje e lidh rigrupimin me ruajtjen e sasisë dhe ka gjetur një kontroll që mund ta përdorë vetë. Por mësuesi nuk duhet të përfundojë se nxënësi që shkroi 335 nuk e kupton rigrupimin. Mund të ketë harruar një hap në një procedurë që përndryshe e njeh. Pohimi 4.1 sugjeron provën: një ushtrim i dytë me të njëjtën strukturë, si 502 − 247, dhe një ushtrim pa zero, si 752 − 368. Nëse defekti shfaqet vetëm te i pari, hipoteza e defektit me zeron forcohet.

Alternativë metodike. Pas çdo rigrupimi, nxënësi e shkruan të zbritshmin e ri në një rresht më vete dhe e mbledh. Për kontroll në rast të ri jepet 3 004 − 1 657, ku nxënësi duhet të shpjegojë pse sipër dy zerove shkruhen 9.

Pyetje reflektuese për studentin. Formuloni dhe vërtetoni një pohim të ngjashëm me pohimin 4.1 për të zbritshmin katërshifror 3 004, kur nxënësi i bën dy zerot 9, por e lë 3-shin të pandryshuar. Me sa ndryshon rezultati?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Zbritja sipas rendeve (4.1) ka kuptim në $\mathbb{N}_0$ vetëm kur në çdo kolonë shifra e të zbritshmit nuk është më e vogël se ajo e zbritësit.
- Rigrupimi ndryshon organizimin e të zbritshmit, jo vlerën e tij; kjo kontrollohet duke mbledhur numrat sipër kolonave.
- Defekti «zeroja bëhet 9, por qindëshja nuk zvogëlohet» jep gjithmonë rezultat 100 më të madh; kjo e bën diagnostikimin të mundshëm, por jo të sigurt nga një përgjigje e vetme.
- Shtimi i barabartë mbështetet te ruajtja e diferencës, jo te rigrupimi.

5. Shumëzimi me shkrim

NË KËTË KAPITULL

- Shumëzimi me një faktor njëshifror
- Shumëzimi me një faktor dyshifror
- Zeroja në faktor
- Njësi profesionale: rreshti i dytë pa zhvendosje

5.1 Shumëzimi me një faktor njëshifror

Sipas marrëveshjes, 3×247 do të thotë 3 grupe me nga 247. Në algoritmin me shkrim numri 247 vendoset sipër dhe 3 poshtë tij, por kjo është vetëm mënyrë shkrimi. Vetia shpërndarëse jep

$$3 \times 247 = 3 \times 200 + 3 \times 40 + 3 \times 7 = 600 + 120 + 21 = 741. \tag{5.1}$$

Ky është shkrimi i gjatë, me *prodhime të pjesshme*. Algoritmi i shkurtër bën të njëjtat prodhime nga e djathta dhe i rregullon menjëherë. $3 \times 7 = 21$: shkruajmë 1 dhe bartim 2 dhjetëshe. $3 \times 4 = 12$ dhjetëshe, me 2 të bartura bëhen 14 dhjetëshe: shkruajmë 4 dhe bartim 1 qindëshe. $3 \times 2 = 6$ qindëshe, me 1 të bartur bëhen 7. Rezultati është 741.

Pohimi 5.1. Në shumëzimin me shkrim të një numri me një faktor njëshifror $m \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, bartja në çdo kolonë është e shumta $m - 1$, pra në çdo rast e shumta 8. Për $m = 0$, prodhimi dhe të gjitha bartjet janë zero.

Vërtetim. Induksion sipas kolonave, nga e djathta. Në kolonën e njësive prodhimi $m \times a_0$ është e shumta $9 \times m < 10 \times m$, prandaj bartja është e shumta $m - 1$. Nëse në një kolonë ka ardhur bartja $c \le m - 1$, atëherë $m \times a_i +$

$$c \le 9 \times m + m - 1 = 10 \times m - 1 < 10 \times m,$$

dhe bartja që del është përsëri e shumta $m - 1$. Meqë $m \le 9$, bartja është e shumta 8. ∎

Ndryshe nga mbledhja e dy numrave, këtu bartja mund të jetë më e madhe se 1. Pohimi shpjegon edhe një gabim të shpeshtë: nxënësi e shton bartjen te shifra *para* se të shumëzojë, jo te prodhimi. Për 3×247 ky gabim jep $3 \times (4 + 2) = 18$ në vend të $3 \times 4 + 2 = 14$ dhe çon te rezultati 981. Vlerësimi $3 \times 250 = 750$ e zbulon menjëherë.

5.2 Shumëzimi me një faktor dyshifror

Për 34×26 vetia shpërndarëse, e zbatuar dy herë, jep katër prodhime të pjesshme. Në modelin e syprinës ato janë katër drejtkëndësha (Figura 4a):

$$34 \times 26 = 30 \times 20 + 30 \times 6 + 4 \times 20 + 4 \times 6 = 600 + 180 + 80 + 24 = 884. \tag{5.2}$$

Algoritmi i shkurtër i bashkon këto katër prodhime në dy rreshta, sipas zbërthimit 26 = 20 + 6. Rreshti i parë, 34 × 6 = 204, përmbledh dy drejtkëndëshat me lartësi 6. Rreshti i dytë, 34 × 20 = 680, përmbledh dy drejtkëndëshat me lartësi 20. Në algoritmin tradicional rreshti i dytë shkruhet 68, i zhvendosur një vend majtas, ose me 0 në vendin e njësive (Figura 4b).

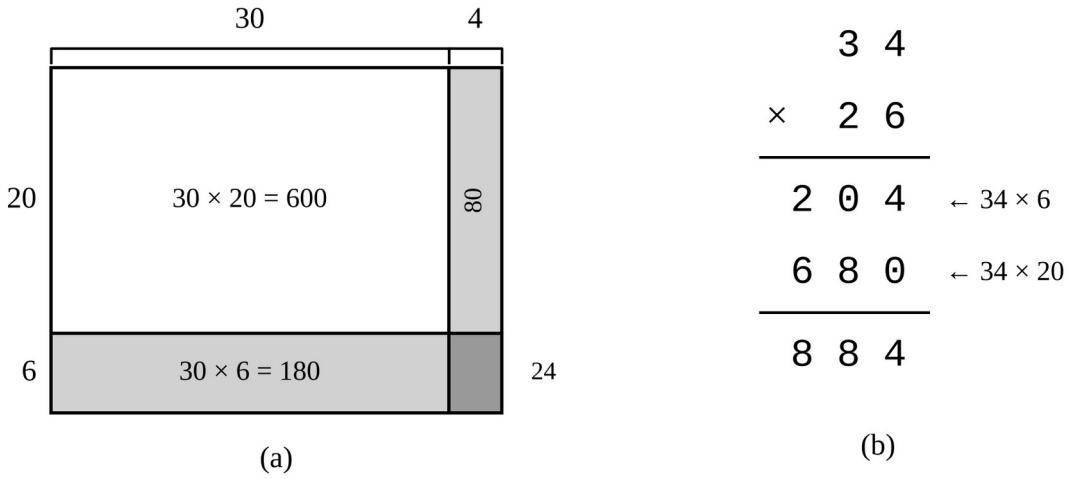


Figura 4. Shumëzimi 34 × 26: (a) modeli i syprinës me katër prodhime të pjesshme, 600, 80, 180 dhe 24; (b) algoritmi me shkrim, ku rreshti i parë, 204, përmbledh dy pjesët e poshtme të drejtkëndëshit dhe rreshti i dytë, 680, dy pjesët e sipërme.

Zhvendosja e rreshtit të dytë është hapi ku algoritmi fsheh më shumë. Ma (1999), në studimin e saj krahasues me mësues amerikanë dhe kinezë, përshkruan se shumë mësues e shpjegonin zhvendosjen vetëm si rregull vendosjeje, «rreshti i dytë fillon nën dhjetëshet», ndërsa të tjerë e lidhnin me faktin se shifra 2 e faktorit të dytë vlen 20 dhe, pra, me 34 × 20 dhe me shpërndarjen. Vetëm shpjegimi i dytë e lejon nxënësin ta rindërtojë rregullin kur e harron dhe ta zbatojë me faktorë treshifrorë. Nxënësi që nuk e zhvendos rreshtin merr 204 + 68 = 272. Në fakt ai ka llogaritur

$$34 \times 6 + 34 \times 2 = 34 \times 8,$$

pra shifrën 2 e ka marrë si 2 njësi.

5.3 Zeroja në faktor

Te 4 × 205, zbatimi i algoritmit jep: 4 × 5 = 20, shkruajmë 0 dhe bartim 2; 4 × 0 + 2 = 2, shkruajmë 2; 4 × 2 = 8. Rezultati është 820. Një gabim i mundshëm është të shkruhet 0 te dhjetëshet, me arsyetimin «zero herë çdo gjë është zero», duke harruar bartjen. Rezultati i gabuar del 800.

Ky rast ka diçka të veçantë për kontrollin. Vlerësimi $4 \times 200 = 800$ nuk e zbulon gabimin, sepse rezultati i gabuar përputhet pikërisht me vlerësimin. E zbulon kontrolli me veprimin e kundërt,

$$800 : 4 = 200 \neq 205,$$

ose llogaritja me zbërthim

$$4 \times 205 = 800 + 4 \times 5 = 820.$$

Studenti duhet të dijë se vlerësimi i përafërt kap gabimet e mëdha të vlerës vendore, jo çdo gabim.

5.4 Njësi profesionale: rreshti i dytë pa zhvendosje

Shembull matematikor i zgjidhur. $34 \times 26 = 34 \times (20 + 6) = 34 \times 20 + 34 \times 6 = 680 + 204 = 884$. Vlerësimi $30 \times 30 = 900$ e mbështet; kontrolli $884 : 26 = 34$ e vërteton.

Paraqitja në klasë. Nxënësit vizatojnë drejtkëndëshin 34×26 në letër me katrorë dhe e ndajnë me dy vija, sipas $30 + 4$ dhe $20 + 6$. Llogaritin katër pjesët dhe pastaj i grupojnë sipas rreshtave të algoritmit: cilat pjesë bëjnë 204 dhe cilat 680?

Pyetje diagnostikuese. «Agroni ka shkruar $34 \times 26 = 272$. Gjej në drejtkëndësh pjesën që i mungon llogaritjes së tij. Sa është afërsisht 34×26?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Pjesa e sipërme përfaqëson 20 rreshta, por ai e ka llogaritur sikur të ishin vetëm 2: shkroi 68 në vend të 680.»

Analiza didaktike. Rezultati 272 mund të tregojë se nxënësi e njeh algoritmin si varg hapash, por nuk e lidh shifrën e dhjetësheve me 20. Mund të jetë edhe gabim i rastësishëm në shkrim. Për t'i dalluar, mësuesi jep 23×14: nëse nxënësi shkruan përsëri rreshtin e dytë pa zhvendosje, $92 + 23 = 115$, hipoteza e parë forcohet; nëse jo, hipoteza e një gabimi të rastësishëm bëhet më e besueshme. Diferenca $680 - 68 = 612 = 34 \times 18$ tregon sa mungon në rezultat.

Alternativë metodike. Për një kohë nxënësi shkruan zeron e rreshtit të dytë dhe, pranë rreshtave, prodhimet e plota: «34×6» dhe «34×20». Kontrolli në rast të ri: 47×35, me vlerësimin $50 \times 35 = 1\,750$.

> **Pyetje reflektuese për studentin.** Si do ta shpjegonit zhvendosjen e rreshtit të tretë te shumëzimi me faktor treshifror, për shembull 34 × 126, pa përdorur fjalën «zhvendos»?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Shumëzimi me shkrim është shuma e prodhimeve të pjesshme të vetisë shpërndarëse; me faktor njëshifror $m \geq 1$, bartja është e shumta $m - 1$ dhe i shtohet prodhimit, jo shifrës.
- Me faktor dyshifror, dy rreshtat e algoritmit përmbledhin katër pjesët e modelit të syprinës; zhvendosja do të thotë shumëzim me dhjetëshe.
- Rreshti i dytë pa zhvendosje do të thotë shumëzim me shifrën e dhjetësheve si me njësi.
- Vlerësimi i përafërt nuk kap çdo gabim: te $4 \times 205 = 800$ gabimin e kap veprimi i kundërt.

6. Pjesëtimi me shkrim: pjesëtuesi dyshifror dhe të pjesëtueshmit katërshifrorë

NË KËTË KAPITULL

- Çfarë mbetet nga Java XI
- Të pjesëtueshmit katërshifrorë dhe zeroja
- Pjesëtuesi dyshifror: vlerësimi i shifrës së herësit
- Dy vlerësime që e rrethojnë shifrën
- Kontrolli i pjesëtimit me mbetje
- Njësi profesionale: zeroja në herës me të pjesëtueshëm katërshifror

6.1 Çfarë mbetet nga Java XI

Në Javën XI pamë se algoritmi i pjesëtimit ruan në çdo hap invariantin

$$\mathrm{P_k} = \mathrm{b} \times \mathrm{q_k} + \mathrm{r_k},$$

me $0 \le \mathrm{r_k} < \mathrm{b}$, ku $\mathrm{P_k}$ është pjesa e lexuar e të pjesëtueshmit. Pamë edhe se herësi është numri më i madh q për të cilin $\mathrm{b} \times \mathrm{q} \le \mathrm{a}$, pra

$$\mathrm{b} \times \mathrm{q} \le \mathrm{a} < \mathrm{b} \times (\mathrm{q}+1), \quad \mathrm{b} > 0. \tag{6.1}$$

Këtu zgjerojmë dy gjëra. Të pjesëtueshmit bëhen katërshifrorë, dhe zeroja në herës mund të shfaqet më shpesh. Pjesëtuesi bëhet dyshifror, dhe shifra e herësit nuk lexohet më nga tabela e shumëzimit: duhet vlerësuar dhe, nëse duhet, korrigjuar.

6.2 Të pjesëtueshmit katërshifrorë dhe zeroja

Te 2 436 : 6, ndajmë sipas rendeve. 2 mijëshe nuk mjaftojnë për 6 grupe, prandaj i lexojmë si 24 qindëshe. 24 qindëshe : 6 = 4 qindëshe për grup, pa mbetje. 3 dhjetëshe nuk mjaftojnë që secili nga 6 grupet të marrë një: çdo grup merr 0 dhjetëshe, dhe në herës shkruajmë 0. Tri dhjetëshet këmbehen me 30 njësi; me 6 njësitë bëhen 36 njësi, dhe 36 : 6 = 6. Herësi është 406, sepse 6 × 406 = 2 436.

Gabimi tipik është 2 436 : 6 = 46. Ai mund të vijë nga e njëjta arsye si te 816 : 4 = 24 në Javën XI: hapi «3 dhjetëshe nuk mjaftojnë» nuk jep asnjë shifër që shihet. Vlerësimi e zbulon:

$$6 \times 400 = 2\,400 \le 2\,436,$$

ndaj herësi duhet të jetë të paktën 400.

6.3 Pjesëtuesi dyshifror: vlerësimi i shifrës së herësit

Te 864 : 24, 8 qindëshe nuk mjaftojnë për 24 grupe, prandaj lexojmë 86 dhjetëshe. Sa dhjetëshe merr çdo grup? Tabela e 24-ës nuk dihet përmendsh, prandaj shifrën e herësit e vlerësojmë dhe e kontrollojmë me kushtin (6.1). Një vlerësim i zakonshëm merr vetëm shifrat e para: 8 : 2 = 4. Por 24 × 4 = 96 > 86, ndaj 4 është shumë. Provojmë 3: 24 × 3 = 72 ≤ 86 < 96 = 24 × 4. Shifra e dhjetësheve në herës është 3, dhe mbeten 86 − 72 = 14 dhjetëshe. Këto bëhen 140 njësi; me 4 njësitë, 144. Vlerësimi 14 : 2 = 7 jep

$$24 \times 7 = 168 > 144;$$

provojmë 6: 24 × 6 = 144. Herësi është 36 dhe mbetja 0 (Figura 5).

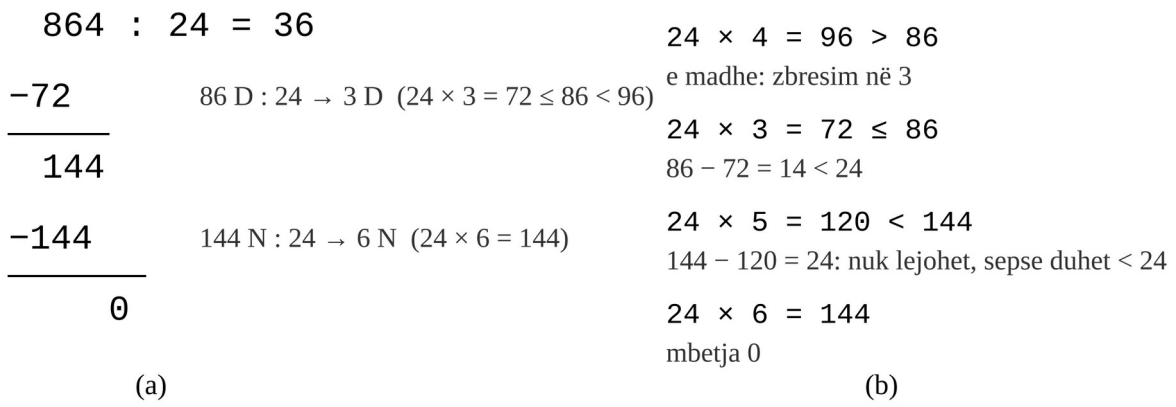


Figura 5. Pjesëtimi 864 : 24 = 36: (a) algoritmi me shkrim, me kushtin që përcakton çdo shifër të herësit; (b) provat me vlerësim: kur prodhimi e kalon pjesën e lexuar, shifra zvogëlohet; kur mbetja nuk është më e vogël se pjesëtuesi, shifra rritet.

Provat kanë një rregull të thjeshtë, që del drejtpërdrejt nga (6.1). Nëse b × t është më i madh se pjesa e lexuar, shifra t është shumë e madhe. Nëse mbetja pas zbritjes nuk është më e vogël se b, shifra t është shumë e vogël. Vetëm kur të dy kushtet plotësohen, t është shifra e saktë. Nxënësi që ka mësuar vetëm «shumëzo dhe zbrit» mund të vazhdojë me mbetjen 24 te pjesëtimi 144 : 24 me shifrën 5, sepse zbritja 144 − 120 = 24 është e mundur. Kushti r < b e ndalon.

6.4 Dy vlerësime që e rrethojnë shifrën

Vlerësimi me shifrat e para nuk është i rastësishëm. Ai mund të dalë i madh, por kurrë i vogël. Ky fakt i jep mësuesit një strategji: nëse fillon nga ky vlerësim, duhet vetëm të zbresë, jo të lëvizë në të dy drejtimet.

Pohimi 6.1. Le të jetë

$$b = 10 \times b_1 + b_0$$

një pjesëtues dyshifror, me $b_1 \geq 1$, dhe P një numër i plotë jonegativ me $P < 10 \times b$. Le të jetë t herësi i P me b. Atëherë

(i) herësi i P me $10 \times b_1$ nuk është më i vogël se t;
(ii) herësi i P me $10 \times (b_1 + 1)$ nuk është më i madh se t.

Vërtetim. Nga (6.1) kemi $b \times t \leq P$. (i) Meqë $10 \times b_1 \leq b$, kemi $(10 \times b_1) \times t \leq b \times t \leq P$. Sipas (6.1), herësi i P me $10 \times b_1$ është numri më i madh q me $(10 \times b_1) \times q \leq P$; prandaj ai është të paktën t. (ii) Le të jetë u herësi i P me $10 \times (b_1 + 1)$. Atëherë $10 \times (b_1 + 1) \times u \leq P$. Meqë $b < 10 \times (b_1 + 1)$, kemi $b \times u \leq 10 \times (b_1 + 1) \times u \leq P$, dhe sipas (6.1) $u \leq t$. ∎

Te 86 : 24, pjesëtuesi i rrumbullakuar poshtë, 20, jep 86 : 20 → 4, ndërsa ai i rrumbullakuar lart, 30, jep 86 : 30 → 2. Shifra e saktë, 3, ndodhet ndërmjet tyre. Vini re se kufijtë varen vetëm nga shifra e dhjetësheve të pjesëtuesit: për 86 dhe pjesëtuesit 21 ose 29, kufijtë mbeten 2 dhe 4. Ndryshon vetëm vendi i shifrës së saktë ndërmjet tyre (4 për 21, 2 për 29). Vlerësimi i sipërm mund edhe ta kalojë 9-ën, për shembull për P = 180 dhe b = 19 jep 180 : 10 → 18, ndërsa shifra e herësit nuk e kalon kurrë 9; prandaj kandidati i parë merret e shumta 9. Për nxënësit e arsimit fillor mjafton përvoja me disa raste të zgjedhura mirë; vërtetimi është për studentin.

6.5 Kontrolli i pjesëtimit me mbetje

Pjesëtimin me shkrim e kontrollojmë me barazimin e teoremës së pjesëtimit dhe me kushtin për mbetjen. Për 875 : 24 algoritmi jep herësin 36 dhe mbetjen 11, sepse

$$24 \times 36 + 11 = 875$$

dhe $11 < 24$. Kontrolli ka dy pjesë, dhe nxënësi duhet t'i bëjë të dyja: pa kushtin $r < b$, edhe

$$875 = 24 \times 35 + 35$$

do të ishte barazim i vërtetë.

6.6 Njësi profesionale: zeroja në herës me të pjesëtueshëm katërshifror

Shembull matematikor i zgjidhur. 2 436 : 6: 24 qindëshe : 6 = 4 qindëshe; 3 dhjetëshe : 6 = 0 dhjetëshe, mbeten 3 dhjetëshe; 36 njësi : 6 = 6 njësi. Herësi është 406. Kontrolli: 6 × 406 = 2 436.

Paraqitja në klasë. Nxënësit përdorin tabelën me kolonat Q, D, N mbi vijën e herësit. Në çdo hap duhet të shkruajnë një shifër në kolonën përkatëse, edhe kur ajo është zero.

Pyetje diagnostikuese. «Blerina shkroi 2 436 : 6 = 46. Pa e bërë pjesëtimin nga e para, si mund ta dish nëse kjo mund të jetë e vërtetë?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «6 × 46 bën rreth 300, jo 2 436. Herësi duhet të jetë mbi 400, sepse 6 × 400 = 2 400.»

Analiza didaktike. Nxënësi përdor vlerësimin dhe e lidh gabimin me madhësinë e herësit. Përgjigjja 46 të çon fort te hipoteza se zeroja ka humbur, por mund të ketë edhe shpjegime të tjera, si leximi i gabuar i 24 si 24 dhjetëshe. Mësuesi i kërkon nxënësit të tregojë me zë çfarë bëri me dhjetëshet.

Alternativë metodike. Pas disa ushtrimeve me kolona, mësuesi i heq ato dhe shikon nëse zeroja vazhdon të shkruhet. Kontrolli në rast të ri: 3 248 : 8 = 406.

Pyetje reflektuese për studentin. Krahasoni mekanizmin e gabimit 2 436 : 6 = 46 me atë të gabimit 4 × 205 = 800. Çfarë informacioni humbet në secilin rast, dhe cili kontroll e zbulon secilin?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Me të pjesëtueshëm katërshifrorë, i njëjti invariant i Javës XI shpjegon çdo hap; zeroja në herës është rezultati i një ndarjeje, jo një mungesë.
- Me pjesëtues dyshifror, shifra e herësit vlerësohet dhe kontrollohet me kushtin $b \times t \le P < b \times (t + 1)$.
- Vlerësimi me shifrat e para mund të dalë i madh, por kurrë i vogël; rrumbullakimi i pjesëtuesit lart jep vlerësim që nuk del kurrë i madh.
- Kontrolli i pjesëtimit me mbetje ka dy pjesë: barazimin dhe kushtin $0 \le r < b$.

7. Klasa e mijësheve

NË KËTË KAPITULL

- Nga rendet te klasat
- Leximi dhe shkrimi
- Ndjesia e madhësisë
- Njësi profesionale: zeroja brenda klasës

7.1 Nga rendet te klasat

Në javët e mëparshme ndërtuam dhjetëshen si njësi të re, të përbërë nga dhjetë njësi, dhe qindëshen, të përbërë nga dhjetë dhjetëshe. E njëjta ide vazhdon pa fund: dhjetë qindëshe bëjnë një *mijëshe*, dhjetë mijëshe bëjnë një dhjetëshe mijëshesh, dhjetë dhjetëshe mijëshesh bëjnë një qindëshe mijëshesh. Ky është parimi i vetëm i sistemit dhjetor, dhe me të ndërtohet çdo numër, sado i madh.

Për t'i lexuar numrat, rendet i grupojmë në *klasa* me nga tri rende: njësitë, dhjetëshet dhe qindëshet e klasës. Klasa e parë është *klasa e njësheve*. E dyta është *klasa e mijësheve*, me njësitë, dhjetëshet dhe qindëshet e mijëve. Numri 45 306 ka klasën e mijësheve 45 dhe klasën e njësheve 306. E lexojmë «dyzet e pesë mijë e treqind e gjashtë»: dy numra deri në 999, që nxënësi i njeh, të lidhur me emrin e klasës.

Pse i grupojmë rendet në treshe? Sepse kështu na mjaftojnë emrat e numrave deri në 999 dhe emrat e klasave. Nxënësi që lexon pa gabim çdo numër deri në 999 ka gati gjithçka që i duhet për të lexuar numra shumë më të mëdhenj. Kjo është arsyeja pse leximi i sigurt deri në 999 është parakusht i Javës XII, jo vetëm një temë e mëparshme.

7.2 Leximi dhe shkrimi

Numrin e lexojmë nga e majta, klasë pas klase: lexojmë numrin treshifror të klasës dhe pastaj emrin e saj. Klasa e njësheve lexohet pa emër. Kur një klasë është 000, nuk e lexojmë: 5 000 lexohet «pesë mijë», 7 020 «shtatë mijë e njëzet».

Kur shkruajmë, bëjmë rrugën e kundërt, dhe këtu ka një rregull që duhet theksuar: pas klasës së parë nga e majta, çdo klasë shkruhet *gjithmonë me tri shifra*, edhe kur fillon me zero. Për «katër mijë e pesëdhjetë», klasat janë 4 dhe 050, pra numri është 4 050. Nxënësi që shkruan «450» mund të ketë shkruar vetëm shifrat që dëgjoi. Nxënësi që shkruan «400050» mund të ketë shkruar «katër mijë» si 4 000 dhe «pesëdhjetë» si 50, njërin pas tjetrit, si në gabimin e njohur «304» për «tridhjetë e katër» te numrat dyshifrorë.

Hapësira ndërmjet klasave nuk është zbukurim. Ajo e bën të dukshme se ku mbaron një klasë dhe ku fillon tjetra. Në shqip presja përdoret për numrat dhjetorë, ndaj klasat i ndajmë me hapësirë, jo me presje. Në shumë burime në anglisht përdoret presja, dhe 3,004 në një tekst anglisht do të thotë tre mijë e katër. Mësuesi që përdor të dhëna nga burime të tilla duhet ta kujtojë këtë dallim.

7.3 Ndjesia e madhësisë

Nxënësi mund ta lexojë dhe ta shkruajë saktë 10 000 pa pasur asnjë ide sa i madh është. Ndjesinë e madhësisë e ndërtojmë duke e krahasuar numrin me sasi që nxënësi i njeh. Një shembull: 1 000 ditë janë pak më pak se tre vjet, ndërsa 10 000 ditë janë rreth 27 vjet. Krahasimi i tre vjetëve me 27 vjet e bën të ndjeshëm faktin se 10 000 është dhjetë herë aq sa 1 000, gjë që nga shkrimi, me vetëm një zero më shumë, nuk ndihet. Veprimtari të tjera mund të përdorin numrin e nxënësve të shkollës, numrin e banorëve të qytetit ose numrin e faqeve të disa librave bashkë.

Këtu shihet qartë dallimi ndërmjet dy njohurive. Leximi dhe shkrimi janë njohuri e sistemit të shkrimit. Ndjesia e madhësisë është njohuri e sasisë. Një test që kontrollon vetëm të parën nuk thotë gjë për të dytën.

7.4 Njësi profesionale: zeroja brenda klasës

Shembull matematikor i zgjidhur. «Dyzet mijë e tetë» shkruhet 40 008. Klasa e mijësheve është 40, klasa e njësheve 008. Kontrolli: 40 × 1 000 + 8 = 40 008.

Paraqitja në klasë. Nxënësit kanë një tabelë klasash me tri kuti për çdo klasë. Mësuesi thotë numrin. Nxënësit plotësojnë fillimisht vetëm rendet që dëgjojnë dhe pastaj vendosin zero në çdo kuti bosh. Vetëm në fund e rishkruajnë numrin pa tabelë.

Pyetje diagnostikuese. «Sa shifra ka numri që shkrove? Sa shifra duhet të ketë një numër me dyzet mijë?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Shkrova 40 8 dhe i ndava me hapësirë si klasat.»

Analiza didaktike. Ky nxënës e njeh klasën si mënyrë organizimi dhe e shënon me hapësirë, por mund të mos e ketë kuptuar se çdo klasë ka saktësisht tri rende. Kjo është njohuri e pjesshme, jo mungesë njohurie. Nxënësi tjetër që shkruan 408 mund të ketë vështirësi më të gjera me vlerën vendore. Pyetja «Te klasa e njësheve, sa qindëshe ke? Sa dhjetëshe? Sa njësi?» i dallon dy rastet.

Alternativë metodike. Për çdo rend nxënësi shkruan një shifër, edhe kur është zero. Pastaj krahason 40 8 me 40 008, duke i lexuar të dyja me zë me ndihmën e tabelës. Kontrolli në rast të ri: «shtatëdhjetë mijë e pesëqind».

> **Pyetje reflektuese për studentin.** Pse ky gabim nuk mund të ndodhte në një sistem jopozicional, si numrat romakë, ku vlera e simbolit nuk varet nga vendi i tij dhe nuk ka nevojë për zero? Çfarë na thotë kjo për rolin e zeros në sistemin pozicional?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Klasat i grupojnë rendet në treshe; çdo klasë lexohet si numër deri në 999, i ndjekur nga emri i klasës.
- Pas klasës së parë, çdo klasë shkruhet me saktësisht tri shifra; zerot brenda klasës nuk lexohen, por duhen shkruar.
- Klasat ndahen me hapësirë, sepse në shqip presja shënon numrat dhjetorë.
- Leximi i saktë i një numri nuk sjell vetvetiu ndjesinë e madhësisë së tij; ajo ndërtohet me krahasime me sasi të njohura.

8. Klasa e milionave dhe e miliardave

NË KËTË KAPITULL

- Çdo klasë është një mijë herë aq sa e mëparshmja
- Sa i madh është një milion
- Pse çdo numër ka një shkrim të vetëm
- Njësi profesionale: emrat e klasave

8.1 Çdo klasë është një mijë herë aq sa e mëparshmja

Pas klasës së mijësheve vjen *klasa e milionave*, dhe pas saj *klasa e miliardave*. Një milion është një mijë mijëshe, 1 000 000; një miliard është një mijë milionë, 1 000 000 000. Çdo klasë e re është një mijë herë aq sa klasa e mëparshme, sepse përmban tri rende më shumë, dhe çdo rend shumëzon me dhjetë:

$$10 \times 10 \times 10 = 1\,000.$$

Numri 2 040 500 307 (Figura 6) lexohet «dy miliardë, dyzet milionë, pesëqind mijë e treqind e shtatë». Rregullat janë po ato të klasës së mijësheve: lexojmë çdo klasë si numër deri në 999, shtojmë emrin e saj, dhe klasat 000 nuk i lexojmë.

Miliardat			Milionat			Mijëshet			Njëshet		
Q	D	N	Q	D	N	Q	D	N	Q	D	N
		2	0	4	0	5	0	0	3	0	7

Figura 6. Tabela e klasave dhe e rendeve me numrin 2 040 500 307. Çdo klasë ka tri rende (Q, D, N). Klasa e parë nga e majta mund të ketë më pak se tri shifra; çdo klasë tjetër ka saktësisht tri.

Mësuesi që përdor burime në anglisht duhet të dijë se fjala angleze *billion* i përgjigjet fjalës shqipe «miliard», jo «bilion». Në shqip, si në shumë gjuhë evropiane, bilioni është një milion milionë. Ky dallim ka rëndësi kur nxënësit hasin të dhëna nga lajmet ose nga interneti.

8.2 Sa i madh është një milion

Me numrat e kësaj madhësie ndjesia e madhësisë nuk ndërtohet dot me numërim. Ndihmojnë krahasimet me kohën, që nxënësit i njohin. Një milion sekonda janë rreth 11 ditë e gjysmë, sepse në një ditë ka 86 400 sekonda. Një miliard sekonda janë rreth 31 vjet e gjysmë. Shkrimi i dy

numrave ndryshon vetëm me tri zero, por njëri është më pak se dy javë dhe tjetri një pjesë e madhe e jetës së një njeriu.

Programi e përfshin këtë klasë për lexim, shkrim dhe krahasim. Në këtë leksion klasat e mëdha trajtohen kryesisht për lexim, shkrim, krahasim dhe kuptim të madhësisë. Ajo që vlen të ushtrohet është kuptimi i strukturës: një milion përmban një mijë mijëshe, dhe çdo klasë është një mijë herë aq sa e mëparshmja.

8.3 Pse çdo numër ka një shkrim të vetëm

Deri këtu kemi përdorur pa e thënë faktin se çdo numër ka një dhe vetëm një shkrim dhjetor. Me teoremën e pjesëtimit me mbetje nga Java XI tani mund ta vërtetojmë.

> **Pohimi 8.1.** Çdo numër natyror $n \geq 1$ shkruhet në një mënyrë të vetme në trajtën $n = a_k \times 10^k + \ldots + a_1 \times 10 + a_0$, ku çdo a_i është një nga numrat $0, 1, \ldots, 9$ dhe $a_k \neq 0$.

Vërtetim. Ekzistenca. Sipas teoremës së pjesëtimit me mbetje,

$$n = 10 \times q_1 + a_0,$$

me $0 \leq a_0 \leq 9$. Nëse $q_1 \geq 1$, e pjesëtojmë sërish me 10: $q_1 = 10 \times q_2 + a_1$. Herësat zvogëlohen gjithnjë, sepse $10 \times q_{i+1} \leq q_i$ dhe, kur $q_i \geq 1$, $q_{i+1} < q_i$. Prandaj pas një numri të fundmë hapash marrim herësin zero. Duke zëvendësuar njërin pas tjetrit, marrim trajtën e kërkuar. *Uniciteti.* Bëjmë induksion sipas n. Supozojmë se n ka dy trajta, me shifrat e njësive a_0 dhe a'_0. Nga të dyja kemi

$$n = 10 \times m + a_0 = 10 \times m' + a'_0,$$

me $0 \leq a_0, a'_0 \leq 9$. Sipas unicitetit në teoremën e pjesëtimit me mbetje, $a_0 = a'_0$ dhe $m = m'$. Numri $m < n$ ka, sipas hipotezës së induksionit, një shkrim të vetëm, dhe shifrat e tij janë shifrat e mbetura të të dy trajtave. Kur $m = 0$, n është njëshifror dhe uniciteti është i menjëhershëm. ∎

Pohimi 8.1 thotë dy gjëra që nxënësi i përdor çdo ditë pa i formuluar: çdo numër ka një shkrim, dhe dy shkrime të ndryshme tregojnë dy numra të ndryshëm. Vërtetimi i ekzistencës është edhe një algoritëm: pjesëtimi i përsëritur me 10 jep shifrat nga e djathta. Me të njëjtin algoritëm, me 2 në vend të 10-ës, një numër shkruhet në sistemin binar, siç do ta shohin studentët në informatikë.

8.4 Njësi profesionale: emrat e klasave

> **Shembull matematikor i zgjidhur.** «Tre milionë e katërqind mijë» shkruhet 3 400 000: klasa e milionave 3, e mijësheve 400, e njësheve 000. Kontrolli: $3 \times 1\,000\,000 + 400 \times 1\,000 = 3\,400\,000$.

Paraqitja në klasë. Nxënësit lexojnë me zë numra nga një tabelë me popullsinë e disa qyteteve dhe vendeve, të marra nga një burim i sotëm zyrtar, dhe i vendosin në tabelën e klasave para se t'i lexojnë.

Pyetje diagnostikuese. «Sa mijë ka në një milion? Si e di?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Njëqind, sepse pas mijës vjen qindëshja.»

Analiza didaktike. Përgjigjja mund të tregojë se nxënësi e ka zgjeruar vargun e rendeve (njësi, dhjetëshe, qindëshe) te klasat, duke menduar se klasat ndjekin njëra-tjetrën me hap dhjetë. Mund të jetë edhe hamendje. Pyetja pasuese, «Sa zero ka 1 000? Sa zero ka 1 000 000?», e lidh përgjigjen me numrin e rendeve.

Alternativë metodike. Nxënësi numëron me zë me hap 100 000: njëqind mijë, dyqind mijë, …, njëmijë mijë. Pastaj e shkruan këtë të fundit me shifra dhe e krahason me shkrimin e një milioni.

Pyetje reflektuese për studentin. Pse grupimi i rendeve në treshe, dhe jo në katërshe ose dyshe, u përshtatet emrave të numrave në shqip? Si do të ndryshonte leximi nëse do të kishim emra vetëm deri në 99?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Çdo klasë e re (milionat, miliardat) është një mijë herë aq sa e mëparshmja, sepse shton tri rende.
- Në shqip miliardi i përgjigjet fjalës angleze billion; bilioni është një milion milionë.
- Klasat e mëdha trajtohen për lexim, shkrim, krahasim dhe ndjesi madhësie, jo për llogaritje me shkrim.
- Shkrimi dhjetor ekziston dhe është i vetëm; vërtetimi mbështetet te teorema e pjesëtimit me mbetje dhe jep edhe një algoritëm për gjetjen e shifrave.

9. Renditja në bashkësinë $\mathbb{N}_0$

NË KËTË KAPITULL

- Përkufizimi dhe vetitë
- Pasardhësi dhe elementi më i vogël
- Krahasimi i numrave sipas shifrave
- Boshti numerik me shkallë të ndryshme
- Njësi profesionale: më shumë shifra apo shifër më e madhe?

9.1 Përkufizimi dhe vetitë

Në Javën X renditjen e përdorëm me mbledhjen: $a \le b$ nëse ekziston $c \in \mathbb{N}_0$ i tillë që $a + c = b$. Shkruajmë $a < b$ kur $a \le b$ dhe $a \neq b$, pra kur $c \ge 1$. Programi i Javës XII e ka renditjen temë më vete. Tani është momenti të formulojmë vetitë e saj, që deri këtu i kemi përdorur pa i thënë.

Pohimi 9.1. Relacioni $\le$ në $\mathbb{N}_0$ ka këto veti:

(i) refleksive: $a \le a$;

(ii) antisimetrike: nëse $a \le b$ dhe $b \le a$, atëherë $a = b$;

(iii) kalimtare: nëse $a \le b$ dhe $b \le d$, atëherë $a \le d$;

(iv) e pajtueshme me veprimet: nëse $a \le b$, atëherë $a + m \le b + m$ dhe $a \times m \le b \times m$ për çdo $m \in \mathbb{N}_0$.

Vërtetim. (i) $a + 0 = a$. (ii) Nga $b = a + c$ dhe $a = b + e$ marrim $a = a + c + e$, prandaj $c + e = 0$ dhe, në $\mathbb{N}_0$, $c = e = 0$. (iii) Nga $b = a + c$ dhe $d = b + e$ marrim $d = a + (c + e)$. (iv) Nga $b = a + c$ del

$$b + m = (a + m) + c,$$

dhe nga vetia shpërndarëse

$$b \times m = a \times m + c \times m.$$

∎

Renditja është edhe *e plotë*: për çdo dy numra a dhe b vlen një dhe vetëm një nga $a < b$, $a = b$, $b < a$. Vërtetimi është i shkurtër. *Ekzistenca*, me induksion sipas a: për $a = 0$ kemi $0 \le b$, sepse $0 + b = b$. Nëse për a dhe çdo b vlen $a < b$, $a = b$ ose $b < a$, shqyrtojmë $a + 1$. Nëse $a < b$, atëherë $b = a + c$ me $c \ge 1$, pra

$$b = (a + 1) + (c - 1)$$

dhe $a + 1 \le b$. Nëse $b \le a$, atëherë $b < a + 1$. *Përjashtimi*: nëse do të kishim $a < b$ dhe $b < a$, atëherë $b = a + c$ dhe $a = b + e$ me $c, e \ge 1$, prandaj $a = a + (c + e)$, dhe nga thjeshtimi $c + e = 0$,

kundërshtim. Vetitë (i)–(iii) e bëjnë ≤ një *relacion renditjeje*, koncept që do ta trajtojmë në Javën XV, kur flasim për relacionet. Vetia (iv) është ajo që na lejon të vlerësojmë rezultatet: nëse 478 < 500 dhe 365 < 400, atëherë 478 + 365 < 900.

9.2 Pasardhësi dhe elementi më i vogël

Renditja në $\mathbb{N}_0$ ka dy veti që nuk do t'i ketë renditja e thyesave dhe e numrave dhjetorë. E para: ndërmjet a dhe a + 1 nuk ka asnjë numër natyror; çdo numër ka pasardhës të menjëhershëm, dhe çdo numër përveç zeros ka paraardhës të menjëhershëm. E dyta: çdo nënbashkësi joboshe e $\mathbb{N}_0$ ka element më të vogël. Ky parim është i barasvlershëm me induksionin matematik, dhe e përdorëm pa e thënë në vërtetimin e ekzistencës në pohimin 8.1.

Këto veti i duhen mësuesit për të parashikuar. Nxënësi që njeh vetëm $\mathbb{N}_0$ ka të drejtë kur thotë «pas 7-ës vjen 8» ose «ndërmjet 7 dhe 8 nuk ka asgjë». Kur të mësojë thyesat, këto pohime nuk do të jenë më të vërteta. Mësuesi mund ta përgatisë këtë që tani me gjuhën që përdor: «ndërmjet 7 dhe 8 nuk ka *numra natyrorë*» është e saktë dhe e lë derën të hapur.

9.3 Krahasimi i numrave sipas shifrave

Rregulli shkollor i krahasimit thotë: numri me më shumë shifra është më i madh; kur numrat kanë aq shifra, krahasojmë shifrat nga e majta, dhe vendos shifra e parë që ndryshon. Rregulli është i saktë. Vërtetimi tregon pse, dhe pse nuk mund ta zbatojmë vetëm gjysmën e tij.

> **Pohimi 9.2.** (i) Çdo numër natyror pozitiv m me k shifra, në shkrimin standard pa zero fillestare, plotëson $10^{k-1} \le m < 10^k$. Prandaj, nëse n ka më shumë shifra se m, atëherë $n > m$. Numri zero trajtohet veçmas: ai është më i vogël se çdo numër pozitiv.
>
> (ii) Le të kenë m dhe n po aq shifra dhe le të jetë j rendi i parë nga e majta ku shifrat ndryshojnë, me shifrën e n-së më të madhe. Atëherë $n > m$.

Vërtetim. (i) Nëse $m = a_{k-1} \times 10^{k-1} + \dots + a_0$, atëherë $m \le 9 \times (10^{k-1} + \dots + 10 + 1) = 10^k - 1 < 10^k$. Nga ana tjetër $a_{k-1} \ge 1$, prandaj $m \ge 10^{k-1}$. Nëse n ka të paktën k + 1 shifra, atëherë $n \ge 10^k > m$. (ii) Shifrat në rendet më të larta se j janë të njëjta dhe japin të njëjtën shumë S te të dy numrat. Në rendin j, n ka të paktën 10^j më shumë se m. Rendet më të ulëta se j i japin m-së të shumtën $10^j - 1$, sipas pjesës (i), dhe n-së të paktën 0. Prandaj $n - m \ge 10^j - (10^j - 1) = 1 > 0$. ∎

Vërtetimi tregon pse shifrat në të djathtë të rendit që vendos nuk kanë rëndësi: edhe kur te njëri numër janë të gjitha 9 dhe te tjetri të gjitha 0, ato nuk arrijnë dot një njësi të rendit j. Në klasë kjo thuhet me «999 + 1 = 1 000»: të gjitha njësitë e rendeve më të ulëta, bashkë, nuk bëjnë dot një njësi të rendit pasues.

9.4 Boshti numerik me shkallë të ndryshme

Për numrat deri në 100 mund të përdorim boshtin me të gjitha vijat. Për numrat më të mëdhenj e vizatojmë me shkallë të ndryshme: nga 0 deri në 10 000 me vija çdo 1 000, pastaj zmadhojmë një interval me vija çdo 100. Figura 7 tregon si vendoset numri 4 670 me dy shkallë.

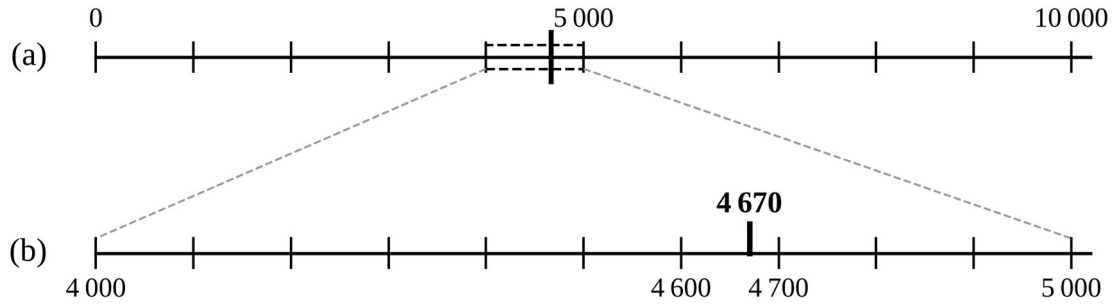


Figura 7. Numri 4 670 në boshtin numerik me dy shkallë: (a) nga 0 deri në 10 000, me hap 1 000; (b) intervali 4 000–5 000 i zmadhuar, me hap 100. Numri ndodhet ndërmjet 4 600 dhe 4 700, më afër 4 700.

Ky bosht na ndihmon të shpjegojmë *rrumbullakimin*. Të rrumbullakojmë 4 670 në mijëshen më të afërt do të thotë të pyesim: ndërmjet cilave dy mijësheve ndodhet numri dhe cilës i është më afër? Përgjigjja, 5 000, lexohet te boshti i parë. Rrumbullakimi në qindëshen më të afërt, 4 700, lexohet te boshti i dytë. Rregulli shkollor «nëse shifra që vjen pas është 5 ose më e madhe, rritet» është mënyrë e shkurtër për të krahasuar këto largësi. Kur numri ndodhet pikërisht në mes, si 4 650 për qindëshet, të dyja largësitë janë të barabarta dhe duhet një marrëveshje; rregulli shkollor e vendos lart.

9.5 Njësi profesionale: më shumë shifra apo shifër më e madhe?

Shembull matematikor i zgjidhur. Krahasojmë 998 dhe 1 009. Numri 1 009 ka katër shifra dhe 998 tre, ndaj sipas pohimit 9.2 (i), 1 009 > 998. Arsyeja: 998 ≤ 999 < 1 000 ≤ 1 009.

Paraqitja në klasë. Nxënësit kanë kartela me numrat 998, 1 009, 990, 1 090 dhe 909, që duhet t'i vendosin në një bosht nga 900 deri në 1 100, me vija çdo 10. Para se t'i vendosin parashikojnë radhën; pastaj e krahasojnë me parashikimin.

Pyetje diagnostikuese. «Era thotë: 998 është më i madh, sepse 9 është më i madh se 1. Çfarë do t'i thoshe?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «998 nuk arrin as 1 000, ndërsa 1 009 e kalon 1 000-shin.»

Analiza didaktike. Era krahason shifrat e para pa pyetur çfarë vlejnë: 9-a te 998 janë 9 qindëshe, ndërsa 1-shi te 1 009 është 1 mijëshe. Mund ta njohë rregullin, por të zbatojë pjesën

(ii) aty ku duhet pjesa (i). Nxënësi që përgjigjet me 1 000 si numër ndarës jep arsyen që gjendet në vërtetim dhe tregon se e ndjen madhësinë e numrave.

Alternativë metodike. Për Erën mësuesi pyet: «Sa qindëshe ka 998? Sa qindëshe ka 1 009?» Leximi sipas një rendi të vetëm (9 qindëshe dhe 10 qindëshe) e bën krahasimin të dukshëm. Kontrolli në rast të ri: 4 999 dhe 10 001.

Pyetje reflektuese për studentin. Formuloni një pohim të gabuar që një nxënës mund të nxjerrë nga rregulli «krahaso shifrat nga e majta» dhe ndërtoni një kundërshembull. Cila pjesë e pohimit 9.2 mungon në rregullin e tij?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Renditja në $\mathbb{N}_0$ përkufizohet me mbledhjen dhe është refleksive, antisimetrike, kalimtare dhe e pajtueshme me veprimet.
- Në $\mathbb{N}_0$ çdo numër ka pasardhës dhe çdo nënbashkësi joboshe ka element më të vogël; këto veti nuk vlejnë për thyesat.
- Rregulli i krahasimit ka dy pjesë: numri i shifrave dhe, kur ky është i njëjtë, shifra e parë që ndryshon; pjesa e dytë nuk vlen pa të parën.
- Rrumbullakimi është krahasim largësish në boshtin numerik; rregulli i shifrës 5 është shkurtim i tij.

10. Gabimet si burim informacioni

NË KËTË KAPITULL

- Modeli diagnostik
- Përmbledhje e rasteve
- Një bisedë diagnostikuese e modeluar
- Si zgjedhim ndërhyrjen

10.1 Modeli diagnostik

Rastet e kapitujve 3–9 ndjekin të njëjtin model me pesë hapa, që e kemi përdorur edhe në Javën XI: (1) çfarë ka shkruar nxënësi; (2) të paktën dy shpjegime të mundshme; (3) pyetja ose detyra që i dallon; (4) ndërhyrja; (5) kontrolli në një rast të ri. Kërkimi i Brown dhe Burton (1978) tregoi se shumë gabime në zbritje vijnë nga defekte procedurale të qëndrueshme, që japin rezultate të parashikueshme. Kjo ka dy pasoja. E para: me disa ushtrime të zgjedhura mirë një defekt mund të identifikohet. E dyta: një përgjigje e vetme nuk mjafton, sepse i njëjti rezultat i gabuar mund të vijë nga shkaqe të ndryshme, ose nga një pakujdesi.

Në praktikë dallojmë tri lloje vështirësish. Gabimi i rastësishëm nuk përsëritet në raste të ngjashme. Vështirësia procedurale shfaqet në mënyrë të qëndrueshme në një hap të caktuar, por nxënësi e shpjegon vlerën vendore kur pyetet. Keqkuptimi konceptual shfaqet edhe kur nxënësi pyetet për vlerën e shifrave ose për madhësinë e rezultatit. Pyetja diagnostikuese zgjidhet që t'i dallojë pikërisht këto.

10.2 Përmbledhje e rasteve

Tabela 2. *Gabime të algoritmeve me shkrim dhe pyetje që i provojnë*

Puna e nxënësit (simulim)	Hipoteza për t'u provuar	Pyetja ose detyra provuese	Rasti i ri
478 + 365 = 71 313	Shumat e kolonave shkruhen pa bartje	Sa është afërsisht 478 + 365?	586 + 247
752 − 368 = 416	Në çdo kolonë zbritet e vogla nga e madhja	Kontrollo me mbledhje: sa bën 416 + 368?	641 − 257
403 − 168 = 335	Zeroja bëhet 9, por qindëshja nuk zvogëlohet	Mblidh numrat sipër kolonave: a del 403?	502 − 247
3 × 247 = 981	Bartja i shtohet shifrës para shumëzimit	Sa është 3 × 4 + 2? Sa është 3 × 250?	4 × 136

Puna e nxënësit (simulim)	Hipoteza për t'u provuar	Pyetja ose detyra provuese	Rasti i ri
34 × 26 = 272	Shifra e dhjetësheve merret si njësi	Ku është 34 × 20 në drejtkëndësh?	23 × 14
4 × 205 = 800	Bartja humbet te zeroja	Sa është 800 : 4?	6 × 305
2 436 : 6 = 46	Zeroja në herës nuk shkruhet	Sa është 6 × 400?	3 248 : 8
40 008 shkruar 408	Shkruhen vetëm shifrat që dëgjohen	Sa shifra ka një numër me dyzet mijë?	70 500
998 > 1 009	Krahasohet vetëm shifra e parë	Sa qindëshe ka secili numër?	4 999 dhe 10 001

Tabelën e lexojmë si listë hipotezash, jo si diagnoza. Studenti propozon të paktën dy pyetje verifikuese para se të planifikojë ndërhyrjen.

10.3 Një bisedë diagnostikuese e modeluar

Mësuesja: «Ke shkruar 403 − 168 = 335. Sa është afërsisht 400 − 170?»

Nxënësi 1: «Rreth 230.»

Mësuesja: «Po ty të doli 335. Shkruaje me numra atë që shkrove sipër kolonave.»

Nxënësi 1: «4 qindëshe, 9 dhjetëshe dhe 13 njësi.»

Mësuesja: «Sa bëjnë bashkë?»

Nxënësi 1: «400 + 90 + 13 = 503. Po unë kisha 403!»

Mësuesja: «Nga i more 9 dhjetëshet?»

Ky dialog i simuluar nuk ia jep nxënësit përgjigjen. E çon te një mospërputhje që ai e sheh vetë, me një kontroll që mund ta përdorë edhe herë të tjera. Pyetja e fundit e kthen vëmendjen te këmbimi: dhjetëshet duhej të vinin nga një qindëshe, e cila duhej hequr nga 4-shi.

10.4 Si zgjedhim ndërhyrjen

Udhëzuesi i WWC (Fuchs et al., 2021) rekomandon për nxënësit me vështirësi mësimdhënie sistematike, gjuhë të qartë matematike dhe paraqitje të zgjedhura me kujdes, ku mësuesi i lidh shprehimisht objektet, vizatimin dhe shkrimin me simbole. Për algoritmet me shkrim kjo do të thotë që materiali i vlerës vendore të përdoret jo si zëvendësim i algoritmit, por i vendosur pranë tij, hap pas hapi, derisa nxënësi të shpjegojë çdo shifër që shkruan. EEF (2017) thekson edhe përdorimin e vlerësimit për të ndërtuar mbi atë që nxënësit dinë. Asnjë nga këto udhëzime nuk e përcakton ndërhyrjen për një nxënës të caktuar. Ndërhyrja zgjidhet sipas asaj që ka treguar nxënësi te pyetja diagnostikuese, dhe kontrollohet në rastin e ri.

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Shumë gabime në algoritmet me shkrim janë defekte procedurale të qëndrueshme; prandaj mund të identifikohen me detyra të zgjedhura, por jo nga një përgjigje e vetme.
- Dallojmë gabimin e rastësishëm, vështirësinë procedurale dhe keqkuptimin konceptual; pyetja diagnostikuese zgjidhet për t'i dalluar.
- Kontrollet më të dobishme për nxënësin nuk varen nga procedura: vlerësimi, veprimi i kundërt dhe rishkrimi i numrit pas rigrupimit.
- Udhëzimet kërkimore japin parime; ndërhyrja për një nxënës zgjidhet sipas provave të tij dhe kontrollohet në rast të ri.

11. Hartimi i mësimit: nga teoria te klasa

NË KËTË KAPITULL

- Një orë 45-minutëshe: zbritja kur i zbritshmi ka zero
- Një sekuencë e shkurtër: klasa e mijësheve
- Diferencimi

11.1 Një orë 45-minutëshe: zbritja kur i zbritshmi ka zero

Qëllimi: nxënësi shpjegon dy këmbimet te 403 − 168 dhe kontrollon vetë rigrupimin. Ora nuk synon që nxënësi të bëjë sa më shumë zbritje, por që të dijë pse sipër zeros shkruhet 9 dhe pse 4-shi bëhet 3. Mësuesi nis me një problem: «Shkolla ka 403 libra. 168 prej tyre janë në klasa. Sa libra janë në bibliotekë?» Nxënësit vlerësojnë fillimisht: 400 − 170 = 230, pra përgjigjja pritet rreth 230.

Në fazën e dytë nxënësit ndërtojnë 403 me 4 pllaka qindëshe dhe 3 kube. Kur duhet të heqin 8 njësi, zbulojnë se nuk kanë dhjetëshe për të këmbyer. Mësuesi nuk jep zgjidhjen; pyet: «Çfarë mund të këmbesh?» Pas këmbimit të një qindësheje me 10 dhjetëshe dhe të një dhjetësheje me 10 njësi, nxënësit shkruajnë në tabelë 3 Q, 9 D, 13 N dhe kontrollojnë:

$$300 + 90 + 13 = 403.$$

Në fazën e tretë mësuesi vendos krah për krah materialin dhe shkrimin në kolona. Për çdo shifër të vogël sipër kolonave pyet ku është ajo te materiali. Në fazën e katërt jep dy zgjidhje të nxënësve të supozuar, 235 dhe 335, pa thënë cila është e saktë, dhe klasa i krahason me vlerësimin dhe me kontrollin e numrit sipër kolonave. Sipas pesë praktikave të Smith dhe Stein (2018), zgjidhjet që paraqiten zgjidhen dhe renditen me qëllim: këtu gabimi vjen i dyti, pasi kontrolli është bërë i njohur.

Tabela 3. *Plani i orës dhe vëzhgimi formues*

Minutat	Veprimtaria	Pyetja kryesore	Çfarë duam të shohim
0–6	Problemi dhe vlerësimi	Afër 200 apo afër 300?	Lidhja me numra të rrumbullakuar
6–18	Rigrupimi me material	Çfarë mund të këmbesh?	Dy këmbimet në radhën e duhur
18–28	Materiali dhe kolonat krah për krah	Ku është 9-a te materiali?	Lidhja e çdo shifre me një rend
28–37	Krahasimi i 235 dhe 335	Sa bëjnë numrat sipër kolonave?	Kontrolli i rigrupimit
37–43	Ushtrim i shkurtër: 502 − 247	Si e kontrollon?	Zbatim i pavarur
43–45	Bileta e daljes: 600 − 254	Pse sipër dy zerove ka 9 dhe 10?	Rasti i ri

Bileta e daljes ka dy zero: 600 − 254 = 346. Nxënësi që shkruan 5 sipër 6-shit, 9 sipër zeros së dhjetësheve dhe 10 sipër zeros së njësive tregon se e ka zbatuar idenë e këmbimit në një rast që nuk e ka parë.

11.2 Një sekuencë e shkurtër: klasa e mijësheve

Qëllimi: nxënësi shkruan me shifra numra që i dëgjon, me zero brenda klasës. Mësuesi thotë katër numra: «dymijë e treqind», «dymijë e tridhjetë», «dymijë e tre», «njëzet mijë e tre». Nxënësit i shkruajnë në tabelën e klasave, pastaj pa tabelë. Diskutimi nis nga pyetja: «Pse të katër numrat kanë 2-shin dhe 3-shin, por janë kaq të ndryshëm?» Përgjigjja e pritshme lidh vendin e shifrës me rendin dhe me klasën: 2 300, 2 030, 2 003 dhe 20 003.

11.3 Diferencimi

Diferencimi nuk do të thotë që një grup merr vetëm llogaritje të lehta. Të gjithë nxënësit mund të punojnë me të njëjtën ide, rigrupimin, me shkallë të ndryshme ndihme. Njëri përdor materiale për 403 − 168; tjetri vizaton blloqet; i treti punon vetëm me shkrim dhe kontrollon me rishkrimin e numrit. Nxënësi që e zotëron algoritmin mund të marrë detyrën: «Gjej një zbritje me zero te i zbritshmi ku defekti 'zeroja bëhet 9, por qindëshja nuk zvogëlohet' jep rezultat 100 më të madh. A ka zbritje ku ky defekt jep rezultat të saktë?» Detyra e dytë e shpie te kushtet e pohimit 4.1.

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Ora nis me vlerësimin e madhësisë, që shërben si kontroll për gjithë orën.
- Materiali dhe shkrimi vendosen krah për krah, derisa nxënësi të shpjegojë çdo shifër që shkruan.
- Gabimi paraqitet pasi klasa ka një mjet për ta kontrolluar, dhe mbyllja bëhet me një rast të ri.
- Diferencimi ruan të njëjtën ide matematike dhe ndryshon shkallën e ndihmës.

12. Punëtoria universitare: detyra me analizë

NË KËTË KAPITULL

- Detyra 1: mbledhja me zbërthim
- Detyra 2: kufiri i bartjes
- Detyra 3: dy metoda zbritjeje
- Detyra 4: shumëzimi dhe modeli i syprinës
- Detyra 5: vlerësimi i shifrës së herësit
- Detyra 6: renditja
- Dymbëdhjetë detyra me zgjidhje

12.1 Detyra 1: mbledhja me zbërthim

Detyrë. Shpjegoni pse 586 + 247 = 833, me zbërthim dhe me algoritmin, dhe tregoni ku shfaqet secila bartje. *Përgjigje:*

$$500 + 200 = 700, \quad 80 + 40 = 120,$$

6 + 7 = 13; pastaj 700 + 120 + 13 = 833. Në algoritëm, 13 njësi japin 3 dhe bartjen 1; 8 + 4 + 1 = 13 dhjetëshe japin 3 dhe bartjen 1; 5 + 2 + 1 = 8.

12.2 Detyra 2: kufiri i bartjes

Detyrë. Pse në mbledhjen e tre numrave bartja mund të jetë 2? Jepni një shembull dhe tregoni pse nuk mund të jetë 3. *Përgjigje:* te

$$999 + 999 + 999 = 2\,997,$$

kolona e njësive jep 27, me bartje 2. Sipas pohimit 3.1 (ii), me m = 3 bartja është e shumta 2, sepse shuma e një kolone është e shumta

$$9 \times 3 + 2 = 29 < 30.$$

12.3 Detyra 3: dy metoda zbritjeje

Detyrë. Llogaritni 641 − 257 me rigrupim dhe me shtim të barabartë dhe tregoni cilën veti përdor secila. *Përgjigje:* me rigrupim,

$$641 = 500 + 130 + 11,$$

dhe 11 − 7 = 4, 13 − 5 = 8, 5 − 2 = 3. Me shtim të barabartë, 11 − 7 = 4; në dhjetëshe 14 − (5 + 1) = 8; në qindëshe 6 − (2 + 1) = 3. Rezultati është 384. Rigrupimi ruan vlerën e të zbritshmit; shtimi i barabartë ruan diferencën, sepse të dy numrave u shtohet e njëjta sasi.

12.4 Detyra 4: shumëzimi dhe modeli i syprinës

Detyrë. Llogaritni 47 × 35 me modelin e syprinës dhe me algoritmin, dhe gjeni katër pjesët e drejtkëndëshit te dy rreshtat. *Përgjigje:*

$$40 \times 30 + 40 \times 5 + 7 \times 30 + 7 \times 5 = 1\,200 + 200 + 210 + 35 = 1\,645.$$

Rreshti i parë, 47 × 5 = 235, përmban 200 dhe 35; rreshti i dytë, 47 × 30 = 1 410, përmban 1 200 dhe 210.

12.5 Detyra 5: vlerësimi i shifrës së herësit

Detyrë. Llogaritni 875 : 24 dhe, në çdo hap, jepni dy vlerësimet e pohimit 6.1. *Përgjigje:* 87 dhjetëshe: 87 me 20 jep 4, 87 me 30 jep 2; prova 24 × 4 = 96 > 87, prandaj shifra është 3, me mbetje 87 − 72 = 15. 155 njësi: 155 me 20 jep 7, 155 me 30 jep 5; prova

$$24 \times 7 = 168 > 155 \quad \text{dhe} \quad 24 \times 6 = 144 \le 155,$$

prandaj shifra është 6, me mbetje 11. Herësi është 36 dhe mbetja 11, sepse

$$24 \times 36 + 11 = 875$$

dhe 11 < 24.

12.6 Detyra 6: renditja

Detyrë. Renditni 10 090, 9 999, 10 009 dhe 10 900 dhe argumentoni çdo krahasim me pohimin 9.2. *Përgjigje:* 9 999 ka katër shifra dhe të tjerët pesë, prandaj është më i vogli. Te 10 009, 10 090 dhe 10 900 dy shifrat e para janë të njëjta; rendi i qindësheve vendos për 10 900, dhe rendi i dhjetësheve për 10 009 dhe 10 090. Radha: 9 999 < 10 009 < 10 090 < 10 900.

12.7 Dymbëdhjetë detyra me zgjidhje

Provoni fillimisht vetë detyrat e seksionit 12.7.1. Zgjidhjet jepen më pas, në seksionin 12.7.2.

12.7.1 Detyrat

Detyra A. Vërtetoni se shuma e dy numrave treshifrorë është të paktën 200 dhe e shumta 1 998.

Detyra B. Llogaritni 502 − 247 me rigrupim. Çfarë rezultati jep defekti i pohimit 4.1 dhe si e zbulon vetë nxënësi?

Detyra C. Llogaritni 4 × 136. Çfarë rezultati jep gabimi «bartja i shtohet shifrës para shumëzimit»?

Detyra D. Llogaritni 23 × 14 dhe tregoni çfarë jep rreshti i dytë pa zhvendosje.

Detyra E. Llogaritni 6 × 305. Pse vlerësimi 6 × 300 nuk e zbulon gabimin 1 800?

Detyra F. Llogaritni 3 248 : 8 dhe shpjegoni zeron në herës.

Detyra G. Llogaritni 960 : 32. Çfarë mund të ketë ndodhur me nxënësin që shkruan 3?

Detyra H. Për cilat shifra x numri treshifror me shifra 4, x dhe 7 është më i vogël se 452?

Detyra I. Shkruani me shifra «dy milionë e tre mijë e dyzet».

Detyra J. Sa mijëshe ka në 3 400 000? Po sa qindëshe?

Detyra K. Rrumbullakoni 4 650 dhe 4 649 në qindëshen më të afërt dhe shpjegoni dallimin.

Detyra L. Llogaritni 9 × 999 dhe tregoni bartjet. Pse nuk kalojnë 8?

12.7.2 Zgjidhje dhe interpretim didaktik

Detyra A. Çdo numër treshifror plotëson $100 \le m \le 999$, sipas pohimit 9.2 (i). Nga vetia (iv) e pohimit 9.1, shuma plotëson $100 + 100 \le a + b \le 999 + 999$, pra $200 \le a + b \le 1\,998$. Pasoja: shuma e dy numrave treshifrorë ka tri ose katër shifra, dhe kur ka katër, e para është 1.

Detyra B. $502 = 400 + 90 + 12$, dhe $12 - 7 = 5$, $9 - 4 = 5$, $4 - 2 = 2$: rezultati është 255. Me defektin, numri sipër kolonave bëhet

$$500 + 90 + 12 = 602,$$

dhe rezultati 355. Nxënësi e zbulon duke mbledhur numrat sipër kolonave, $602 \neq 502$, ose me kontrollin $355 + 247 = 602$.

Detyra C. $4 \times 6 = 24$: shkruajmë 4, bartim 2; $4 \times 3 + 2 = 14$: shkruajmë 4, bartim 1; $4 \times 1 + 1 = 5$. Rezultati është 544. Me gabimin, në dhjetëshe $4 \times (3 + 2) = 20$ jep 0 dhe bartjen 2, dhe në qindëshe $4 \times (1 + 2) = 12$: rezultati del 1 204. Vlerësimi $4 \times 140 = 560$ e zbulon menjëherë.

Detyra D.

$$23 \times 14 = 23 \times 4 + 23 \times 10 = 92 + 230 = 322.$$

Pa zhvendosje,

$$92 + 23 = 115 = 23 \times 5:$$

shifra 1 e dhjetësheve është marrë si 1 njësi.

Detyra E. $6 \times 5 = 30$: shkruajmë 0, bartim 3; $6 \times 0 + 3 = 3$; $6 \times 3 = 18$. Rezultati është 1 830. Gabimi 1 800 përputhet pikërisht me vlerësimin 6×300, prandaj vlerësimi nuk e kap; e kap kontrolli

$$1\,800 : 6 = 300 \neq 305.$$

Detyra F. 32 qindëshe : 8 = 4 qindëshe; 4 dhjetëshe : 8 = 0 dhjetëshe, mbeten 4 dhjetëshe; 48 njësi : 8 = 6. Herësi është 406, sepse $8 \times 406 = 3\,248$. Zeroja shënon se çdo grup merr zero dhjetëshe të plota.

Detyra G. 96 dhjetëshe : 32 = 3 dhjetëshe, pa mbetje; 0 njësi : 32 = 0 njësi. Herësi është 30. Nxënësi që shkruan 3 mund ta ketë mbyllur pjesëtimin kur mbetja u bë 0, pa shkruar shifrën e njësive. Kontrolli $32 \times 3 = 96 \neq 960$ e tregon.

Detyra H. Numri është 400 + 10 × x + 7. Sipas pohimit 9.2 (ii), krahasimi me 452 vendoset në rendin e dhjetësheve kur x ≠ 5: duhet x < 5. Për x = 5, numri 457 është më i madh se 452. Pra x ∈ {0, 1, 2, 3, 4}.

Detyra I. Klasat janë 2, 003 dhe 040: numri është 2 003 040.

Detyra J.

$$3\,400\,000 = 3\,400 \times 1\,000,$$

pra 3 400 mijëshe; dhe

$$3\,400\,000 = 34\,000 \times 100,$$

pra 34 000 qindëshe. Detyra ushtron leximin sipas një rendi të vetëm.

Detyra K. 4 649 ndodhet ndërmjet 4 600 dhe 4 700 dhe është më afër 4 600: rrumbullakohet në 4 600. 4 650 ndodhet pikërisht në mes; sipas marrëveshjes shkollore rrumbullakohet lart, në 4 700. Rasti i dytë nuk vendoset nga largësia, por nga marrëveshja.

Detyra L. 9 × 9 = 81: shkruajmë 1, bartim 8; 9 × 9 + 8 = 89: shkruajmë 9, bartim 8; 9 × 9 + 8 = 89: shkruajmë 89. Rezultati është 8 991. Sipas pohimit 5.1, me m = 9 bartja është e shumta 9 − 1 = 8, sepse

$$9 \times 9 + 8 = 89 < 90.$$

13. Vlerësimi përmbyllës dhe vetëvlerësimi

NË KËTË KAPITULL

- Kriteret e vlerësimit
- Tri situata për seminar
- Test përmbledhës (30 minuta, 20 pikë)
- Çelësi orientues i testit
- Rubrikat

13.1 Kriteret e vlerësimit

Te detyrat matematike, një rezultat i saktë pa justifikim nuk tregon kompetencë të plotë profesionale. Vlerësimi kontrollon katër gjëra: (i) saktësinë e llogaritjes dhe të kontrollit; (ii) justifikimin e çdo hapi me shkrimin dhjetor dhe me vetitë e veprimeve; (iii) lidhjen e algoritmit me një paraqitje që mund të përdoret në arsimin fillor; (iv) cilësinë e pyetjes diagnostikuese. Një student mund ta kryejë algoritmin pa asnjë gabim dhe të mos dijë ta shpjegojë rigrupimin te $3\,004 - 1\,657$; kjo mangësi duhet thënë qartë.

13.2 Tri situata për seminar

Situata 1. Dy nxënës zgjidhin $3\,004 - 1\,657$. Nxënësi A bën tri këmbime njëri pas tjetrit. Nxënësi B thotë: «3 004 janë 300 dhjetëshe e 4 njësi; marr një dhjetëshe dhe kam 299 dhjetëshe e 14 njësi». Studentët tregojnë se të dy mbështeten te e njëjta ide, këmbimi i një njësie të një rendi me dhjetë të rendit pasues, dhe se nxënësi B përdor leximin sipas një rendi të vetëm. Pyetja për diskutim: kur ia vlen t'ua tregojmë nxënësve rrugën e dytë?

Situata 2. Një prind i shpjegon fëmijës zbritjen me shtim të barabartë dhe fëmija vjen në klasë me këtë metodë. Mësuesi i thotë se «nuk bëhet kështu». Studentët vlerësojnë reagimin: metoda është e vlefshme dhe mbështetet te ruajtja e diferencës. Ndërhyrja e përshtatshme e pyet nxënësin pse metoda funksionon dhe e lidh me rigrupimin, pa e ndaluar.

Situata 3. Në një diskutim, një nxënës thotë: «Numri me më shumë nëntëshe është më i madh». Studentët ndërtojnë kundërshembuj (999 dhe 1 000) dhe tregojnë cilën pjesë të pohimit 9.2 ka harruar nxënësi. Pastaj hartojnë një pyetje që e çon vetë nxënësin te kundërshembulli.

13.3 Test përmbledhës (30 minuta, 20 pikë)

Testi kërkon llogaritje, justifikim, vërtetim dhe analizë didaktike, prandaj koha e parashikuar është 30 minuta. Testi mbulon algoritmet, klasat e numrave, renditjen dhe diagnostikimin. Në një version 15-minutësh mbahen vetëm detyrat 2 dhe 4.

1) Llogaritni $3\,004 - 1\,657$, shpjegoni rigrupimin dhe kontrolloni rezultatin. (5 pikë; 7 minuta)

2) Shkruani me shifra «dyzet mijë e tetë» dhe «dy milionë e tre mijë e dyzet». Pastaj krahasoni 998 dhe 1 009 dhe argumentoni me pohimin 9.2. (4 pikë; 6 minuta)

3) Le të jetë $b = 10 \times b_1 + b_0$ një pjesëtues dyshifror dhe P një numër i plotë jonegativ me $P < 10 \times b$. Vërtetoni se herësi i P me $10 \times b_1$ nuk është më i vogël se herësi i P me b. Ilustroni me 86 dhe 24. (5 pikë; 8 minuta)

4) Një nxënës shkruan $34 \times 26 = 272$. Formuloni dy hipoteza, një pyetje që i dallon dhe një ndërhyrje. (6 pikë; 9 minuta)

13.4 Çelësi orientues i testit

1) $3\,004 = 2\,000 + 900 + 90 + 14$; kolonat japin 7, 4, 3 dhe 1: rezultati është 1 347. Kontrolli:

$$1\,347 + 1\,657 = 3\,004 \quad \text{dhe} \quad 2\,000 + 900 + 90 + 14 = 3\,004.$$

Pikët: 2 për rigrupimin, 2 për zbritjen, 1 për kontrollin.

2) 40 008 dhe 2 003 040: pas klasës së parë, çdo klasë shkruhet me tri shifra. 1 009 ka katër shifra dhe 998 tre, prandaj sipas pohimit 9.2 (i), $998 \le 999 < 1\,000 \le 1\,009$. *Pikët:* 1 për secilin numër, 2 për krahasimin e argumentuar.

3) Le të jetë t herësi i P me b; atëherë $b \times t \le P$. Meqë $10 \times b_1 \le b$, kemi $(10 \times b_1) \times t \le P$. Herësi i P me $10 \times b_1$ është numri më i madh q me $(10 \times b_1) \times q \le P$, prandaj është të paktën t. Te 86 dhe 24: 86 me 20 jep 4, ndërsa herësi i saktë është 3. *Pikët:* 2 për mosbarazimin $10 \times b_1 \le b$, 2 për përdorimin e karakterizimit të herësit, 1 për shembullin.

4) Përgjigjja e saktë është 884. H1: nxënësi e merr shifrën 2 të 26-ës si 2 njësi, sepse nuk e lidh me 20; ka llogaritur 34×8. H2: e di zhvendosjen, por e ka harruar në këtë rast. Pyetja: «Ku është 34×20 në drejtkëndësh?», e ndjekur nga rasti i ri 23×14. Nëse gabimi përsëritet te rasti i ri, H1 bëhet më e besueshme. Ndërhyrja: modeli i syprinës me katër pjesë dhe rreshtat e algoritmit me prodhimet e plota pranë tyre. *Pikët:* 2 për hipotezat, 2 për pyetjen dhe rastin e ri, 2 për ndërhyrjen e lidhur me hipotezën.

13.5 Rubrikat

Tabela 4. *Rubrika analitike e punës së studentit (0–2 pikë për dimension)*

Dimensioni	0 – i pamjaftueshëm	1 – pjesërisht	2 – plotësisht
Saktësia matematikore	Rregull i gabuar ose rezultat pa kontroll	Llogaritje e saktë, justifikim i paplotë	Llogaritje, justifikim dhe kontroll
Paraqitjet	Mungojnë	Një paraqitje pa lidhje me algoritmin	Paraqitje e lidhur hap pas hapi me algoritmin
Analiza didaktike	Vetëm korrigjim	Hipotezë pa provë	Hipoteza, pyetje dhe ndërhyrje
Gjuha profesionale	Terma të pasaktë	Terminologji kryesisht e saktë	Gjuhë e saktë dhe e përshtatur

Tabela 5. *Rubrika e diagnostikimit të gabimeve (0–3)*

Niveli	Interpretimi i punës	Cilësia e ndërhyrjes	Kontrolli në rast të ri
0 – i pamjaftueshëm	E ngatërron gabimin me diagnozën	Jep vetëm përgjigjen e saktë	Nuk parashikon kontroll
1 – fillestar	Gjen një hipotezë	Propozon një ushtrim të ngjashëm	Kontrollon vetëm rezultatin
2 – kompetent	Krahason dy hipoteza me pyetje	Zgjedh një model që i përshtatet gabimit	Detyrë e ngjashme, e interpretuar
3 – i avancuar	Ndërton provë që i dallon hipotezat	Kalon nga materiali te shkrimi sipas nevojës	Rast i ri me strukturë të ndryshuar

Rubrika e Tabelës 4 vlerëson produktin e punës së studentit në katër dimensione, prandaj përdor tri nivele, 0–2, që dallohen lehtë gjatë korrigjimit. Rubrika e Tabelës 5 përshkruan zhvillimin e një aftësie të vetme profesionale, diagnostikimin, dhe për këtë arsye ka katër nivele, 0–3; niveli 3 kërkon edhe hartimin e një rasti të ri. Dy shkallët nuk mblidhen; secila përdoret për qëllimin e vet.

Vetëvlerësim. A mund ta shpjegoj çdo shifër të vogël që shkruaj sipër kolonave? A mund të tregoj pse bartja në mbledhjen e dy numrave nuk kalon 1? A mund ta dalloj një defekt procedural nga një gabim i rastësishëm? A mund të formuloj një pyetje që i dallon?

LEKSIONI 6 · KAPITULLI 14

14. Përmbledhje dhe punë e pavarur

NË KËTË KAPITULL

- Sinteza e leksionit
- Punë individuale pas leksionit

14.1 Sinteza e leksionit

Katër algoritmet me shkrim janë procedura të dallueshme, të mbështetura në sistemin dhjetor pozicional dhe në vetitë përkatëse të veprimeve. Të katra zbatojnë të njëjtën bazë: zbërthimin sipas rendeve, të kombinuar me vetitë e veprimeve dhe me rregullimin që e kthen rezultatin në shkrim dhjetor. Bartja, rigrupimi, zhvendosja e rreshtit dhe këmbimi i mbetjes janë emra të ndryshëm të këtij rregullimi. Klasat e numrave zgjerojnë të njëjtin sistem përtej mijëshes, me grupim në treshe që u përshtatet emrave të numrave. Renditja në $\mathbb{N}_0$, e përkufizuar me mbledhjen, shpjegon rregullin e krahasimit dhe rrumbullakimin. Kompetenca profesionale e mësuesit duket kur këto lidhje bëhen pjesë e shpjegimit, e diagnostikimit dhe e vlerësimit.

14.2 Punë individuale pas leksionit

- Hartoni një fletë diagnostike me 6 ushtrime zbritjeje që dallon defektin «e vogla nga e madhja» nga defekti me zeron; për secilin ushtrim shkruani rezultatin që jep secili defekt.
- Shkruani një analizë prej 500–700 fjalësh për gabimin $34 \times 26 = 272$: dy hipoteza, dy pyetje diagnostikuese, modeli vizual dhe kontrolli në rast të ri.
- Përgatitni një mikromësimdhënie 10-minutëshe për leximin e numrave me zero brenda klasës së mijësheve.
- Lexoni kapitullin e Ma (1999) për zbritjen me rigrupim dhe përmblidhni në 250–300 fjalë dallimin ndërmjet «marrjes hua» dhe «këmbimit të një njësie të rendit më të lartë».

LEKSIONI 6 · KAPITULLI 15

15. Bankë problemesh për studim të pavarur

1. Llogaritni $695 + 478$ dhe kontrolloni me vlerësim dhe me zbritje.
2. Llogaritni $800 - 357$ dhe shpjegoni pse sipër dy zerove shkruhen 9 dhe 10.
3. Llogaritni 5×809 dhe tregoni ku shfaqet bartja te zeroja.
4. Llogaritni 52×37 me modelin e syprinës dhe me algoritmin.

5. Llogaritni 1 512 : 6 dhe kontrolloni rezultatin.

6. Llogaritni 912 : 38 duke përdorur dy vlerësimet e pohimit 6.1.

7. Shkruani me shifra «shtatë mijë e shtatë».

8. Sa milionë ka në një miliard? Argumentoni me rendet.

9. Krahasoni 100 099 dhe 99 999 dhe argumentoni me pohimin 9.2.

10. Gjeni numrin më të madh dhe numrin më të vogël katërshifror me shifra të ndryshme.

11. Rrumbullakoni 38 450 në mijëshen më të afërt.

12. Tregoni pse një milion sekonda janë më pak se dy javë.

LEKSIONI 6 · KAPITULLI 16

16. Përgjigje të shkurtra për kontrollin e punës

1. 695 + 478 = 1 173; vlerësimi 700 + 480 = 1 180; kontrolli 1 173 − 478 = 695.

2. 800 = 700 + 90 + 10; 800 − 357 = 443. Kontrolli: 443 + 357 = 800.

3. 5 × 9 = 45: shkruajmë 5, bartim 4; 5 × 0 + 4 = 4; 5 × 8 = 40. Rezultati 4 045.

4. 50 × 30 + 50 × 7 + 2 × 30 + 2 × 7 = 1 500 + 350 + 60 + 14 = 1 924; në algoritëm 52 × 7 = 364 dhe 52 × 30 = 1 560.

5. 1 512 : 6 = 252, sepse 6 × 252 = 1 512.

6. 91 dhjetëshe: me 30 jep 3, me 40 jep 2; 38 × 3 = 114 > 91, prandaj shifra është 2, me mbetje 15. 152 njësi: me 30 jep 5, me 40 jep 3; 38 × 5 = 190 > 152 dhe 38 × 4 = 152. Herësi është 24.

7. 7 007.

8. 1 000, sepse 1 000 000 000 = 1 000 × 1 000 000: klasa e miliardave ka tri rende më shumë se ajo e milionave.

9. 100 099 ka gjashtë shifra dhe 99 999 pesë, prandaj 100 099 > 99 999.

10. 9 876 dhe 1 023.

11. 38 000, sepse 38 450 është më afër 38 000 sesa 39 000.

12. Dy javë kanë 14 × 86 400 = 1 209 600 sekonda, më shumë se 1 000 000.

L E K S I O N I 6

Bibliografia

Shënim mbi përdorimin e burimeve

Bibliografia ndjek stilin APA (botimi i 7-të). Argumentet matematikore mbështeten te vërtetimet në tekst; burimet empirike citohen vetëm për pohime mbi mësimdhënien dhe të nxënit. Shembujt, dialogët dhe rastet e nxënësve janë hartuar për këtë leksion.

Literatura e cituar

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Brown, J. S., & Burton, R. R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science, 2*(2), 155–192. https://doi.org/10.1207/s15516709cog0202_4

Education Endowment Foundation. (2017). *Improving mathematics in Key Stages Two and Three: Guidance report*. https://educationendowmentfoundation.org.uk/education-evidence/guidance-reports/maths-ks-2-3

Fuchs, L. S., Newman-Gonchar, R., Schumacher, R., Dougherty, B., Bucka, N., Karp, K. S., Woodward, J., Clarke, B., Jordan, N. C., Gersten, R., Jayanthi, M., Keating, B., & Morgan, S. (2021). *Assisting students struggling with mathematics: Intervention in the elementary grades* (WWC 2021006). National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. https://ies.ed.gov/ncee/WWC/PracticeGuide/26

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), 130–162. https://doi.org/10.2307/749759

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum Associates.

Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review, 27*(4), 587–597. https://doi.org/10.1007/s10648-015-9302-x

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2018). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions* (2nd ed.). Corwin.