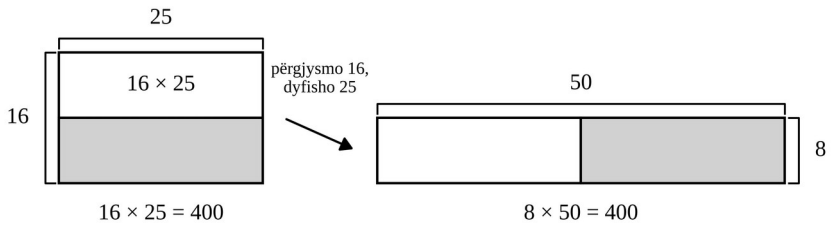
METODIKA E MATEMATIKËS 3

Leksioni 5 · Java XI

Shumëzimi me gojë dhe pjesëtimi me shkrim

Varësia e prodhimit dhe e herësit nga përbërësit e veprimeve



Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Material universitar për formimin fillestar të mësuesve të arsimit fillor

Metodika e Matematikës 3 · Leksioni 5 · Java XI

Shumëzimi me gojë dhe pjesëtimi me shkrim. Varësia e prodhimit dhe e herësit nga përbërësit e veprimeve

Autorja: Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Destinacioni: studentët e programit të formimit fillestar të mësuesve të arsimit fillor. Materiali mbulon Javën XI të temës 5 të programit, për katër orë akademike dhe për studim të pavarur.

SI TË LEXOHET KY MATERIAL

Përkufizimet, pohimet dhe vetitë paraqiten në kuti me sfond të kaltër të lehtë; vërtetimet vijojnë menjëherë pas tyre dhe mbyllen me shenjën ∎.

Njësitë profesionale, me shirit të errët në krye, ndjekin gjithmonë të njëjtat shtatë hapa: shembulli i zgjidhur, paraqitja në klasë, pyetja diagnostikuese, përgjigja e mundshme e nxënësit, analiza didaktike, alternativa ose kundërshembulli dhe pyetja reflektuese.

Kapitujt 2–9 mbyllen me kutinë «Idetë kryesore të kapitullit», që shërben për përsëritje dhe vetëkontroll.

Dialogët, përgjigjet e nxënësve dhe rastet e gabimeve janë simulime didaktike dhe nuk paraqiten si të dhëna empirike. Figurat, problemet, sekuencat mësimore dhe rubrikat janë hartuar posaçërisht për këtë leksion.

© 2026 Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Përmbajtja

Hyrje **5**
Si të studiohet ky leksion 5
Pyetja hyrëse 5

1. Vendi në program dhe rezultatet e të nxënit **6**
1.1 Roli i leksionit në vazhdimësinë e programit 6
1.2 Rezultatet e të nxënit 6
1.3 Organizimi i katër orëve akademike 7

2. Korniza teorike: njohuria matematikore për mësimdhënie **8**
2.1 Kuptimi konceptual, rrjedhshmëria procedurale dhe njohuria profesionale 8
2.2 Parimet e hartimit didaktik 8

3. Shumëzimi: nga kuptimi i veprimit te strategjia me gojë **12**
3.1 Përkufizimi i shumëzimit dhe marrëveshja për grupet 12
3.2 Kuptimet e shumëzimit 13
3.3 Vetitë që justifikojnë strategjitë e shumëzimit 15
3.4 Njësi profesionale: vetia shpërndarëse 18

4. Shumëzimi me gojë: strategjitë **19**
4.1 Çfarë kuptojmë me rrjedhshmëri në llogaritjen me gojë 19
4.2 Strategjia A: zbërthimi sipas vlerës vendore 20
4.3 Strategjia B: kompensimi rreth një dhjetësheje 21
4.4 Strategjia C: dyfishimi dhe përgjysmimi 21
4.5 Strategjia D: rigrupimi dhe prodhimet e njohura 21
4.6 Strategjia E: ndërtimi nga faktet bazë 22
4.7 Diskutimi në klasë: «Si e llogarite?» 24
4.8 Gabimet në shumëzimin me gojë dhe diagnostikimi 25
4.9 Njësi profesionale: zgjedhja e strategjisë 26

5. Nga shumëzimi te pjesëtimi **28**
5.1 Probleme që duken të ngjashme, por nuk janë 28
5.2 Pjesëtimi pa mbetje dhe rastet me zero 29
5.3 Dy kuptimet e pjesëtimit 30
5.4 Teorema e pjesëtimit me mbetje 30
5.5 Nga zbritjet e përsëritura te herësit e pjesshëm 33
5.6 Algoritmi standard i pjesëtimit me shkrim: 936 : 4 34
5.7 Kur në herës duhet shkruar zero: 816 : 4 35
5.8 Një rast me mbetje: 947 : 4 35
5.9 Pse funksionon algoritmi standard 35
5.10 Kontrolli i rezultatit dhe kufijtë e metodës 38
5.11 Njësi profesionale: zeroja në herës 39

6. Varësia e prodhimit nga faktorët **41**
6.1 Kur ndryshon njëri faktor 41
6.2 Kur ndryshojnë të dy faktorët dhe kur prodhimi ruhet 41
6.3 Si ta mësojmë varësinë e prodhimit 42

7. Varësia e herësit nga i pjesëtueshmi dhe pjesëtuesi **45**
7.1 Pjesëtimi pa mbetje 45
7.2 Kur shumëzohen të dy përbërësit 46
7.3 Kur ndryshon vetëm i pjesëtueshmi, me mbetje 46
7.4 Kur ndryshon vetëm pjesëtuesi 47
7.5 Nga varësitë te mendimi paraalgjebrik 47
7.6 Njësi profesionale: ruajtja e herësit 49

8. Gabimet si burim informacioni për mësimdhënien **51**
8.1 Modeli diagnostik: çfarë shohim, hipotezë, provë, ndërhyrje, kontroll 51
8.2 Tri raste për analizë profesionale 51

8.3 Matricë e shkurtër e vlerësimit formues 52
8.4 Nga gabimi që shohim te shkaku i mundshëm 52
8.5 Një bisedë diagnostikuese e modeluar 53
8.6 Rubrikë e shkurtër për diagnostikimin e gabimeve 53
8.7 Një instrument me dy faza 53
8.8 Si zgjedhim ndërhyrjen: çfarë rekomandojnë udhëzuesit 54

9. Hartimi i mësimit: nga teoria te klasa 56
9.1 Një sekuencë e shkurtër: «Sa mënyra ka për 18 × 6?» 56
9.2 Një sekuencë e shkurtër: «Ku humbi zeroja?» 56
9.3 Diferencimi dhe mbështetja e nxënësve 56

10. Punëtoria universitare: detyra me analizë dhe përgjigje orientuese 59
10.1 Detyra 1: katër strategji për të njëjtin prodhim 59
10.2 Detyra 2: vërtetoni, mos u mjaftoni me shembuj 59
10.3 Detyra 3: algoritmi me shkrim dhe zeroja 60
10.4 Detyra 4: pjesëtimi me mbetje dhe kalimi te shumëzimi 60
10.5 Detyra 5: pohime për herësin 60
10.6 Detyra 6: gjurmët e arsyetimit të nxënësit 61
10.7 Detyra 7: algoritmi para modelit apo modeli para algoritmit? 61
10.8 Detyra 8: dy pyetje diagnostikuese 61
10.9 Dymbëdhjetë detyra me zgjidhje dhe interpretim didaktik 61

11. Vlerësimi përmbyllës dhe vetëvlerësimi 65
11.1 Kriteret e vlerësimit të punës së studentëve 65
11.2 Katër situata për seminar 65
11.3 Test përmbledhës (30 minuta, 20 pikë) 67
11.4 Çelësi orientues i testit 67
11.5 Rubrika e punës së studentit 68

12. Përmbledhje dhe punë e pavarur 69
12.1 Sinteza e leksionit 69
12.2 Punë individuale pas leksionit 69
12.3 Çfarë e dallon ekspertizën e mësuesit 69

13. Bankë problemesh për studim të pavarur 70

14. Përgjigje të shkurtra për kontrollin e punës 70

Bibliografia 71
Shënim mbi përdorimin e burimeve 71
Literatura e cituar 71

LEKSIONI 5

Hyrje

Si të studiohet ky leksion

Studioni fillimisht kuptimet e veprimeve dhe argumentet matematikore. Pastaj krahasoni strategjitë, analizoni rastet e nxënësve dhe punoni njësitë profesionale. Detyrat e zgjidhura përdorini për vetëkontroll, pasi të keni provuar vetë zgjidhjen. Dialogët dhe rastet e nxënësve janë simulime didaktike, jo të dhëna nga studime empirike.

Në këtë leksion shumëzimin e shënojmë me ×, pjesëtimin me dy pika (:), dhe ndjekim marrëveshjen e leksioneve të mëparshme: në m × n faktori i parë numëron grupet ose rreshtat, i dyti tregon sa elemente ka secili grup ose rresht. Shembujt numerikë janë zgjedhur kryesisht me numra treshifrorë, që vëmendja të përqendrohet te struktura e veprimit dhe te arsyetimi, jo te gjatësia e llogaritjes.

Pyetja hyrëse

> Dy nxënës kanë llogaritur 816 : 4. I pari ka shkruar 204, i dyti 24. Të dy kanë bërë saktë hapat 8 : 4 = 2 dhe 16 : 4 = 4. Çfarë di i pari që i dyti ndoshta nuk e di? Si do ta kuptonit, pa ia thënë ju rezultatin, nëse i dyti ka harruar thjesht të shkruajë një shifër apo nuk e lidh herësin me vlerën vendore? Shkruani përgjigjen tuaj dhe rikthehuni te ajo pas kapitullit 8.

1. Vendi në program dhe rezultatet e të nxënit

NË KËTË KAPITULL

- Roli i leksionit në vazhdimësinë e programit
- Rezultatet e të nxënit
- Organizimi i katër orëve akademike

1.1 Roli i leksionit në vazhdimësinë e programit

Në javët e mëparshme studentët kanë studiuar kuptimet e shumëzimit dhe të pjesëtimit dhe lidhjen e tyre me mbledhjen, zbritjen dhe sistemin dhjetor. Java XI kalon nga njohja e veprimit te kuptimi i strategjive të llogaritjes dhe i algoritmeve. Nuk rritet vetëm vështirësia e numrave: tani studiojmë pse një procedurë jep rezultatin e saktë, cilat veti matematikore e justifikojnë dhe çfarë mund të mësojë mësuesi nga puna e nxënësit.

Leksioni trajton shumëzimin me gojë, pjesëtimin me shkrim dhe varësinë e prodhimit e të herësit nga përbërësit. Shumëzimi me gojë mbështetet te vetitë e veprimit dhe te ndërtimi i numrave; pjesëtimi me shkrim ndërtohet mbi vlerën vendore dhe mbi teoremën e pjesëtimit me mbetje. Algoritmet e tjera me shkrim, klasat e numrave dhe renditja në ℕ janë tema e Javës XII.

1.2 Rezultatet e të nxënit

Në përfundim të punës në auditor dhe të studimit individual, studenti duhet të jetë në gjendje:

- të dallojë modelin e grupeve të barabarta, modelin e syprinës dhe modelin e prodhimit kartezian dhe të shpjegojë kur përdoret secili;
- të vërtetojë me vetitë e veprimeve të paktën katër strategji të shumëzimit me gojë dhe të argumentojë zgjedhjen e tyre për numra të ndryshëm;
- të formulojë teoremën e pjesëtimit me mbetje dhe të justifikojë matematikisht hapat e algoritmit të pjesëtimit me shkrim;
- të dallojë shifrën nga vlera e saj vendore, edhe kur në herës duhet shkruar një zero;
- të formulojë rregullat e varësisë së prodhimit dhe të herësit, bashkë me kushtet dhe rastet kufitare;
- të analizojë gabimin e një nxënësi si hipotezë, të kërkojë prova të tjera dhe të propozojë një ndërhyrje që mund të kontrollohet;
- të hartojë një sekuencë 10–15-minutëshe me paraqitje, pyetje orientuese dhe vlerësim formues.

1.3 Organizimi i katër orëve akademike

Tabela 1. *Organizimi orientues i katër orëve akademike*

Ora	Bërthama	Puna e studentit	Çfarë prodhon studenti
I · 45 min	Kuptimi i shumëzimit; shumëzimi me gojë	Zgjidhje të krahasuara dhe diskutim	Hartë me katër strategji të justifikuara
II · 45 min	Pjesëtimi me shkrim dhe vlera vendore	Rindërtim i algoritmit, kontroll i invariantit	Zgjidhje e komentuar me kontroll
III · 45 min	Varësia e prodhimit dhe e herësit	Pohime, kundërshembuj, përgjithësime	Tabelë me kushtet matematikore
IV · 45 min	Diagnostikim, mikromësimdhënie, reflektim	Analizë e punës së nxënësit, plan ndërhyrjeje	Fletë diagnostike dhe pyetje përmbyllëse

Organizimi prej 180 minutash është një skemë pune që përshtatet me orarin e lëndës. Ai merr nga ky material veprimtaritë kryesore; vërtetimet e plota, njësitë profesionale dhe detyrat plotësuese shërbejnë edhe për studim të pavarur. Teksti nuk është menduar të lexohet i tëri në një orë mësimi.

Për menaxhimin e ngarkesës, materiali ndahet në tri shtresa:

- *Në auditor* trajtohen detyrimisht, pa vërtetimet e plota, kapitujt 3–7 dhe seksionet 8.1–8.2: kuptimet dhe vetitë e shumëzimit, strategjitë me gojë, teorema e pjesëtimit me mbetje, algoritmi me shkrim, varësia e prodhimit dhe e herësit, si dhe modeli diagnostik.
- *Në seminar* punohen vërtetimet (3.3.1, 5.4.1, 5.9.1, 7.2), njësitë profesionale, seksionet 8.3–8.8, kapitulli 9 për hartimin e mësimit dhe detyrat 10.1–10.8.
- *Në studim individual* mbeten kapitulli 2, detyrat 10.9, banka e problemeve në kapitullin 13 dhe puna e pavarur në 12.2; testi i kapitullit 11 përdoret për vetëkontroll ose për vlerësim.

2. Korniza teorike: njohuria matematikore për mësimdhënie

NË KËTË KAPITULL

- Kuptimi konceptual, rrjedhshmëria procedurale dhe njohuria profesionale
- Parimet e hartimit didaktik

2.1 Kuptimi konceptual, rrjedhshmëria procedurale dhe njohuria profesionale

Një mësues mund ta dijë se 936 : 4 = 234 dhe megjithatë të mos jetë gati të shpjegojë pse në algoritëm ndahen fillimisht qindëshet, çfarë tregon shifra 3 në herës dhe pse kontrolli me shumëzim e vërteton rezultatin. Ky dallim, ndërmjet aftësisë për të zgjidhur një ushtrim dhe aftësisë për ta mësuar atë, është në qendër të idesë së *njohurisë matematikore për mësimdhënie* (Ball et al., 2008). Njohuria e specializuar e mësuesit shfaqet pikërisht kur ai duhet të interpretojë një zgjidhje jo të zakonshme, të zbulojë një rregull të gabuar ose të zgjedhë një paraqitje që e bën të dukshme një marrëdhënie.

Raporti *Adding It Up* (National Research Council, 2001) dallon pesë përbërës të lidhur të kompetencës matematikore: kuptimin konceptual, rrjedhshmërinë procedurale, kompetencën strategjike, arsyetimin përshtatës dhe prirjen produktive, pra bindjen se matematika ka kuptim dhe se përpjekja shpërblehet. Strategjia

$$19 \times 7 = 20 \times 7 - 7$$

e bën të dukshme vetëm një pjesë të tyre: kuptimin e vetisë shpërndarëse, kompetencën strategjike kur nxënësi zgjedh këtë rrugë dhe arsyetimin kur shpjegon pse hiqet 7 dhe jo 1. Një barazim i vetëm nuk provon rrjedhshmërinë procedurale, e cila duket në përdorimin e saktë dhe fleksibël në shumë raste, dhe as prirjen produktive, që lidhet me qëndrimin e nxënësit ndaj matematikës gjatë një kohe më të gjatë.

2.2 Parimet e hartimit didaktik

Një sekuencë e mirë hartohet duke u nisur nga ideja matematike që synojmë, jo nga mjeti konkret ose nga forma e detyrës. Për shembull, rrjeta me objekte mund ta bëjë të dukshme vetinë shpërndarëse, por vetëm nëse nxënësit i kërkohet ta lidhë ndarjen e figurës me barazimin

$$4 \times (4 + 2) = 4 \times 4 + 4 \times 2.$$

Një figurë e treguar pa këtë lidhje mbetet zbukurim. Udhëzuesit e EEF (2017) dhe të WWC (Fuchs et al., 2021) theksojnë përdorimin e qëllimshëm të paraqitjeve dhe shfrytëzimin e asaj që na tregon arsyetimi i nxënësit.

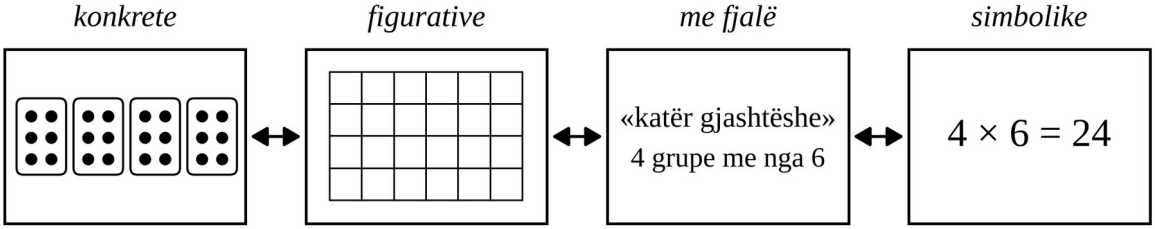


Figura 1. Katër paraqitje të të njëjtit prodhim, 4 × 6. Shigjetat shkojnë në të dy drejtimet: nxënësi duhet të dijë të kalojë nga njëra te tjetra dhe të shpjegojë çfarë ruhet gjatë kalimit.

Argumentimi në nivel universitar ndryshon nga shpjegimi për nxënësin e arsimit fillor. Vërtetimi formal i jep mësuesit një bazë të sigurt matematikore; në klasë mësuesi zgjedh modele, gjuhë dhe pyetje sipas njohurive të nxënësve. Dy nivelet duhet të thonë të njëjtën gjë, edhe kur e thonë në mënyra të ndryshme.

2.2.1 Njohuria e specializuar e mësuesit: katër pikëpamje

Ball et al. (2008) e dallojnë njohurinë e zakonshme të përmbajtjes nga njohuria e specializuar që i duhet mësuesit në punën e tij. Për një qytetar mjafton të dijë ta kryejë saktë 816 : 4. Mësuesit i duhet gjithashtu të shpjegojë pse zeroja duhet shkruar në herës, të kuptojë çfarë tregon për vlerën vendore një përgjigje e gabuar dhe të zgjedhë një varg detyrash që e ndihmon nxënësin të kuptojë. Kështu matematika elementare merr një status tjetër: një procedurë e thjeshtë për të rriturin bëhet objekt i një analize profesionale të hollë.

Pikëpamja e parë është analiza e përmbajtjes: çfarë strukture matematike ka detyra dhe në cilën bashkësi numrash ka kuptim? Për 25 × 16 mësuesi duhet të japë të paktën dy argumente: njërin me vetinë shoqëruese,

$$25 \times (4 \times 4) = (25 \times 4) \times 4 = 400,$$

dhe tjetrin me ruajtjen e prodhimit kur njërin faktor e dyfishojmë dhe tjetrin e përgjysmojmë. Për 25 × 15, gjysma e 15-ës nuk është numër natyror; mësuesi që punon vetëm në $\mathbb{N}$ nuk mund ta përdorë shndërrimin 50 × 7,5 pa shpjegime të tjera. Kjo pikëpamje kërkon saktësi në kushtet e veprimit dhe në llojin e arsyetimit, jo vetëm në rezultat.

Pikëpamja e dytë është zgjedhja e paraqitjes. Grupet e barabarta lidhen drejtpërdrejt me shumëzimin si përsëritje e së njëjtës sasi; rrjeta e bën të dukshme shpërndarjen; tabela e vlerës vendore e bën të kuptueshëm rigrupimin; herësit e pjesshëm tregojnë prodhimin që hiqet në çdo hap të pjesëtimit. Një figurë është e dobishme kur përdoret për të shpjeguar një lidhje të saktë me simbolet. Nëse nxënësi e kopjon vizatimin pa e shpjeguar, kjo nuk dëshmon se ka kuptuar.

Prandaj mësuesi i kërkon nxënësit ta lidhë çdo element të modelit me numrat dhe veprimet e barazimit.

Pikëpamja e tretë është interpretimi i mendimit të nxënësit. Kur nxënësi shkruan

$$19 \times 8 = 20 \times 8 + 8,$$

mësuesi nuk mund të përfundojë menjëherë se nxënësi nuk e di tabelën e shumëzimit. Shkrimi mund të tregojë një keqkuptim të kompensimit, por edhe një pakujdesi. Detyra profesionale është të formulojë një hipotezë dhe një pyetje që e dallon atë nga hipoteza tjetër. Një pyetje e mirë do të ishte: «Nëse ke njëzet qese me nga tetë dhe heq një qese, a do të kesh më shumë apo më pak?» Përgjigjja e nxënësit e drejton ndërhyrjen.

Pikëpamja e katërt është hapi që bën mësuesi më pas: të përsërisë modelin, të krahasojë dy zgjidhje, të ushtrojë një fakt bazë apo të kërkojë një përgjithësim? Kjo varet nga ajo që tregon nxënësi dhe nga qëllimi i orës. Studenti që e gjen gabimin, por nuk di të formulojë pyetjen që e verifikon ose ta lidhë me një ndërhyrje, nuk e ka treguar ende gjithë njohurinë profesionale që kërkon ky leksion.

Për çdo problem studenti mund të përdorë një protokoll të shkurtër: (1) përshkruaj strukturën matematikore; (2) jep një argument që procedura është e vlefshme; (3) zgjidh dhe justifiko një paraqitje; (4) parashiko një strategji të nxënësit dhe një gabim të mundshëm; (5) formulo një pyetje që i dallon hipotezat; (6) cakto një detyrë për zbatim në rast të ri. Protokolli është mjet për të menduar, jo formular për t'u plotësuar. Ai përshtatet me detyrën dhe me fëmijën, dhe nuk zbatohet mekanikisht në çdo rast.

2.2.2 Kuptimi dhe procedura: çfarë tregojnë kërkimet

Një qasje tradicionale e vendos kuptimin para procedurës dhe automatizimin në fund; një qasje tjetër nis nga algoritmi dhe shpreson që kuptimi të vijë vetë me ushtrimin. Rittle-Johnson et al. (2015) argumentojnë se njohuria konceptuale dhe ajo procedurale zhvillohen duke ndikuar njëra-tjetrën. Kjo nuk do të thotë që mësuesi mund t'i japë procedurat pa shpjegim, as që çdo koncept duhet kuptuar plotësisht para se nxënësi të provojë një veprim. Do të thotë që orët duhet të hartohen si cikle: procedura, e lidhur me kuptimin, sjell raste të reja për reflektim dhe përgjithësim.

Për shembull, nxënësi që di të shpërndajë 24 objekte në gjashtë grupe e kupton pjesëtimin si ndarje. Në një detyrë me 246 objekte atij i duhet një procedurë që i trajton numrat me dhjetëshe dhe qindëshe. Pasi bën rigrupimin me materiale, algoritmi i pjesëtimit me shkrim i duket si një shkurtim i dobishëm. Kur e përdor me disa numra ku në herës del zero, nxënësi mund të vërejë se edhe një «vend bosh» duhet shënuar në sistemin dhjetor. Këtu procedura bëhet vetë burim kuptimi.

Duhet pasur kujdes të mos ngatërrohet një rekomandim didaktik me një përfundim eksperimental të përgjithshëm. Udhëzuesi i WWC (Fuchs et al., 2021) përmbledh provat për ndërhyrje të caktuara në klasat fillore, ndërsa EEF (2017) u drejtohet edhe niveleve të tjera;

asnjëri nuk e zëvendëson analizën e përmbajtjes dhe të kontekstit. Mësuesi mund ta modelojë një procedurë me mësimdhënie të drejtpërdrejtë, të krahasojë strategji për të nxjerrë në pah vetitë ose të zhvillojë një diskutim për të gjetur kuptime të ndryshme. Zgjedhjen e argumenton me qëllimin e orës dhe me atë që tregojnë nxënësit.

2.2.3 Tri tensione në hartimin e mësimdhënies

Tensioni i parë është ndërmjet shumë strategjive dhe ngarkesës mendore të nxënësit. Nëse në një orë paraqiten pesë procedura për 36 × 25, klasa mund të mos mësojë asnjërën me kuptim, sidomos kur nxënësit nuk njohin ende dyfishimin, plotëpjesëtueshmërinë dhe vlerën vendore. Mësuesi zgjedh pak zgjidhje, ku dallimi matematik është i qartë, i rendit me kujdes dhe lë kohë për argumentim. Kjo përputhet me pesë praktikat e Smith dhe Stein (2018): parashikimi, vëzhgimi, zgjedhja, renditja dhe lidhja e zgjidhjeve.

Tensioni i dytë është ndërmjet shkrimit të shkurtër dhe arsyetimit të dukshëm. Algoritmi i pjesëtimit është i shpejtë sepse nuk i shkruan të gjitha prodhimet e pjesshme me vlerën e tyre të plotë, por pikërisht kjo e fsheh për një kohë kuptimin. Herësit e pjesshëm, vizatimi i dhjetësheve dhe qindësheve dhe algoritmi standard duhet të lidhen me të njëjtin numër. Nxënësi mund të kalojë gradualisht nga shkrimi 936 − 800 − 120 − 16 te shkrimi tradicional, duke mbetur i aftë të kthehet te shpjegimi i plotë kur një hap i bëhet i paqartë.

Tensioni i tretë është ndërmjet vlerësimit të njëtrajtshëm dhe respektimit të strategjive personale. Një test që vlerëson vetëm kolonat e algoritmit mund ta nënvlerësojë nxënësin që ka gjetur një mënyrë të saktë dhe të përgjithshme. Nga ana tjetër, një vlerësim që pranon pa kontroll çdo strategji «krijuese» mund të mos zbulojë procedura të pavlefshme. Rubrika kontrollon saktësinë e rezultatit, vlefshmërinë e argumentit, lidhjen me paraqitjen dhe përshtatshmërinë për detyrën. Këto janë kritere matematike dhe didaktike, jo shije për një mënyrë shkrimi.

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Mësuesit i duhet më shumë se aftësia për të zgjidhur: ai interpreton zgjidhje, zgjedh paraqitje dhe vendos hapin e radhës.
- Paraqitja ndihmon vetëm kur nxënësi e lidh me simbolet dhe shpjegon çfarë ruhet gjatë kalimit nga njëra te tjetra.
- Kuptimi dhe procedura zhvillohen bashkë; ora hartohet si cikël ku procedura sjell raste të reja për reflektim.
- Rekomandimet e udhëzuesve nuk zëvendësojnë analizën e përmbajtjes dhe të klasës konkrete.

3. Shumëzimi: nga kuptimi i veprimit te strategjia me gojë

NË KËTË KAPITULL

- Përkufizimi i shumëzimit dhe marrëveshja për grupet
- Kuptimet e shumëzimit
- Vetitë që justifikojnë strategjitë e shumëzimit
- Njësi profesionale: vetia shpërndarëse

3.1 Përkufizimi i shumëzimit dhe marrëveshja për grupet

Punojmë në $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$; me $\mathbb{N}$ shënojmë numrat natyrorë pozitivë. Në modelin e grupeve, m × n do të thotë m grupe me nga n elemente. Kjo marrëveshje cakton rolin e faktorëve në problem; barazimi numerik

$$m \times n = n \times m$$

nuk i bën të njëjta rolet e tyre në tekstin e problemit.

Përkufizimi 3.1. Shumëzimi përkufizohet në mënyrë rekurzive me

$$0 \times n = 0 \quad \text{dhe} \quad (m + 1) \times n = m \times n + n.$$

Për $m \geq 1$ përkufizimi jep shumën e m të mbledhshmëve të barabartë me n.
Numrat m dhe n quhen faktorë; rezultati quhet prodhim.

Rasti m = 0 bën pjesë në përkufizim dhe nuk mbështetet te një shprehje e paqartë si «mbledhje zero herë».

Pohimi 3.1. Për bashkësi të fundme A dhe B vlen

$$|A \times B| = |A| \times |B|.$$

Vërtetim. Le të jetë $|B| = n$. Bëjmë induksion sipas $m = |A|$. Nëse $m = 0$, atëherë $A = \varnothing$,

$$A \times B = \emptyset \quad \text{dhe} \quad |A \times B| = 0 = 0 \times n.$$

Supozojmë se pohimi vlen për çdo bashkësi me m elemente dhe le të ketë A një element më shumë, $A = A' \cup \{a\}$, ku $a \notin A'$ dhe $|A'| = m$. Atëherë

$$A \times B = (A' \times B) \cup (\{a\} \times B)$$

dhe dy bashkësitë e djathta nuk kanë element të përbashkët. Prandaj

$$|A \times B| = m \times n + n = (m + 1) \times n,$$

sipas përkufizimit 3.1. ∎

Ky argument e lidh përkufizimin aritmetik me modelin e bashkësive: hapi induktiv i vërtetimit është i njëjti hap që bën fëmija kur shton edhe një grup me n objekte.

3.2 Kuptimet e shumëzimit

3.2.1 Llojet e problemeve: nga situata te veprimi

Në formimin e mësuesit, shumëzimi si mbledhje e përsëritur është një fillim i domosdoshëm, por nuk i përfshin të gjitha kuptimet e veprimit. Ai funksionon natyrshëm për grupe të barabarta me numër natyror elementesh. Nuk tregon vetvetiu krahasimin me «herë», numërimin e kombinimeve dhe ndërtimin drejtkëndor. Ky dallim vendos nëse mësuesi i zgjedh detyrat për të zhvilluar kuptimin apo vetëm për të ushtruar tabelën. Një problem për 6 × 4 mund të pyesë për numrin e lapsave në gjashtë kuti me nga katër, për numrin e vendeve në gjashtë rreshta me nga katër, ose për numrin e veshjeve që formohen nga gjashtë bluza dhe katër palë pantallona. Rezultati është i njëjtë, por problemet nuk kanë të njëjtën strukturë.

Te grupet e barabarta faktorët kanë role të ndryshme në problem: në gjashtë grupe me nga katër objekte, njëri numër numëron grupet dhe tjetri madhësinë e grupit. Ndërrueshmëria, 6 × 4 = 4 × 6, është veti e numrave dhe duhet argumentuar veçmas, për shembull duke e kthyer një rrjetë. Nëse mësuesi thotë se faktorët janë gjithmonë të ndërrueshëm edhe në kuptim, rrezikon të fshehë natyrën e situatës dhe ta ngatërrojë fëmijën kur duhet të interpretojë rezultatin me njësi.

Te modeli kartezian prodhimi numëron çifte të renditura. Nëse A është bashkësia e katër rrugëve dhe B bashkësia e tri mjeteve të transportit, atëherë

$$|\mathrm{A} \times \mathrm{B}| = |\mathrm{A}| \times |\mathrm{B}| = 12.$$

Kjo nuk është e njëjta pyetje me «katër grupe me nga tre objekte»: modeli i kombinimeve mbështetet te parimi që çdo zgjedhje e parë çiftohet me çdo zgjedhje të dytë. Mësuesi mund ta paraqesë me një tabelë me rreshta dhe shtylla dhe ta krahasojë numërimin sistematik me prodhimin. Kalimi te shkrimi me simbole ka vlerë vetëm kur studentët kuptojnë çfarë numërohet dhe pse nuk ka përsëritje dhe mungesa.

Krahasimi me «herë» kërkon kujdes të veçantë në gjuhë. Fjalitë «Era ka tre lapsa më shumë se Beni» dhe «Era ka tri herë aq lapsa sa Beni» kërkojnë përkatësisht mbledhje dhe shumëzim; nuk janë dy mënyra për të thënë të njëjtën gjë. Nëse Beni ka pesë lapsa, përgjigjet janë tetë dhe pesëmbëdhjetë. Një shirit që paraqet pesë lapsat e Benit si një njësi, dhe tri njësi të njëjta për lapsat e Erës, e tregon strukturën shumëzuese më qartë se udhëzimi për të nënvizuar «fjalët kyçe».

3.2.2 Nga një paraqitje te tjetra: çfarë ruhet

Një paraqitje mësimore është e dobishme kur përmban marrëdhënien matematike që duam të zbulojmë. Objektet e ndara në grupe tregojnë qartë madhësinë e çdo grupi; rrjeta tregon

ndërrueshmërinë dhe shpërndarjen; shiriti tregon raportin ndërmjet dy sasive; tabela e kombinimeve shpjegon pse numërohen të gjitha çiftet. Por çdo model ka kufij. Një rrjetë me 700 kuti nuk është praktike për 28 × 25, ndërsa shkrimi me simbole e llogarit shpejt vlerën, por mund ta fshehë kuptimin e faktorëve.

Që nxënësi të kalojë nga një paraqitje te tjetra, mësuesi bën pyetje që tregojnë çfarë i përgjigjet çfarë. Kur një rrjetë me 6 rreshta me nga 4 kuti shkruhet 6 × 4 = 24, numri 6 duhet t'i përgjigjet njërës përmasë, 4 tjetrës, dhe 24 numrit të kutive. Nëse rrjetën e ndajmë në dy drejtkëndësha, me 2 rreshta dhe me 4 rreshta, figura modelon 6 × 4 = 2 × 4 + 4 × 4 (Figura 2). Barazimi nuk është diçka që shkruhet pas veprimit: ai përshkruan dy mënyra për të numëruar të njëjtën bashkësi.

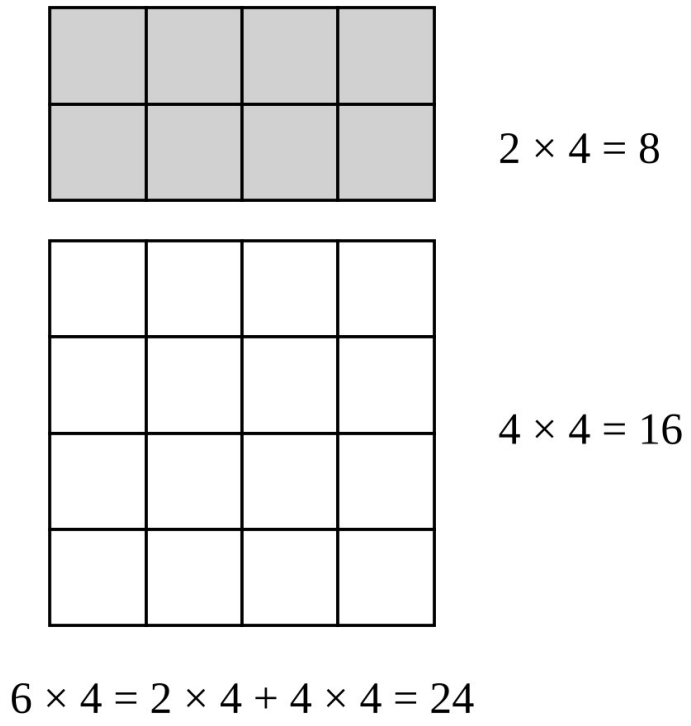


Figura 2. Rrjeta 6 × 4, me 6 rreshta me nga 4 kuti, e ndarë në 2 rreshta dhe 4 rreshta: 6 × 4 = 2 × 4 + 4 × 4 = 8 + 16 = 24.

Një detyrë e mirë për studentët është ta paraqesin 15 × 8 në tri forma dhe të tregojnë çfarë humbet secila. Me grupe të barabarta kemi 15 grupe që mund t'i numërojmë, por nuk shohim menjëherë pse

$$15 \times 8 = 10 \times 8 + 5 \times 8;$$

një rrjetë e ndarë e tregon këtë pa gjuhë formale. Shkrimi me simbole, nga ana tjetër, e lejon nxënësin ta përdorë të njëjtën ide për 150 × 8. Qëllimi nuk është të tregojmë sa më shumë modele, por të zgjedhim atë që e bën idenë të dallueshme në momentin e duhur.

Tabela 2. *Llojet e problemeve të shumëzimit*

Lloji	Shembull	Çfarë mëson nxënësi të dallojë	Kufiri didaktik
Grupe të barabarta	7 qese me nga 5 gështenja	Numrin e grupeve dhe madhësinë e secilit	Nuk e tregon vetvetiu ndërrueshmërinë.
Rrjetë drejtkëndore	7 rreshta me nga 5 vende	Ndërrueshmërinë, shpërndarjen, syprinën	Kërkon numërim të organizuar, jo të rastësishëm.
Krahasim me «herë»	Një shirit është 7 herë aq i gjatë sa një tjetër	Raportin ndërmjet dy madhësive	Ngatërrohet me «7 më shumë».
Prodhim kartezian	7 bluza dhe 5 pantallona	Çiftet e mundshme dhe numërimin sistematik	Kërkon dallimin e dy llojeve të zgjedhjes.

3.2.3 Analiza e detyrës si njohuri profesionale

Për të analizuar një problem me shumëzim nuk mjafton të gjejmë veprimin e fshehur në tekst. Studenti duhet të thotë çfarë sasie tregon secili numër, në çfarë njësie, cila është e panjohura, si lidhen sasitë dhe pse një model i caktuar e paraqet këtë lidhje. Le të marrim problemin: «Në secilën nga tetë tavolinat u ulën gjashtë fëmijë. Sa fëmijë u ulën gjithsej?» Këtu 8 numëron tavolinat, 6 fëmijët në një tavolinë dhe 48 të gjithë fëmijët. Problemi zgjidhet me grupe të barabarta, por mësuesi duhet të kontrollojë që asnjë fëmijë të mos jetë numëruar dy herë.

Tani ndryshojmë pyetjen: «Në sallë janë 48 fëmijë, të ndarë njësoj në tetë tavolina. Sa fëmijë janë në secilën tavolinë?» Ky është problem pjesëtimi ku nuk dimë madhësinë e grupit. Një ndryshim i dytë, «Sa tavolina duhen nëse në çdo tavolinë ulen gjashtë fëmijë?», ka të panjohur numrin e grupeve. Këto ndryshime e ndihmojnë mësuesin të shohë familjen e fakteve

$$8 \times 6 = 48, \quad 48 : 8 = 6 \ \text{ dhe } \ 48 : 6 = 8.$$

Në seminar studentët tregojnë se i njëjti model konkret mund t'i paraqesë të tria pyetjet, por secila kërkon nga nxënësi diçka tjetër.

3.3 Vetitë që justifikojnë strategjitë e shumëzimit

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c; \quad a \times (b - c) = a \times b - a \times c, \text{ kur } b \geq c; \tag{3.1}$$

$$a \times b = b \times a; \quad (a \times b) \times c = a \times (b \times c); \quad a \times 1 = a; \quad a \times 0 = 0. \tag{3.2}$$

Vetia shpërndarëse ka rëndësi të veçantë, sepse na lejon ta zëvendësojmë një prodhim të vështirë me një shumë ose diferencë prodhimesh më të lehta. Vetia ndërruese na lejon të ndërrojmë radhën e faktorëve pa ndryshuar prodhimin; vetia shoqëruese na lejon t'i grupojmë faktorët ndryshe. Kushti $b \geq c$ në (3.1) e mban diferencën brenda numrave natyrorë. Mësuesi i ardhshëm duhet ta dijë që çdo «marifet llogaritjeje» kthehet te një barazim matematik i vërtetuar.

3.3.1 Vërtetimi i vetive themelore

Njëshi dhe zeroja. Nga përkufizimi kemi

$$1 \times n = 0 \times n + n = n.$$

Me induksion sipas m, nga

$$m \times 0 = 0$$

del

$$(m + 1) \times 0 = m \times 0 + 0 = 0;$$

po kështu, nga m × 1 = m del

$$(m + 1) \times 1 = m + 1.$$

Pra njëshi është element neutral, ndërsa zeroja element thithës i shumëzimit.

Ndërrueshmëria. Pasqyrimi (x, y) ↦ (y, x) është bijeksion nga A × B në B × A. Prandaj këto bashkësi kanë të njëjtin numër elementesh dhe, sipas pohimit 3.1,

$$m \times n = n \times m.$$

Në klasë argumenti bëhet leximi i së njëjtës rrjetë një herë sipas rreshtave dhe një herë sipas shtyllave. Rrjeta jep një arsye të përgjithshme; disa barazime numerike japin vetëm raste të veçanta.

Shpërndarja. Vërtetojmë

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

me induksion sipas b. Për b = 0 barazimi është i menjëhershëm. Nëse vlen për b, atëherë

$$(a + b + 1) \times c = (a + b) \times c + c = a \times c + b \times c + c = a \times c + (b + 1) \times c.$$

Trajta

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

del nga ndërrueshmëria. Në një rrjetë, vërtetimi shihet si ndarje në dy pjesë që nuk mbulojnë njëra-tjetrën dhe nuk lënë jashtë asnjë kuti.

Shoqërueshmëria. Vërtetojmë

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

me induksion sipas a. Për a = 0 të dyja anët janë zero. Nëse barazimi vlen për a, atëherë

$$((a + 1) \times b) \times c = (a \times b + b) \times c = (a \times b) \times c + b \times c$$

$$= a \times (b \times c) + b \times c = (a + 1) \times (b \times c).$$

Përdorëm përkufizimin rekurziv dhe shpërndarjen e vërtetuar më lart; shoqërueshmërinë nuk e morëm të mirëqenë.

Shpërndarja ndaj zbritjes. Për b ≥ c, barazimi

$$b = c + (b - c)$$

jep

$$a \times b = a \times c + a \times (b - c).$$

Pra

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c,$$

dhe ana e djathtë ka kuptim në $\mathbb{N}_0$, sepse

$$a \times b \geq a \times c.$$

Te kompensimi kjo do të thotë se kur heqim c grupe me nga a elemente, heqim a × c elemente, jo c.

Monotonia dhe thjeshtimi. Nëse u < v, shkruajmë

$$v = u + h$$

me h ≥ 1. Për m ≥ 1 kemi

$$m \times v = m \times u + m \times h > m \times u.$$

Prandaj nga m × u = m × v dhe m ≥ 1 del u = v. Kushti m ≥ 1 nuk mund të hiqet: nga 0 × 3 = 0 × 7 nuk mund të nxjerrim 3 = 7. Kjo veti garanton që herësi të jetë i vetëm kur pjesëtuesi është pozitiv.

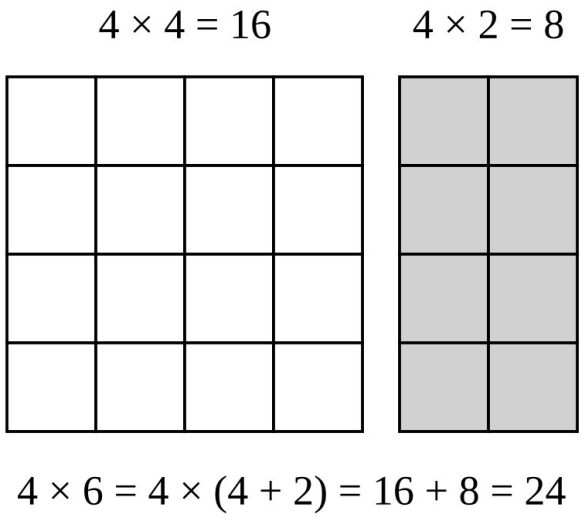


Figura 3. Modeli drejtkëndor e tregon vetinë shpërndarëse: rrjeta me 4 rreshta me nga 6 kuti, e ndarë në 4 dhe 2 shtylla, jep 4 × 6 = 4 × (4 + 2) = 16 + 8 = 24.

Shembull 1. Një nxënës e gjen 6×14 duke llogaritur

$$6 \times 10 + 6 \times 4 = 60 + 24 = 84.$$

Një tjetër e gjen si

$$(3 \times 2) \times 14 = 3 \times 28 = 84.$$

Të dy kanë të drejtë. Mësuesi kërkon arsyetimin që e lidh secilën rrugë me vetinë përkatëse, në vend që ta shpallë njërën «të saktë» vetëm sepse është më e shkurtër.

3.4 Njësi profesionale: vetia shpërndarëse

Shembull matematikor i zgjidhur.

$$7 \times 6 = (5 + 2) \times 6 = 30 + 12 = 42.$$

Dy prodhimet e pjesshme numërojnë dy pjesë të ndara të së njëjtës sasi.

Paraqitja në klasë. Vizatohet një rrjetë me shtatë rreshta dhe gjashtë shtylla. Pesë rreshta ndahen nga dy të tjerët, dhe nxënësit thonë sa kuti ka secila pjesë: 30 dhe 12.

Pyetje diagnostikuese. «Pse pjesa e dytë ka 12 kuti dhe jo 2? Çfarë tregon në figurë secili numër te $5 \times 6 + 2 \times 6$?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Pesë rreshta bëjnë 30; shtoj edhe dy dhe marr 32.»

Analiza didaktike. Përgjigjja sugjeron se nxënësi ngatërron numrin e rreshtave me numrin e kutive. Para se ta quajë gabim në vetinë shpërndarëse, mësuesi i kërkon të numërojë kutitë në dy rreshtat.

Alternativë metodike. Në vend të rrjetës përdoren shtatë shirita me nga gjashtë shenja. Për kontroll në rast të ri jepet

$$8 \times 6 = (5 + 3) \times 6,$$

dhe nxënësi duhet të shpjegojë pse shtesa është 18.

Pyetje reflektuese për studentin. Cila pjesë e argumentit tregon se metoda vlen për çdo ndarje të rreshtave, jo vetëm për $5 + 2$?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Përkufizimi rekurziv $0 \times n = 0$, $(m + 1) \times n = m \times n + n$ përfshin rastin $m = 0$ dhe lejon vërtetimin e të gjitha vetive.
- Grupet e barabarta, rrjeta, krahasimi me «herë» dhe kombinimet japin të njëjtin prodhim, por janë probleme me strukturë të ndryshme.
- Ndërrueshmëria është veti e numrave; në problem faktorët ruajnë role të ndryshme.
- Çdo strategji me gojë kthehet te një barazim i vërtetuar; kushtet e tij (si $b \geq c$) janë kufijtë e strategjisë.

4. Shumëzimi me gojë: strategjitë

NË KËTË KAPITULL

- Çfarë kuptojmë me rrjedhshmëri në llogaritjen me gojë
- Strategjia A: zbërthimi sipas vlerës vendore
- Strategjia B: kompensimi rreth një dhjetësheje
- Strategjia C: dyfishimi dhe përgjysmimi
- Strategjia D: rigrupimi dhe prodhimet e njohura
- Strategjia E: ndërtimi nga faktet bazë
- Diskutimi në klasë: «Si e llogarite?»
- Gabimet në shumëzimin me gojë dhe diagnostikimi
- Njësi profesionale: zgjedhja e strategjisë

4.1 Çfarë kuptojmë me rrjedhshmëri në llogaritjen me gojë

Rrjedhshmëria nuk është e njëjtë me shpejtësinë. Ajo përfshin saktësinë, përshtatshmërinë dhe efikasitetin: nxënësi di disa mënyra dhe zgjedh atë që u përshtatet numrave të dhënë. Për 25 × 16 mund të jetë më e arsyeshme

$$25 \times 4 \times 4 = 100 \times 4 = 400$$

sesa prodhimet e pjesshme të shkruara. Për 47 × 6 zbërthimi (40 + 7) × 6 mund të jetë më i qartë. Qëndrimi i NCTM (2023) për rrjedhshmërinë procedurale e lidh strategjinë me arsyetimin dhe paralajmëron që rrjedhshmëria të mos barazohet me testet me kohë.

Duhet dalluar ushtrimi i shkurtër për rikujtimin e fakteve nga testi ku shpejtësia merret si e vetmja masë e kompetencës. Udhëzuesi i WWC (Fuchs et al., 2021) përfshin edhe veprimtari me kohë si një mjet për automatizimin e fakteve. NCTM (2023) thekson se testet me kohë, të përdorura për të matur rrjedhshmërinë, nuk e masin fleksibilitetin dhe arsyetimin. Në praktikë mësuesi vlerëson gjithmonë edhe mënyrën që zgjodhi nxënësi dhe shpjegimin e tij.

4.1.1 Fleksibiliteti, saktësia dhe përshtatshmëria

Nga ana matematike, mësuesi duhet të dijë cili shndërrim e ruan vlerën e shprehjes. Për 49 × 6, shndërrimi

$$(50 - 1) \times 6 = 300 - 6$$

e ruan prodhimin falë shpërndarjes. Për 25 × 12, shndërrimi

$$(100 : 4) \times (3 \times 4) = 100 \times 3 = 300$$

kërkon rigrupim dhe thjeshtim. Për 18 × 5, shndërrimi

$$(18 \times 10) : 2 = 90$$

është i vlefshëm, sepse shumëzimi me 5 mund të shihet si shumëzim me 10 dhe pjesëtim me 2. Studentët duhet të dallojnë idenë që i lind nxënësit nga justifikimi që e bën strategjinë të vlefshme.

Nga ana didaktike, strategjia nuk është qëllim në vetvete. Ajo është mjet që nxënësi t'i kontrollojë më mirë numrat. Një nxënës e llogarit 28×6 duke e zbërthyer 28 në $20 + 8$; një tjetër përdor $30 \times 6 - 2 \times 6$. Krahasimi është i frytshëm kur nxënësit shpjegojnë pse të dyja mënyrat japin të njëjtin rezultat dhe kur është e përshtatshme secila. Po të vlerësonim vetëm shpejtësinë, nuk do ta shihnim cilësinë e arsyetimit; po të vlerësonim vetëm shpjegimin me gojë, mund të mos vinim re se nxënësi nuk i ka të automatizuara faktet bazë.

Gjatë ushtrimit të drejtuar, mësuesi mund të alternojë tri lloje detyrash: (a) llogaritje me strategji të lirë; (b) justifikim i një shndërrimi të propozuar; (c) zgjedhje e strategjisë më të përshtatshme për një çift faktorësh. Për shembull, 99×7 kërkon diçka tjetër nga 28×25: i pari fton kompensimin, i dyti grupimin me 4 për të marrë 100. Nuk ka nevojë të matet përgjigjja në sekonda. Më e rëndësishme është që studenti të tregojë se e kupton strategjinë dhe se e zbaton me siguri në disa detyra të afërta.

4.1.2 Një progresion me katër nivele

Tabela 3. *Progresioni i strategjive të shumëzimit me gojë*

Niveli	Detyra të sugjeruara	Çfarë tregon se nxënësi ka kuptuar	Rreziku që duhet ndjekur
Fakte bazë	5×8, 10×8, 2×8	Njeh faktet dhe i përdor për të nxjerrë të tjera.	Mësim përmendsh pa lidhje.
Zbërthim dhe rigrupim	13×8, 24×5	Shpjegon shpërndarjen dhe shoqërueshmërinë.	Harron të shumëzojë njërën pjesë.
Kompensim dhe ekuilibrim	19×8, 25×16	Tregon si ruhet prodhimi.	Ndryshon vetëm njërin faktor pa korrigjim.
Zgjedhje e argumentuar	39×5, 28×25, 21×7	Krahason rrugët dhe zgjedh sipas numrave.	Zbaton të njëjtën strategji në çdo rast.

Progresioni nuk është varg fazash që nuk kapërcehen. Nëse nxënësi dyfishon saktë te 18×5, por gabon te 17×6, kjo nuk është kontradiktë; tregon se strategjitë varen nga numrat. Mësuesi synon ta zgjerojë repertorin e nxënësit pa ia hequr mënyrën që ai preferon. Një ndërhyrje e mirë krahason dhe justifikon dy mënyra për të njëjtën detyrë; nuk i jep nxënësit një formulë të re në çdo orë.

4.2 Strategjia A: zbërthimi sipas vlerës vendore

Për 34×7, zbërthimi $34 = 30 + 4$ jep

$$(30 + 4) \times 7 = 30 \times 7 + 4 \times 7 = 210 + 28 = 238.$$

Matematikisht kemi përdorur vetinë shpërndarëse. Didaktikisht, nxënësi duhet të kuptojë se 3 te 34 janë tri dhjetëshe; ndaj prodhimi 3 × 7 = 21 nuk mund të zërë vendin e 30 × 7 = 210. Para se të shkruajë me simbole, nxënësi mund ta paraqesë 34-ën me tri shufra dhjetëshe dhe katër kube.

Shembull 2.

$$16 \times 12 = (10 + 6) \times (10 + 2) = 100 + 20 + 60 + 12 = 192.$$

Zbërthimi i dyfishtë nuk duhet zbatuar mekanikisht që në fillim. E përdorim kur nxënësi e zotëron zbërthimin e thjeshtë dhe kupton që asnjë nga katër prodhimet e pjesshme nuk duhet të humbasë.

4.3 Strategjia B: kompensimi rreth një dhjetësheje

Për 19 × 7 vërejmë se 19 = 20 − 1, pra

$$19 \times 7 = 140 - 7 = 133.$$

Shprehja «i shtoj një dhe pastaj ia heq» nuk mjafton, sepse kompensimi i saktë kërkon heqjen e një grupi të tërë me 7, jo të një njësie. Po kështu,

$$98 \times 6 = (100 - 2) \times 6 = 600 - 12 = 588.$$

Kushti didaktik është që fëmija ta shohë lidhjen ndërmjet 98 grupeve me nga 6 dhe 100 grupeve nga të cilat heqim dy.

Gabim për analizë. Shkrimi

$$19 \times 7 = 20 \times 7 + 7 = 147$$

mund të tregojë se nxënësi e ka kthyer kompensimin në drejtim të gabuar, por nga një përgjigje e vetme nuk përjashtohet një pakujdesi. Pyetja «A kanë 19 grupe më shumë apo më pak objekte se 20 grupe me të njëjtën madhësi?» ndihmon ta provojmë hipotezën.

4.4 Strategjia C: dyfishimi dhe përgjysmimi

Kur njëri faktor është çift, mund të përdorim barazimin

$$\mathrm{a} \times \mathrm{b} = (2 \times \mathrm{a}) \times (\mathrm{b} : 2).$$

Për 25 × 16, dyfishojmë 25 → 50 → 100 dhe përgjysmojmë 16 → 8 → 4, dhe marrim 100 × 4 = 400. Strategjia mbështetet te ruajtja e prodhimit dhe është e dobishme sidomos kur del një faktor 10, 100 ose një prodhim i njohur. Në numrat natyrorë përgjysmimi kërkon që faktori përkatës të jetë çift.

4.5 Strategjia D: rigrupimi dhe prodhimet e njohura

Për 8 × 35 mund të shkruajmë

$$8 \times 35 = (2 \times 4) \times 35 = 2 \times (4 \times 35) = 2 \times 140 = 280.$$

Një rrugë tjetër është

$$8 \times (30 + 5) = 240 + 40 = 280.$$

Të dyja janë të vlefshme, por për nxënësin që e njeh mirë shumëzimin me 4, rigrupimi e lehtëson llogaritjen. Nuk ka një strategji «më të mirë» për të gjithë nxënësit dhe për të gjithë numrat; kriteri është saktësia e arsyetimit dhe përshtatshmëria.

4.6 Strategjia E: ndërtimi nga faktet bazë

Për 7 × 8 nxënësi mund të përdorë

$$7 \times 10 - 7 \times 2 = 70 - 14 = 56 \quad \text{ose} \quad 7 \times (4 + 4) = 28 + 28 = 56.$$

Kjo është më shumë se kujtesa e tabelës: nxënësi përdor një fakt të njohur për të ndërtuar një tjetër. Studenti duhet të dallojë mësimin e fakteve bazë nga arsyetimi që u jep atyre kuptim; të dyja ndihmojnë që faktet të automatizohen me kohë.

Tabela 4. *Tri strategji që mbështeten te struktura e numrave*

Veprimi	Si e shndërrojmë	Rezultati
24 × 6	(20 + 4) × 6	120 + 24 = 144
19 × 7	(20 − 1) × 7	140 − 7 = 133
25 × 16	(100 : 4) × 16	100 × 4 = 400

4.6.1 Laboratori i strategjive: pesë detyra

Detyra e parë, 16 × 25, lejon vargun

$$16 \times 25 = 8 \times 50 = 4 \times 100 = 400.$$

Vargu nuk është rregull për t'u mbajtur mend: çdo hap mbështetet te shoqërueshmëria dhe te barazimi

$$(2 \times a) \times b = a \times (2 \times b),$$

për numra natyrorë a dhe b. Pasi shkruhen barazimet, mësuesi kërkon një model syprine, ku drejtkëndëshi ndryshon përmasat pa ndryshuar numrin e katrorëve njësi (Figura 4). Nëse fëmija thotë «i dyfishoj të dy faktorët, sepse kështu është më lehtë», mësuesi i tregon me drejtkëndëshin se syprina do të katërfishohej.

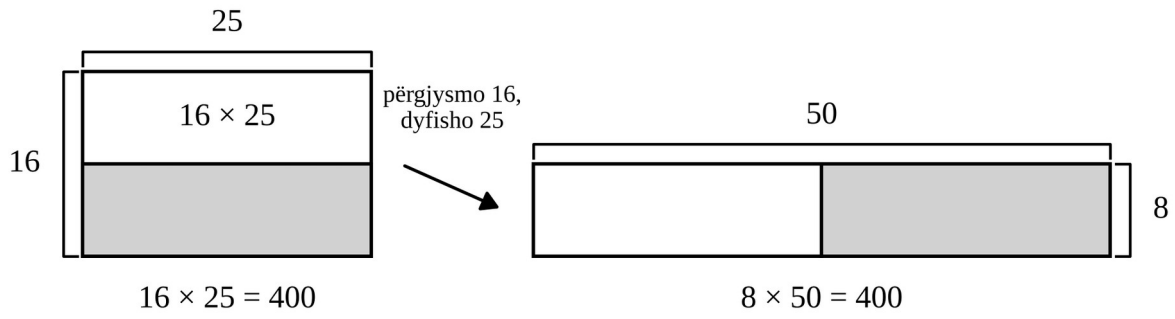


Figura 4. Ruajtja e prodhimit: drejtkëndëshi 16 × 25 kthehet në 8 × 50 kur njëra brinjë përgjysmohet dhe tjetra dyfishohet. Syprina mbetet 400 katrorë njësi.

Detyra e dytë, 36 × 15, zgjidhet si

$$36 \times (10 + 5) = 360 + 180 = 540$$

ose si

$$(36 : 2) \times 30 = 18 \times 30 = 540.$$

Mënyra e dytë kërkon që 36 të jetë çift. Edhe nëse më vonë do të punohet me thyesa, në mësimin e numrave natyrorë kushtet duhet të jenë të dukshme. Krahasimi i dy mënyrave tregon se rezultate të sakta mund të mbështeten te mënyra të ndryshme të organizimit matematik.

Detyra e tretë, 99 × 6, fton kompensimin: 100 × 6 − 6 = 594. Një nxënës mund të shkruajë gabimisht 600 − 1 = 599. Në vend që t'i japë menjëherë procedurën e saktë, mësuesi i kërkon të shpjegojë çfarë është 1 te 99 = 100 − 1: nuk është një njësi e prodhimit, por një grup i tërë me 6. Kur vizatohen 100 grupe, shihet qartë se duhet hequr një grup me 6.

Detyra e katërt, 25 × 24, mund të trajtohet si

$$(100 : 4) \times 24 = 100 \times 6 = 600,$$

por vetëm nëse 25 shihet si një e katërta e 100-ës. Një rrugë tjetër është

$$25 \times (4 \times 6) = (25 \times 4) \times 6 = 600.$$

Rruga e dytë u përshtatet nxënësve që e dinë 25 × 4 = 100, por nuk mendojnë ende me të katërtat.

Detyra e pestë, 27 × 14, zgjidhet me shpërndarjen

$$27 \times (10 + 4) = 270 + 108 = 378$$

ose me

$$27 \times (7 \times 2) = (27 \times 7) \times 2 = 189 \times 2 = 378.$$

Rruga e dytë nuk është domosdo më e shkurtër, sepse kërkon prodhimin 27 × 7. Kështu studentët mësojnë se strategjia nuk zgjidhet sipas numrit të hapave në letër, por sipas ngarkesës mendore dhe sigurisë që ka nxënësi te faktet që përdor.

4.6.2 Gabimet që lidhen me vetitë

Tabela 5. *Gabime të lidhura me vetitë e shumëzimit*

Shkrimi i nxënësit	Vlera e saktë	Hipoteza për shkakun	Pyetja që i dallon hipotezat
(20 − 1) × 7 = 140 + 7	133	Kompensimi në drejtim të gabuar.	A është 19 × 7 më shumë apo më pak se 20 × 7?
(30 + 4) × 6 = 180 + 4	204	Shpërndarja është zbatuar vetëm te njëra pjesë.	Ku janë katër grupet e tjera me nga gjashtë?
18 × 25 = 36 × 50	450	Janë dyfishuar të dy faktorët.	Sa herë ndryshon syprina në model?
24 × 15 = 24 × 10 + 5	360	Faktori i përbashkët ka humbur te pjesa e dytë.	Çfarë roli ka 24 te pesë njësitë?

Tabelën e lexojmë si listë hipotezash, jo si diagnoza përfundimtare. Një gabim i shkruar mund të jetë pakujdesi, lexim i gabuar ose keqkuptim. Prandaj studenti propozon të paktën dy pyetje verifikuese para se të planifikojë ndërhyrjen. Kontrolli nuk është vetëm rezultati i detyrës tjetër, por aftësia për ta zbatuar arsyetimin në një rast të ri, për shembull nga 19 × 7 te 29 × 8.

4.7 Diskutimi në klasë: «Si e llogarite?»

Mësuesi jep 18 × 6 pa kërkuar menjëherë rezultatin. Nxënësit mendojnë vetë, diskutojnë në çifte dhe tregojnë rrugët e tyre. Përgjigje të mundshme janë

$$(20-2)\times 6 = 120-12, \quad (10+8)\times 6 = 60+48 \ \text{ dhe } \ 9\times 12 = 108.$$

Mësuesi i rendit me qëllim: nga zbërthimi, që është më i qartë, te kompensimi dhe pastaj te ruajtja e prodhimit. Pyetja e fundit, «Çfarë mbetet e njëjtë, edhe pse ndryshon mënyra?», e çon klasën te ideja e barasvlerësisë.

Mësuesja: «Pse 18 × 6 është e barabartë me 20 × 6 − 2 × 6?»

Nxënësi 1: «Sepse 18 është dy më pak se 20.»

Mësuesja: «Dy më pak çfarë?»

Nxënësi 1: «Dy grupe me nga gjashtë.»

Mësuesja: «Si do ta tregoje me një vizatim?»

Ky dialog i simuluar e zëvendëson pyetjen «A e kuptove?» me një kërkesë që nxënësi të tregojë vetë se e ka kuptuar.

4.8 Gabimet në shumëzimin me gojë dhe diagnostikimi

Tabela 6. *Gabime në shumëzimin me gojë dhe pyetje provuese*

Puna e nxënësit (simulim)	Hipoteza që duhet provuar	Pyetja provuese
34 × 7 = 21 + 28 = 49	Shifra 3 merret si 3 njësi, jo 3 dhjetëshe.	Sa vlen shifra 3 te 34? Sa është 30 × 7?
19 × 7 = 140 + 7	Kompensimi në drejtim të gabuar.	Cili prodhim duhet të jetë më i madh: 19 × 7 apo 20 × 7?
25 × 16 = 50 × 16	Dyfishim pa përgjysmim; prodhimi nuk ruhet.	A ndryshoi numri i grupeve apo madhësia e grupit?
16 × 12 = 100 + 20 + 12	Ka humbur një prodhim i pjesshëm.	Ku është 6 × 10 në figurën drejtkëndore?

Asnjë zgjidhje e vetme nuk mjafton për një diagnozë të sigurt. Mësuesi kërkon një detyrë të dytë, një shpjegim me fjalë ose një paraqitje. Radha «çfarë shohim, hipotezë, verifikim, ndërhyrje» na ruan nga etiketimi i nxënësit mbi bazën e një gabimi të vetëm.

4.8.1 Një diskutim i zhvilluar: 28 × 25

Diskutimi në klasë mbështetet te përgjigjet që mësuesi i ka parashikuar dhe te një qëllim matematik i qartë. Mësuesi jep 28 × 25 dhe i fton nxënësit të zgjedhin strategji që mund t'i shpjegojnë. Një nxënës zbërthen:

$$20 \times 25 + 8 \times 25 = 500 + 200 = 700.$$

Një tjetër kompenson:

$$30 \times 25 - 2 \times 25 = 750 - 50 = 700.$$

I treti shkruan

$$28 \times (100 : 4) = (28 : 4) \times 100 = 7 \times 100 = 700.$$

Një strategji e katërt përdor

$$14 \times 50 = 7 \times 100 = 700.$$

Të gjitha rrugët janë të sakta, por mbështeten te njohuri të ndryshme.

Mësuesi mund të paraqesë fillimisht zbërthimin, pastaj kompensimin dhe në fund dyfishimin me përgjysmim. Diskutimi synon të dalë qartë çfarë ruhet dhe si ndryshojnë faktorët. Për 27 × 25, 27 nuk përgjysmohet në $\mathbb{N}_0$; një rrugë e përshtatshme është

$$27 \times 25 = (28 - 1) \times 25 = 700 - 25 = 675.$$

Kështu kufiri i një strategjie bëhet arsye për të zgjedhur një tjetër.

Një përgjigje që nuk duhet humbur është ajo e nxënësit që thotë: «25 × 4 = 100, prandaj 28 × 25 = 7 × 100». Ai po grupon 28 kopjet e 25-ës në 7 grupe me nga katër kopje. Ky është argument me grupe të barabarta, që mund të vizatohet para se të shkruhet si shndërrim:

$$28 \times 25 = (7 \times 4) \times 25 = 7 \times (4 \times 25) = 7 \times 100.$$

Mësuesi e lidh vizatimin me këtë barazim.

Për vlerësimin formues mësuesi jep dy detyra të afërta dhe një rast të ri: 36 × 25, 32 × 25 dhe 23 × 25. Te dy të parat nxënësi mund të grupojë me katër; te e treta grupimi i plotë nuk bëhet, ndaj mund të shkruajë

$$20 \times 25 + 3 \times 25 = 500 + 75 = 575.$$

Nëse përdor pa argument shkrimin (23 : 4) × 100, rezultati del i saktë me thyesa, por nuk përshkruan një procedurë që mësohet me numrat natyrorë. Këtu studenti duhet të dallojë vlefshmërinë matematike nga përshtatshmëria për programin dhe për klasën.

4.8.2 Një instrument i shpejtë vëzhgimi

Tabela 7. *Instrument vëzhgimi gjatë diskutimit për 28 × 25*

Çfarë kërkojmë të shohim	Përgjigje që mjafton	Çfarë bën mësuesi kur mungon
Ruajtja e vlerës së shprehjes	Shpjegon pse 28 × 25 = 7 × 100.	Kthehet te grupimi me katër kopje.
Lidhja e vetisë me modelin	Gjen 7 grupe me nga katër kopje të 25-ës.	Përdor rrjetë ose grupe të vizatuara.
Krahasimi i rrugëve	Zgjedh strategjinë sipas numrave.	Tregon dy rrugë pa i renditur sipas shpejtësisë.
Njohja e kufirit të metodës	Ndryshon procedurën te 23 × 25.	Jep një rast kufitar me faktor tek.

4.9 Njësi profesionale: zgjedhja e strategjisë

Shembull matematikor i zgjidhur.

$$28 \times 25 = 7 \times (4 \times 25) = 700.$$

Për 27 × 25 përdoret 28 × 25 − 25 = 675; përgjysmimi nuk bëhet në $\mathbb{N}_0$ për faktorin 27.

Paraqitja në klasë. 28 kartela me vlerë 25 vendosen në 7 grupe me nga katër. Pastaj hiqet një kartelë, dhe nxënësit e lidhin ndryshimin me prodhimin e ri.

Pyetje diagnostikuese. «Kur kalojmë nga 28 kartela në 27, sa zvogëlohet vlera gjithsej dhe pse?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Zvogëlohet me një, sepse 27 është një më pak se 28.»

Analiza didaktike. Nxënësi e sheh ndryshimin e numrit të kartelave, por nuk e merr parasysh vlerën e secilës. Pyetja tjetër i kërkon të thotë çfarë njësie numëron në çdo hap.

Alternativë metodike. Përdoret zbërthimi

$$20 \times 25 + 7 \times 25 = 500 + 175.$$

Për kontroll në rast të ri jepet 19 × 25, dhe nxënësi duhet të arsyetojë

$$20 \times 25 - 25 = 475.$$

Pyetje reflektuese për studentin. Si dallon njohja e një strategjie nga aftësia për të kuptuar kur strategjia është e përshtatshme?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Rrjedhshmëria përfshin saktësinë, përshtatshmërinë dhe efikasitetin; nuk barazohet me shpejtësinë.
- Pesë strategjitë (zbërthimi, kompensimi, dyfishimi me përgjysmim, rigrupimi, faktet bazë) mbështeten secila te një veti e vërtetuar.
- Te kompensimi korrigjohet një grup i tërë. Korrigjimi me një njësi mund të tregojë se nxënësi nuk e lidh strategjinë me grupet, ose mund të jetë pakujdesi; e provon një rast i ri.
- Kufiri i një strategjie (për shembull një faktor tek) është arsye për të zgjedhur një tjetër, jo për ta zbatuar me forcë.

5. Nga shumëzimi te pjesëtimi

NË KËTË KAPITULL

- Probleme që duken të ngjashme, por nuk janë
- Pjesëtimi pa mbetje dhe rastet me zero
- Dy kuptimet e pjesëtimit
- Teorema e pjesëtimit me mbetje
- Nga zbritjet e përsëritura te herësit e pjesshëm
- Algoritmi standard i pjesëtimit me shkrim: 936 : 4
- Kur në herës duhet shkruar zero: 816 : 4
- Një rast me mbetje: 947 : 4
- Pse funksionon algoritmi standard
- Kontrolli i rezultatit dhe kufijtë e metodës
- Njësi profesionale: zeroja në herës

5.1 Probleme që duken të ngjashme, por nuk janë

Mësuesi duhet ta dijë se të njëjtat shifra dhe e njëjta shenjë veprimi mund të paraqesin probleme me strukturë të ndryshme. «Gjashtë fëmijë marrin nga tetë lapsa» dhe «Janë gjashtë lloje çantash dhe tetë lloje shënuesish; sa çifte mund të zgjidhen?» japin të dyja 6 × 8 = 48, por te i pari modeli natyral janë grupet e barabarta, te i dyti modeli kartezian. Nëse nxënësi zgjidh vetëm probleme me grupe, nuk mund të përfundojmë se e ka përvetësuar shumëzimin në të gjitha kuptimet e tij.

Një çift tjetër problemesh përdor shiritin. «Një shirit është gjashtë herë aq i gjatë sa një shirit prej tetë centimetrash» paraqet 6 × 8 = 48 cm. «Një shirit është gjashtë centimetra më i gjatë se shiriti prej tetë centimetrash» paraqet 8 + 6 = 14 cm. Këtu «fjalët kyçe» nuk ndihmojnë, sepse nxënësi mund të kapet pas një fjale pa e kuptuar marrëdhënien. Paraqitja me njësi të barabarta e ndihmon të dallojë shtimin e një gjatësie nga përsëritja e saj disa herë.

Kur ndryshojmë të panjohurën, marrim një familje problemesh. «Janë shtatë kuti me nga nëntë topa; sa topa janë gjithsej?» kërkon prodhimin 63. «Janë 63 topa, të ndarë njësoj në shtatë kuti; sa topa ka secila?» kërkon 63 : 7 = 9. «Janë 63 topa dhe në çdo kuti vendosim nëntë; sa kuti duhen?» kërkon 63 : 9 = 7. Një mënyrë e mirë mësimi është ta mbajmë të njëjtin model të grupeve dhe të ndryshojmë vetëm sasinë që mungon. Studentët diskutojnë pse këto probleme kanë vështirësi të ndryshme: formimi i grupeve me nga nëntë mbështetet shpesh te numërimi i përsëritur, ndërsa ndarja në shtatë pjesë të barabarta mbështetet te shpërndarja një nga një.

Kur ka mbetje, problemet kërkojnë vendime. «25 çokollata vendosen në kuti me nga gjashtë; sa kuti mbushen plot?» ka përgjigjen katër kuti, dhe mbetet një çokollatë. «Sa kuti duhen për t'i paketuar të 25 çokollatat?» kërkon pesë kuti, nëse e fundit lejohet të mos jetë plot. «25 metra fije

ndahen në gjashtë pjesë të barabarta» kërkon gjatësinë e çdo pjese, që nuk është numër natyror metrash; këtu përgjigjja «4 mbetja 1» nuk i përgjigjet pyetjes. Mësuesi që nuk i analizon njësitë dhe madhësitë mund ta imponojë pa arsye këtë përgjigje edhe kur pyetja kërkon diçka tjetër.

Prandaj, për çdo problem me tekst, studenti shkruan fillimisht të dhënat dhe të panjohurën, pastaj veprimin, dhe në fund interpretimin e përgjigjes me njësi. Vetëm pas kësaj ka kuptim të diskutohet nëse problemi zgjidhet me rrjetë, me shirit, me numërim, me shpërndarje objektesh ose me algoritëm. Në vlerësim, mos e pranoni një problem si «të lidhur me shumëzimin» nëse studenti nuk tregon çfarë paraqesin faktorët dhe prodhimi në atë situatë.

5.2 Pjesëtimi pa mbetje dhe rastet me zero

Përkufizimi 5.1. Për $a \in \mathbb{N}_0$ dhe $b \in \mathbb{N}$ themi se b e plotëpjesëton a-në, dhe shkruajmë $b \mid a$, nëse ekziston $q \in \mathbb{N}_0$ i tillë që

$$a = b \times q.$$

Atëherë

$$q = a : b.$$

Nëse $b \times q = b \times q'$, vetia e thjeshtimit për faktorin pozitiv b jep $q = q'$. Pra herësi, kur ekziston në $\mathbb{N}_0$, është i vetëm. Për shembull,

$$24 : 6 = 4,$$

sepse

$$24 = 6 \times 4.$$

Numri 25 nuk plotëpjesëtohet me 6, sepse asnjë $q \in \mathbb{N}_0$ nuk jep

$$6 \times q = 25;$$

pjesëtimi me mbetje (seksioni 5.4) jep herësin 4 dhe mbetjen 1, sepse $25 = 6 \times 4 + 1$. Dallojmë pra tri gjëra: pjesëtimin pa mbetje, ku $a : b$ është numër natyror; pjesëtimin me mbetje, që ka gjithmonë herës dhe mbetje; dhe kuptimin që i japim herësit në një problem të caktuar.

Me zero nuk pjesëtojmë. Nëse $a > 0$, ekuacioni

$$0 \times q = a$$

nuk ka zgjidhje. Nëse $a = 0$, çdo $q \in \mathbb{N}_0$ e plotëson

$$0 \times q = 0,$$

ndaj nuk kemi një herës të vetëm. Ndryshe,

$$0 : b = 0$$

për b > 0, sepse b × 0 = 0 dhe kjo është zgjidhja e vetme. Mësuesi duhet ta ketë të qartë dallimin ndërmjet rastit kur zgjidhja nuk ekziston dhe rastit kur ajo nuk është e vetme.

Kufijtë e vetive. Pjesëtimi nuk është ndërrues: 12 : 3 = 4, por 3 : 12 nuk është numër natyror. Nuk është as shoqërues:

$$(24 : 6) : 2 = 2,$$

ndërsa

$$24 : (6 : 2) = 8.$$

Nëse c > 0 dhe c plotëpjesëton a-në dhe b-në, atëherë

$$(a + b) : c = a : c + b : c,$$

sepse kur e shumëzojmë anën e djathtë me c marrim a + b. Ky zbërthim nuk vlen për pjesëtuesin:

$$24 : (4 + 2) = 4,$$

ndërsa

$$24 : 4 + 24 : 2 = 18.$$

5.3 Dy kuptimet e pjesëtimit

Në problemin «24 lapsa ndahen njësoj ndërmjet 6 fëmijëve» dimë numrin e grupeve dhe kërkojmë sa ka secili grup: 24 : 6 = 4. Në problemin «24 lapsa vendosen në kuti me nga 6» dimë madhësinë e grupit dhe kërkojmë sa kuti duhen: 24 : 6 = 4. Barazimi është i njëjtë, por e panjohura ka rol tjetër. Studenti duhet ta mbajë parasysh këtë dallim edhe kur kalon te algoritmi me shkrim.

5.4 Teorema e pjesëtimit me mbetje

Pohimi 5.1 (teorema e pjesëtimit me mbetje). Për çdo $a \in \mathbb{N}_0$ dhe $b \in \mathbb{N}$ ekzistojnë numrat $q, r \in \mathbb{N}_0$, të vetëm, të tillë që:

$$a = b \times q + r, \quad 0 \leq r < b. \tag{5.1}$$

Numri q quhet herësi i plotë (ose shkurt herësi), ndërsa r mbetja. Kur r = 0, b plotëpjesëton a-në dhe

$$q = a : b$$

sipas përkufizimit 5.1. Kur r > 0, a nuk plotëpjesëtohet me b, por herësi q dhe mbetja r ekzistojnë përsëri.

Për shembull, 29 = 6 × 4 + 5 dhe

$$0 \leq 5 < 6.$$

Shkrimi

$$29 = 6 \times 3 + 11$$

nuk është përfundimi i pjesëtimit me mbetje, sepse $11 \geq 6$. Kushti nuk është formalitet: ai siguron që me mbetjen nuk mund të formohet edhe një grup i plotë.

Marrëveshje për shkrimin. Shkrimi «29 : 6 = 4 mbetja 5» është mënyrë shkollore për të shënuar rezultatin e një procedure, jo barazim ndërmjet dy numrave. Shkrimi matematik i plotë është

$$29 = 6 \times 4 + 5 \quad \text{me} \quad 0 \leq 5 < 6.$$

Në disa tekste shkollore, kur r > 0, numri q quhet «herës jo i plotë», sepse a nuk plotëpjesëtohet me b. Emri nuk i ndryshon kushtet që përcaktojnë çiftin (q, r).

5.4.1 Ekzistenca, uniciteti dhe kuptimi didaktik

Vërtetim i ekzistencës. Argumenti ndërtohet në mënyrë elementare. Marrim të gjithë shumëfishat e b-së që nuk e kalojnë a-në: 0, b, 2b, …. Kjo bashkësi nuk është bosh, sepse përmban zeron, dhe është e fundme: nga $b \geq 1$ kemi

$$b \times k \geq k,$$

prandaj çdo k i tillë plotëson $k \leq a$. Zgjedhim shumëfishin më të madh

$$b \times q \leq a$$

dhe vendosim $r = a - b \times q$. Atëherë $r \geq 0$. Nëse do të kishim $r \geq b$, do të ishte

$$a \geq b \times q + b = b \times (q + 1),$$

në kundërshtim me zgjedhjen e q-së si më të madhit. Pra $r < b$. ∎

Karakterizimi i herësit. Vërtetimi tregon se herësi q është numri më i madh në $\mathbb{N}_0$ për të cilin

$$b \times q \leq a.$$

Me fjalë të tjera,

$$b \times q \leq a < b \times (q + 1), \quad \text{për } b > 0. \tag{5.2}$$

Ky kusht është i barasvlershëm me

$$0 \leq r < b:$$

mosbarazimi i majtë do të thotë

$$r = a - b \times q \geq 0,$$

ndërsa i djathti do të thotë $r < b$. Për 25 : 6 kemi

$$6 \times 4 = 24 \leq 25 < 30 = 6 \times 5,$$

pra q = 4. Kujdes: q nuk është «numri më i madh që nuk e kalon të pjesëtueshmin», por numri më i madh i grupeve të plota me nga b që mund të formohen nga a.

Vërtetim i unicitetit. Supozojmë

$$a = b \times q + r = b \times q' + r',$$

ku $0 \le r, r' < b$. Nëse $q < q'$, atëherë

$$q' \ge q + 1,$$

prandaj

$$b \times q' + r' \ge b \times (q + 1) = b \times q + b > b \times q + r = a,$$

kundërshtim. Në të njëjtën mënyrë përjashtohet $q' < q$. Mbetet $q = q'$, dhe prej këtej $r = r'$. ∎

Ky argument i jep mësuesit një arsye të sigurt për të thënë se përgjigjja «27 : 5 = 4 mbetja 7» është e pavlefshme: 7 nuk është mbetje e lejuar, sepse prej saj formohet edhe një grup i plotë me pesë.

Teorema ka dy kontrolle të pavarura. Barazimi

$$a = b \times q + r$$

tregon se asnjë element nuk humbi dhe asnjë nuk u shtua; kushti

$$0 \le r < b$$

garanton që grupet e plota janë sa më shumë dhe se zgjidhja është e vetme. Studenti që kontrollon vetëm barazimin mund ta pranojë gabimisht $27 = 5 \times 4 + 7$; studenti që sheh vetëm $r < b$ mund të pranojë një herës të gabuar. Ndaj mësuesi i ushtron të dy kontrollet bashkë.

5.4.2 Dy kuptimet: ku ndryshon e panjohura

Kur ndajmë njëlloj 28 ëmbëlsira ndërmjet katër fëmijëve, e panjohura është sa merr secili: 28 : 4 = 7. Në pyetjen «Sa qese mbushen me nga katër ëmbëlsira, nga 28 ëmbëlsira gjithsej?» e panjohura është numri i grupeve: përsëri 28 : 4 = 7. Që të dy problemet japin të njëjtin barazim nuk do të thotë se kërkojnë të njëjtën rrugë mendimi. Te i pari mund të shpërndajmë nga një derisa të mbarojnë; te i dyti mund të formojmë grupe të gatshme me katër.

Me mbetje, dy kuptimet mund të çojnë në vendime të ndryshme. Mësuesi ka 29 fletore për katër grupe: secili grup merr shtatë, dhe mbetet një fletore. Nëse 29 nxënës udhëtojnë me makina me katër vende, duhen tetë makina, edhe pse herësi i plotë është shtatë dhe mbetja një. Rezultati matematik i pjesëtimit duhet dalluar nga interpretimi i pyetjes «sa makina duhen?». Për nxënësin e arsimit fillor ky dallim është një arsye e fortë kundër përdorimit mekanik të herësit si përgjigje për çdo problem.

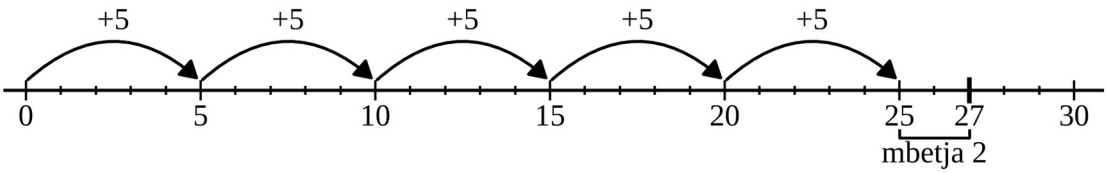


Figura 5. Mbetja në boshtin numerik: pesë kërcime me gjatësi 5 arrijnë nga 0 te 25, dhe mbeten 2 deri te 27. Pra $27 = 5 \times 5 + 2$.

5.4.3 Familja e fakteve dhe veprimet e kundërta

Nëse $7 \times 8 = 56$, atëherë $56 : 7 = 8$ dhe

$$56 : 8 = 7.$$

Kjo vlen sepse 7 dhe 8 janë pozitivë, por një paraqitje e mirë didaktike nuk mbaron me këtë fjali. Ajo mbështetet te modeli me 7 grupe me nga 8 dhe ndryshon të panjohurën: sasinë gjithsej, numrin e grupeve ose madhësinë e grupit. Mësuesi mund të përdorë të njëjtën rrjetë me 56 kuti dhe të kërkojë tri probleme me të panjohura të ndryshme.

Lidhja e pjesëtimit me shumëzimin i shërben nxënësit për vetëkontroll. Për $336 : 7$ herësi duhet të jetë afër 50, sepse $7 \times 50 = 350$. Nëse nxënësi propozon 48, kontrolli $48 \times 7 = 336$ e vërteton përgjigjen. Kështu nxënësi ushtron prodhimet që di dhe kujton se barazimi shpreh një marrëdhënie që vlen në të dy drejtimet.

5.5 Nga zbritjet e përsëritura te herësit e pjesshëm

Pjesëtimi me herës të pjesshëm, në të cilin heqim nga i pjesëtueshmi grupe të mëdha me nga 4, është ura ndërmjet kuptimit të pjesëtimit dhe algoritmit me shkrim. Figura 6 e tregon këtë metodë për $936 : 4$, krah për krah me algoritmin standard.

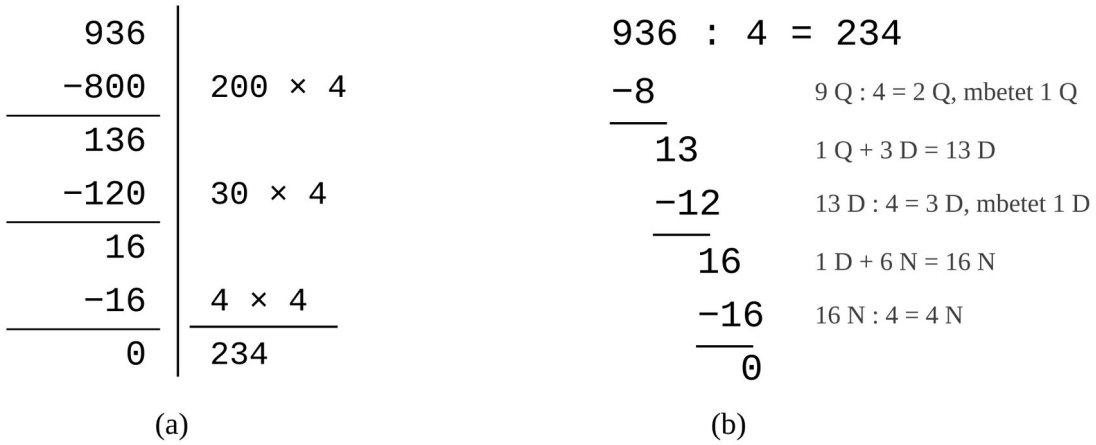


Figura 6. Pjesëtimi $936 : 4 = 234$: (a) me herës të pjesshëm, ku nga 936 heqim $4 \times 200 = 800$, $4 \times 30 = 120$ dhe $4 \times 4 = 16$; (b) me algoritmin standard, ku të njëjtat hapa shkruhen shkurt sipas rendeve të vlerës vendore.

5.5.1 Herësit e pjesshëm si urë

Për 936 : 4, hapat lidhen kështu:

$$936 = 4 \times 200 + 136 = 4 \times 200 + 4 \times 30 + 16 = 4 \times (200 + 30 + 4). \quad (5.3)$$

Herësit e pjesshëm janë 200, 30 dhe 4. Mund të zgjidhen edhe ndryshe: po të heqim fillimisht 4 × 100, pastaj përsëri 4 × 100 dhe në fund 4 × 34, marrim të njëjtin herës, 234. Kjo liri vjen bashkë me detyrimin për të shkruar çdo prodhim që hiqet dhe shumën e herësve të pjesshëm.

Kur kalojmë te algoritmi standard, mësuesi duhet të tregojë se shifra 2 te herësi 234 paraqet 200 grupe, jo dy; shifra 3 paraqet 30 grupe, jo tre; dhe shifra 4 paraqet katër grupe. Algoritmi standard e shkruan këtë logjikë shkurt. Dy procedurat nuk janë në konkurrencë; janë dy shkallë shkurtimi të së njëjtës marrëdhënie matematike.

5.5.2 Si zgjedhim herësin e pjesshëm pa hamendje

Mësuesi i mëson nxënësit të vlerësojnë paraprakisht madhësinë e herësit. Për 648 : 6, krahasimi me 600 : 6 = 100 tregon se herësi është pak mbi 100. Heqim fillimisht 6 × 100 = 600 dhe mbeten 48; pastaj 6 × 8 = 48. Rezultati 108 kontrollohet me 6 × 108 = 648. Nëse nxënësi shkruan 18, kontrolli 6 × 18 = 108 tregon menjëherë se ka humbur vlera e qindësheve. Vlerësimi duhet të përdoret si kontroll para dhe pas procedurës, jo vetëm si shumëzim mekanik i përgjigjes.

Për 684 : 6 mund të zgjedhim herësit e pjesshëm 100, 10 dhe

$$4\text{:}\ 684 - 600 = 84, \quad 84 - 60 = 24, \quad 24 - 24 = 0,$$

pra 114. Kjo rrugë i ngjan algoritmit standard, por në fletore nxënësi e sheh çdo prodhim të plotë. Mësuesi mund t'i vendosë dy procedurat në dy kolona dhe t'i pyesë studentët ku ndodhet 600 në algoritmin standard. Nëse shifra 1 merret si 1 dhe jo si 100, lidhja me vlerën vendore është prishur.

5.6 Algoritmi standard i pjesëtimit me shkrim: 936 : 4

Për 936 : 4, fillimisht 9 qindëshe : 4 = 2 qindëshe për çdo grup, dhe mbetet 1 qindëshe. Ajo këmbehet me 10 dhjetëshe; bashkë me 3 dhjetëshet bëhen 13 dhjetëshe. 13 dhjetëshe : 4 = 3 dhjetëshe për grup, dhe mbetet 1 dhjetëshe. Ajo këmbehet me 10 njësi; bashkë me 6 njësitë bëhen 16 njësi. 16 : 4 = 4 njësi për grup. Pra 936 : 4 = 234.

Shkrimi në kolonë përmbledh tri ndarje të lidhura:

$$9 = 4 \times 2 + 1, \quad 13 = 4 \times 3 + 1, \quad 16 = 4 \times 4 + 0.$$

Shifrat 2, 3 dhe 4 të herësit nuk kanë të njëjtën vlerë: ato tregojnë përkatësisht 200, 30 dhe 4. Kontrolli 4 × 234 = 936 e kthen algoritmin te marrëdhënia fillestare, ndërsa $0 \le 0 < 4$ e konfirmon mbetjen.

5.7 Kur në herës duhet shkruar zero: 816 : 4

Për 816 : 4: 8 qindëshe : 4 = 2 qindëshe. Te dhjetëshet kemi vetëm 1 dhjetëshe, që nuk mjafton për t'u dhënë 4 grupeve nga një dhjetëshe e plotë; prandaj shifra e dhjetësheve në herës është 0. Dhjetëshja këmbehet me 10 njësi dhe, bashkë me 6 njësitë, bëhen 16 njësi; 16 : 4 = 4 njësi. Rezultati është 204, sepse 4 × 204 = 816.

Nëse nxënësi shkruan 24, mund të mos e ketë mbajtur vendin e dhjetësheve, edhe pse hapat

$$8 : 4 = 2 \quad \text{dhe} \quad 16 : 4 = 4$$

i ka bërë saktë. Pyetja diagnostikuese nuk është «Pse e harrove zeron?», por «Sa qindëshe, sa dhjetëshe dhe sa njësi merr secili nga katër grupet?». Një tabelë me kolonat qindëshe, dhjetëshe, njësi e lidh paraqitjen me shkrimin 204.

5.8 Një rast me mbetje: 947 : 4

Për 947 : 4 mund t'i ndajmë 900 në katër grupe, nga 200 në secilin, dhe mbeten 100; me 40 dhe 7 bëhen 147. Nga 147 japim nga 30 në çdo grup, gjithsej 120, dhe mbeten 27; japim edhe nga 6, gjithsej 24, dhe mbeten 3. Pra 947 = 4 × 236 + 3. Kontrollojmë dy kushte njëkohësisht:

$$4 \times 236 + 3 = 947 \quad \text{dhe} \quad 0 \le 3 < 4.$$

Për kontrollin didaktik pyesim çfarë kuptimi ka mbetja 3 në problem.

Sipas kontekstit, përgjigjja ndryshon. Nëse 947 objekte ndahen njëlloj në katër grupe, secili merr 236 dhe mbeten 3. Nëse objektet vendosen në kuti me nga katër dhe asnjë nuk duhet të mbetet jashtë, duhen 237 kuti. Nëse ndahet një madhësi që mund të copëtohet, si 947 metra litar, çdo pjesë del 236 metra e tre të katërtat e metrit. Pjesëtimi me mbetje në $\mathbb{N}_0$ jep vetëm q = 236 dhe r = 3. Dallimi ndërmjet rezultatit matematik dhe vendimit praktik është aftësi që duhet ushtruar.

5.9 Pse funksionon algoritmi standard

Kur e lexojmë çdo shifër të herësit sipas rendit të saj, procedura ruan një veti të njëjtë në çdo hap: një pjesë e numrit është ndarë tashmë në grupe të barabarta dhe ka një mbetje të përkohshme, që bashkohet me shifrën e radhës. Në fund mbetja duhet të jetë më e vogël se pjesëtuesi. Mësuesi duhet të dijë të shpjegojë çfarë ndodh me dhjetëshen që mbetet kur «ulim» shifrën tjetër: ajo nuk zhduket, por bëhet dhjetë njësi.

5.9.1 Invarianti i algoritmit: argumentim formal

Le të jetë A një numër natyror me shifrat $d_1 d_2 \dots d_n$, të lexuara nga e majta, dhe $b \in \mathbb{N}$ pjesëtuesi. Për $k = 1, \dots, n$ shënojmë me P_k numrin që formojnë k shifrat e para; për shembull, për A = 936 kemi $P_1 = 9$, $P_2 = 93$ dhe $P_3 = 936$. Marrim edhe $P_0 = 0$. Me q_k dhe r_k shënojmë herësin dhe mbetjen e pjesëtimit të P_k me b, pra

$$P_k = b \times q_k + r_k, \quad 0 \le r_k < b. \tag{5.4}$$

Pohimi (5.4) është *invarianti* i algoritmit: pas çdo hapi, për pjesën e numrit që kemi lexuar vlen barazimi i pjesëtimit me mbetje. Për $k = 0$ ai vlen me $q_0 = r_0 = 0$. Duhet treguar se, nëse vlen për k, hapi i algoritmit e ruan edhe për $k + 1$. Kur të arrijmë te $k = n$, kemi $P_n = A$, prandaj q_n dhe r_n janë herësi dhe mbetja e kërkuar.

Shifra pasuese $d = d_{k+1}$ i shtohet pjesës së lexuar si njësi e rendit të ri. Prandaj

$$P_{k+1} = 10 \times P_k + d = b \times (10 \times q_k) + (10 \times r_k + d). \tag{5.5}$$

Numri $10 \times r_k + d$ është ai që në fletore formohet kur «ulim shifrën tjetër»: mbetja r_k, e shprehur në rendin e mëparshëm, këmbehet me $10 \times r_k$ njësi të rendit pasardhës, dhe atyre u shtohen d njësitë e këtij rendi. Këtë numër e pjesëtojmë me b:

$$10 \times r_k + d = b \times t + s, \quad 0 \le s < b. \tag{5.6}$$

Numri t është një shifër. Nga

$$r_k \le b - 1$$

dhe $d \le 9$ kemi

$$10 \times r_k + d \le 10 \times b - 1 < 10 \times b,$$

prandaj

$$b \times t < 10 \times b$$

dhe $t \le 9$. Duke zëvendësuar (5.6) në (5.5), marrim

$$P_{k+1} = b \times (10 \times q_k + t) + s, \quad 0 \le s < b. \tag{5.7}$$

Sipas unicitetit në pohimin 5.1, kjo do të thotë

$$q_{k+1} = 10 \times q_k + t$$

dhe $r_{k+1} = s$. Barazimi $q_{k+1} = 10 \times q_k + t$ ka një kuptim të thjeshtë: herësi i ri merret duke shkruar shifrën t në të djathtë të herësit të mëparshëm. Kështu çdo hap i algoritmit, pjesëtimi i vogël, shumëzimi, zbritja dhe «ulja» e shifrës, është rast i veçantë i (5.5)–(5.7). Kushti $t \le 9$ shpjegon pse në çdo hap shkruajmë një shifër të vetme, ndërsa kushti

$$0 \le s < b$$

shpjegon pse mbetja e përkohshme duhet të jetë gjithmonë më e vogël se pjesëtuesi. Nëse nxënësi mbyll një hap me mbetje $\ge b$, shifra që ka shkruar në herës është shumë e vogël.

Te 936 : 4, pas shifrës së parë kemi

$$P_1 = 9 = 4 \times 2 + 1.$$

Kur sjellim 3, formojmë

$$10 \times 1 + 3 = 13 = 4 \times 3 + 1,$$

prandaj t = 3 dhe $P_2 = 93 = 4 \times 23 + 1$. Pastaj

$$10 \times 1 + 6 = 16 = 4 \times 4 + 0,$$

prandaj t = 4 dhe

$$P_3 = 936 = 4 \times 234 + 0.$$

Shifrat e herësit nuk «zbresin» nga një vend i paqartë; ato dalin nga ruajtja e invariantit (Figura 7).

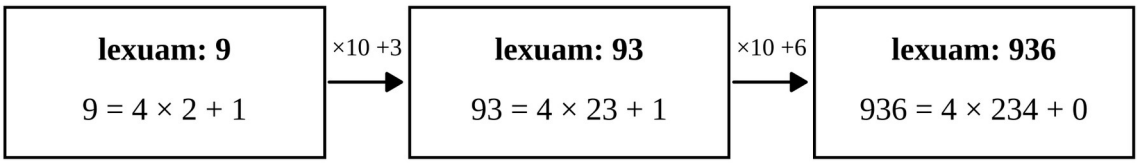


Figura 7. Invarianti i pjesëtimit 936 : 4: për çdo pjesë të lexuar të numrit vlen P = 4 × q + r, me 0 ≤ r < 4.

Rasti 816 : 4 tregon pse zeroja është e domosdoshme. Fillimisht 8 = 4 × 2 + 0. Kur sjellim 1, kemi

$$1 = 4 \times 0 + 1,$$

pra

$$81 = 4 \times 20 + 1.$$

Kur sjellim 6, kemi 16 = 4 × 4 + 0, dhe përfundojmë me 816 = 4 × 204. Nëse e heqim zeron, herësi 24 i përket 96, jo 816. Zeroja është një shifër e domosdoshme e sistemit pozicional, jo një shënim që mund të mungojë.

5.9.2 Pse rregulli «ulim shifrën tjetër» nuk mjafton

Shprehja tradicionale «ulim shifrën tjetër» përshkruan një lëvizje të dorës në fletore, por nuk shpjegon pse formohet numri i ri. Matematikisht kalojmë nga mbetja r te numri 10 × r + d; dhjetëfishimi i përgjigjet kalimit nga një rend te rendi pasardhës, më i ulët. Kjo ide humbet lehtë kur nxënësi thjesht e kopjon shifrën në kolonë. Te pyetja «Pse 1 bëhet 13 kur afrojmë 3-shin te 936 : 4?», përgjigjja e plotë është: «Sepse 1 qindëshe që mbeti këmbehet me 10 dhjetëshe, dhe atyre u shtohen 3 dhjetëshet». Vetëm pasi kuptohet vlera vendore, shkrimi mund të shkurtohet.

Në laboratorin metodik studentët zgjedhin një pjesëtim ku herësi ka zero në mes, një pjesëtim ku shifra e parë e të pjesëtueshmit është më e vogël se pjesëtuesi dhe një pjesëtim me mbetje. Për secilin shkruajnë fillimisht arsyetimin me vlerë vendore, pastaj algoritmin standard dhe në fund hartojnë pyetje diagnostikuese që nuk kërkojnë vetëm përgjigjen. Për shembull, 132 : 6 = 22 kërkon që shifra e parë 1 të bashkohet me 3-shin, që të kemi 13 dhjetëshe; ndërsa 618 : 6 = 103 kërkon zero te dhjetëshet. Këto dy raste diagnostikojnë vështirësi të ndryshme.

Tabela 8. *Pjesëtime për diagnostikimin e vlerës vendore*

I pjesëtueshmi : pjesëtuesi	Herësi dhe mbetja	Çështja e vlerës vendore	Pyetja diagnostikuese
816 : 4	204; r = 0	Zero te dhjetëshet	Çfarë tregon 0 te 204?
618 : 6	103; r = 0	Te dhjetëshet e herësit nuk ka asgjë për të shkruar përveç zeros	Pse 13 nuk mund të jetë rezultati?
132 : 6	22; r = 0	Nisim me 13 dhjetëshe	Pse fillojmë me 13 e jo me 1?
207 : 8	25; r = 7	Mbetja dhe kushti r < 8	A mund të formohet edhe një grup?

5.10 Kontrolli i rezultatit dhe kufijtë e metodës

Përgjigjja «947 : 4 = 236 mbetja 3» kontrollohet me

$$4 \times 236 + 3 = 947 \quad \text{dhe} \quad 0 \leq 3 < 4.$$

Barazimi vetëm nuk mjafton: «947 = 4 × 235 + 7» e plotëson pjesën e parë, por jo kushtin 7 < 4. Ndaj mbetjen e krahasojmë gjithmonë me pjesëtuesin.

Në mësim, nxënësi nuk duhet ta shohë algoritmin si listë urdhrash «pjesëto, shumëzo, zbrit, ul shifrën». Çdo hap lidhet herë pas here me modelin konkret ose me tabelën e vlerës vendore. Nga ana tjetër, paraqitjet duhen pakësuar kur nxënësi arsyeton pa to; ato janë mbështetje e përkohshme, jo mjet pa të cilin nxënësi nuk mund të punojë.

5.10.1 Algoritmi i pjesëtimit si objekt analize profesionale

Mësuesi dallon tri pyetje: «A jep procedura rezultatin e saktë?», «A e kupton nxënësi pse funksionon?» dhe «A është kjo procedurë zgjedhje e përshtatshme didaktike për këtë rast?». Për shembull, një nxënës e gjen 456 : 3 = 152 me 450 : 3 + 6 : 3; një tjetër përdor algoritmin standard; një i tretë e ndan 456 në 300 + 150 + 6. Të tria procedurat janë të sakta, por lidhja e secilës me ndarjen në grupe të barabarta shpjegohet ndryshe. Krahasimi i tyre e ndihmon studentin të kuptojë se mësuesi nuk synon që të gjitha zgjidhjet të duken njësoj.

Kur algoritmi mësohet shumë herët si varg urdhrash, nxënësi mund t'i ruajë shifrat e herësit, por t'ia humbasë madhësinë. Te 714 : 7 = 102, nxënësi mund të shkruajë 12 dhe ta quajë llogaritjen të mbaruar, sepse ka ndjekur vetëm shifrat jozero. Kontrolli i madhësisë e hedh

poshtë menjëherë: 7 × 12 = 84, shumë më pak se 714. Vlerësimi përafërsisht, lidhja me shumëzimin dhe kontrolli i mbetjes janë tri mënyra verifikimi që duhen bërë zakon.

Një vështirësi tjetër lind kur mbetja interpretohet pa kujdes. Te 53 : 4 kemi 13 dhe mbetjen 1. Në pyetjen «Sa grupe të plota me nga katër?» përgjigjja është trembëdhjetë; në pyetjen «Sa makina me katër vende duhen për 53 veta?» duhen katërmbëdhjetë makina. Herësi i plotë nuk është automatikisht përgjigjja e çdo pyetjeje. Ky është dallimi ndërmjet llogaritjes dhe modelimit të situatës. Studentët hartojnë dy probleme me të njëjtin barazim, 53 = 4 × 13 + 1, por me dy përgjigje përfundimtare të ndryshme.

5.10.2 Gabime që nuk diagnostikohen vetëm nga rezultati

Te gabimi 816 : 4 = 24, një hipotezë është humbja e zeros në herës; një tjetër, leximi i gabuar i shkrimit 204. Te gabimi 936 : 4 = 243 mund të jenë ndërruar dy shifrat e fundit, por mund të ketë edhe vështirësi në vendosjen e herësve të pjesshëm. Nxënësit i kërkojmë të thotë «sa qindëshe? sa dhjetëshe? sa njësi?» dhe ta kontrollojë me shumëzim. Vetëm nga një rezultat i gabuar nuk mund ta gjejmë me siguri shkakun.

Te 947 : 4 = 236 mbetja 3, kontrolli 4 × 236 + 3 = 947 është i domosdoshëm, por nuk mjafton për të gjykuar nëse nxënësi ka kuptuar. Studentët mund të pyesin: «Pse nuk shkruajmë 237 mbetja −1?», «Pse mbetja duhet të jetë më e vogël se katër?» dhe «Si ndryshon gjithçka nëse kemi 948 objekte?». Këto pyetje provojnë nëse marrëdhënia është e qëndrueshme, jo vetëm nëse nxënësi di ta përsërisë procedurën.

5.11 Njësi profesionale: zeroja në herës

Shembull matematikor i zgjidhur.

$$618 = 6 \times 100 + 6 \times 3,$$

prandaj

$$618 : 6 = 103.$$

Herësi ka një qindëshe, zero dhjetëshe dhe tri njësi.

Paraqitja në klasë. Gjashtë qindëshet ndahen në gjashtë grupe, nga një qindëshe për grup. Dhjetëshja e vetme nuk mjafton për t'u dhënë të gjashtë grupeve; ajo këmbehet me dhjetë njësi dhe bashkë me tetë njësitë bëhen tetëmbëdhjetë. Çdo grup merr nga tri njësi.

Pyetje diagnostikuese. «A mund të tregojë numri 13 një qindëshe? Në cilin vend duhet shkruar shifra 1?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Qindëshen e gjeta, por zeron nuk e shkrova, sepse nuk kishte dhjetëshe.»

Analiza didaktike. Përgjigjja sugjeron se vështirësia është te shkrimi pozicional, jo te ndarja e qindësheve. Hipotezën e provojmë duke i kërkuar nxënësit ta shkruajë numrin nga një

tabelë me rendet e qindësheve, dhjetësheve dhe njësive. Nëse e shkruan saktë atje, por jo në herës, vështirësia lidhet me lidhjen ndërmjet hapave të algoritmit dhe rendeve.

Alternativë metodike. Kontrolli $6 \times 13 = 78$ e hedh poshtë rezultatin; $6 \times 103 = 618$ e vërteton. Pjesëtimet $630 : 6$ dhe $660 : 6$ dallojnë përkatësisht zeron në mes dhe zeron në fund të herësit.

Pyetje reflektuese për studentin. Pse një pyetje për vlerën e shifrës jep më shumë informacion se udhëzimi «mos e harro zeron»?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Të njëjtat numra dhe e njëjta shenjë mund të paraqesin probleme me strukturë të ndryshme; e panjohura vendos kuptimin e pjesëtimit.
- Teorema $a = b \times q + r$, $0 \le r < b$, ka dy kontrolle të pavarura: barazimin dhe kushtin për mbetjen.
- Herësit e pjesshëm dhe algoritmi standard janë dy shkallë shkurtimi të së njëjtës marrëdhënie.
- Invarianti $P = b \times q + r$ shpjegon çdo hap të algoritmit; zeroja në herës është shifër e domosdoshme, jo shënim që mund të mungojë.

6. Varësia e prodhimit nga faktorët

NË KËTË KAPITULL

- Kur ndryshon njëri faktor
- Kur ndryshojnë të dy faktorët dhe kur prodhimi ruhet
- Si ta mësojmë varësinë e prodhimit

6.1 Kur ndryshon njëri faktor

Le të jenë a, b, k ∈ $\mathbb{N}_0$. Nëse faktorin a e zëvendësojmë me k × a, prodhimi i ri është

$$(k \times a) \times b = k \times (a \times b).$$

Pra, kur njërin faktor e shumëzojmë me k, edhe prodhimi shumëzohet me k. Kjo vlen edhe kur një faktor është zero, por shprehja «zmadhohet k herë» ka kuptim vetëm kur prodhimi fillestar nuk është zero. Nëse a-së i shtojmë c, prodhimi ndryshon sipas

$$(a + c) \times b = a \times b + c \times b:$$

shtesa është c × b, jo c.

$$(a + c) \times b - a \times b = c \times b, \qquad (k \times a) \times b = k \times (a \times b). \tag{6.1}$$

Shembull 3. Nëse 18 × 7 = 126, atëherë

$$19 \times 7 = 126 + 7 = 133,$$

pa e bërë shumëzimin nga e para. Nëse 36 × 7 = 252, arsyeja është se faktori 18 u dyfishua, 18 → 36, ndërsa faktori tjetër mbeti i njëjtë; ndaj prodhimi u dyfishua.

6.2 Kur ndryshojnë të dy faktorët dhe kur prodhimi ruhet

Nëse faktorët i shumëzojmë përkatësisht me k dhe me m, prodhimi shumëzohet me

$$k \times m: (k \times a) \times (m \times b) = (k \times m) \times (a \times b).$$

Nëse a-në e dyfishojmë dhe b-në e përgjysmojmë, me kusht që b të jetë çift, prodhimi ruhet:

$$(2 \times a) \times (b : 2) = a \times b.$$

Kjo nuk vlen vetëm për një ushtrim; është një veti e marrëdhënies shumëzuese. Për shembull,

$$15 \times 24 = 30 \times 12 = 60 \times 6 = 360.$$

Kundërshembull. Pohimi «Nëse çdo faktori i shtojmë 2, prodhimi rritet me 4» nuk është i vërtetë:

$$(a + 2) \times (b + 2) = a \times b + 2 \times a + 2 \times b + 4.$$

Për

$$3 \times 5 = 15,$$

prodhimi i ri 5 × 7 = 35 është 20 më i madh, jo 4. Ky shembull ndihmon të dallohet mënyra aditive e të menduarit nga ajo shumëzuese.

6.3 Si ta mësojmë varësinë e prodhimit

Mësuesi vendos para nxënësve dy modele: 3 rreshta me nga 5 katrorë (15) dhe 4 rreshta me nga 5 katrorë (20). Nxënësit diskutojnë pse një rresht më shumë shton pesë katrorë. Pastaj, pa i numëruar të gjithë katrorët, parashikojnë sa katrorë kanë 7 rreshta me nga 5. Vetëm pasi struktura del në pah, shkruhet

$$(a + 1) \times b = a \times b + b.$$

Kjo radhë e përdor modelin për të nxjerrë përfundimin; nuk e përdor formulën për t'ia imponuar modelit.

6.3.1 Nga rastet e veçanta te barazimet e përgjithshme

Kur faktorin e parë e shumëzojmë me k, vlen

$$(k \times a) \times b = k \times (a \times b).$$

Për k = 2 prodhimi dyfishohet, për k = 3 trefishohet. Nëse të dy faktorët i shumëzojmë me k, atëherë

$$(k \times a) \times (k \times b) = (k \times k) \times (a \times b);$$

për k = 2 prodhimi katërfishohet, nuk dyfishohet. Mësuesi përdor këtu një model me dy përmasa: kur dyfishojmë gjatësinë dhe gjerësinë e një drejtkëndëshi, syprina katërfishohet. Kjo lidhje përgatit idetë e mëvonshme për zmadhimin e figurave dhe për syprinën.

Kur të dy faktorëve u shtojmë diçka, duhet dalluar prodhimi i ri nga rritja e prodhimit. Prodhimi i ri shkruhet me katër terma,

$$(a + p) \times (b + q) = a \times b + a \times q + b \times p + p \times q, \tag{6.2}$$

ndërsa rritja ndaj prodhimit fillestar ka tre terma:

$$(a + p) \times (b + q) - a \times b = a \times q + b \times p + p \times q. \tag{6.3}$$

Në modelin e syprinës (Figura 8), drejtkëndëshi me brinjë a + p dhe b + q ndahet në katër drejtkëndësha: drejtkëndëshi fillestar a × b, dy shirita me syprinë a × q dhe b × p, dhe drejtkëndëshi në qoshe me brinjë p dhe q. Ky i fundit është katror vetëm kur p = q. Për shembull, për a = 20, b = 10, p = 3 dhe q = 2 kemi

$$23 \times 12 = 200 + 40 + 30 + 6 = 276,$$

ndërsa rritja ndaj 20 × 10 = 200 është

$$40 + 30 + 6 = 76.$$

Gabimi i shpeshtë

$$(a + p) \times (b + q) = a \times b + p \times q$$

i humbet dy shiritat anësorë; me vizatimin ai mund të hidhet poshtë para se të jepet formula.

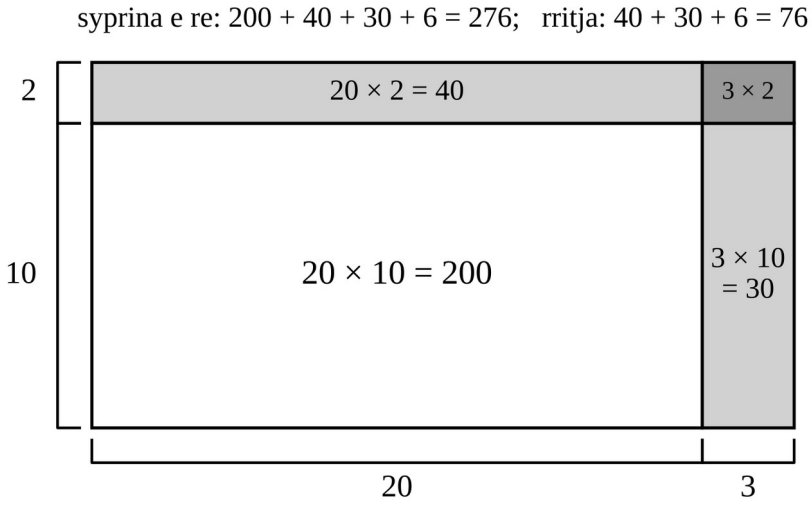


Figura 8. Modeli i syprinës për (20 + 3) × (10 + 2): drejtkëndëshi 23 × 12 ndahet në 20 × 10, 20 × 2, 3 × 10 dhe 3 × 2. Rritja ndaj 20 × 10 përbëhet nga tre pjesët e hijezuara, me syprinë 40 + 30 + 6 = 76; pjesa në qoshe është drejtkëndësh 3 × 2, jo katror.

Prodhimi mund të ruhet edhe kur faktorët ndryshojnë jo në të njëjtën mënyrë. Për k > 0,

$$(k \times a) \times (b : k) = a \times b,$$

kur b : k ka kuptim. Në $\mathbb{N}_0$ kjo kërkon k ∣ b; për shembull,

$$24 \times 15 = 12 \times 30 = 6 \times 60.$$

Nëse b është tek dhe k = 2, gjysma e b-së nuk është numër natyror; në mësimin në klasat fillore zgjedhim shembuj që qëndrojnë brenda numrave të programit. Studenti duhet ta shkruajë kushtin e vlefshmërisë, jo vetëm të llogarisë një rast që del i saktë.

6.3.2 Një detyrë për arsyetim paraalgjebrik

Në dërrasë shkruhen prodhimet 12 × 8, 13 × 8, 14 × 8, 15 × 8. Pa i llogaritur nga e para, nxënësi vëren se nga njëri te tjetri rezultati rritet me tetë. Përgjithësimi me fjalë, «kur njëri faktor rritet me një dhe tjetri nuk ndryshon, prodhimi rritet me faktorin që nuk ndryshoi», shkruhet më vonë si

$$(a + 1) \times b = a \times b + b.$$

Mësuesi shikon nëse nxënësi e shpjegon rregullsinë me një grup të ri me tetë, apo thjesht e vazhdon vargun duke shtuar tetë pa e kuptuar pse.

Detyra e dytë jep 18 × 6 dhe kërkon, pa makinë llogaritëse, 18 × 12. Nxënësi duhet të kuptojë se kur faktori i dytë dyfishohet, dyfishohet edhe prodhimi: 18 × 12 = 216. Pastaj kërkohet 36 × 12, dhe nxënësi argumenton se prodhimi është katër herë 18 × 6, pra 432. Diskutimi mund të vazhdojë me pyetjen: «Çfarë ndodh nëse njërin faktor e përgjysmojmë dhe tjetrin e dyfishojmë?» Kështu varësia bëhet një strukturë e përgjithshme, jo listë pohimesh për t'u mësuar përmendsh.

Tabela 9. *Si ndryshon prodhimi kur ndryshojnë faktorët*

Ndryshimi i faktorëve	Barazimi	Çfarë mëson nxënësi
$a \to a + k$	$(a + k) \times b = a \times b + k \times b$	Shtesa është $k \times b$, jo vetëm k.
$a \to k \times a$	$(k \times a) \times b = k \times (a \times b)$	Prodhimi shumëzohet me k.
$a \to k \times a$; $b \to k \times b$	$(k \times a) \times (k \times b) = k \times k \times a \times b$	Kur dyfishohen të dy, prodhimi katërfishohet.
$a \to k \times a$; $b \to b : k$	$(k \times a) \times (b : k) = a \times b$, kur $k \mid b$	Prodhimi ruhet; duhet kushti i plotëpjesëtueshmërisë.
$a \to a + p$; $b \to b + q$	$(a + p) \times (b + q) - a \times b = a \times q + b \times p + p \times q$	Prodhimi i ri ka katër terma; rritja ka tre.

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Kur njëri faktor shumëzohet me k, prodhimi shumëzohet me k; kur njërit faktor i shtojmë c, prodhimi rritet me c herë faktorin tjetër.
- Prodhimi ruhet kur njëri faktor shumëzohet dhe tjetri pjesëtohet me të njëjtin numër, me kushtin që pjesëtimi të bëhet në $\mathbb{N}_0$.
- Kur të dy faktorëve u shtojmë diçka, prodhimi i ri ka katër terma, ndërsa rritja ndaj prodhimit fillestar ka tre: $a \times q$, $b \times p$ dhe $p \times q$. Në model ato janë tre drejtkëndësha; pjesa në qoshe është katror vetëm kur $p = q$.
- Rregullat zbulohen nga vargje prodhimesh dhe nga modeli, dhe vetëm pastaj shkruhen si barazime.

7. Varësia e herësit nga i pjesëtueshmi dhe pjesëtuesi

NË KËTË KAPITULL

- Pjesëtimi pa mbetje
- Kur shumëzohen të dy përbërësit
- Kur ndryshon vetëm i pjesëtueshmi, me mbetje
- Kur ndryshon vetëm pjesëtuesi
- Nga varësitë te mendimi paraalgjebrik
- Njësi profesionale: ruajtja e herësit

7.1 Pjesëtimi pa mbetje

Le të jetë a = b × q, ku a, q ∈ $\mathbb{N}_0$ dhe b ≥ 1. Për çdo k ∈ $\mathbb{N}_0$ kemi

$$k \times a = b \times (k \times q),$$

prandaj

$$(k \times a) : b = k \times q.$$

Për k ≥ 1, nëse k e plotëpjesëton q-në, atëherë

$$a : (k \times b) = q : k;$$

përndryshe pjesëtimi me k × b ka mbetje. Nëse k e plotëpjesëton a-në dhe b-në, atëherë

$$a : k = (b : k) \times q,$$

pra

$$(a : k) : (b : k) = q$$

dhe herësi mbetet i njëjtë. Për shembull, nga

$$72 : 8 = 9$$

del

$$72 : 24 = 3,$$

sepse 3 e plotëpjesëton 9-ën.

Shembull 4. Nga 72 : 8 = 9 dalin

$$(72 \times 3) : 8 = 27 \quad \text{dhe} \quad (72 \times 3) : (8 \times 3) = 9.$$

Por 72 nuk plotëpjesëtohet me 16, sepse 2 nuk e plotëpjesëton 9-ën: pjesëtimi me mbetje jep $72 = 16 \times 4 + 8$, pra herësin 4 dhe mbetjen 8. Raporti $72/16 = 9/2$ nuk është herës në $\mathbb{N}_0$. Këtu ndryshon vetëm pjesëtuesi, prandaj rregulli i rastit të parë nuk zbatohet.

7.2 Kur shumëzohen të dy përbërësit

Le të jenë $a, q, r \in \mathbb{N}_0$ dhe $b, k \in \mathbb{N}$, me

$$a = b \times q + r \quad \text{dhe} \quad 0 \le r < b.$$

Nga shpërndarja dhe shoqërueshmëria,

$$k \times a = k \times (b \times q) + k \times r = (k \times b) \times q + k \times r.$$

Për më tepër, $k \times r \ge 0$, dhe nga $r < b$ e $k \ge 1$ del $k \times r < k \times b$ (vetia e monotonisë, seksioni 3.3.1). Pra çifti $(q, k \times r)$ plotëson kushtet e pohimit 5.1 për pjesëtimin e $k \times a$ me $k \times b$, dhe sipas unicitetit ai është herësi dhe mbetja e këtij pjesëtimi. Kur i pjesëtueshmi dhe pjesëtuesi shumëzohen me të njëjtin numër pozitiv k, herësi i plotë q ruhet, ndërsa mbetja shumëzohet me k. Për shembull, $29 : 6$ jep 4 dhe mbetjen 5, ndërsa $58 : 12$ jep 4 dhe mbetjen 10. Gabimi i mundshëm është të thuhet se «ruhet edhe mbetja»: 5 dhe 10 nuk janë të njëjta.

$$a = b \times q + r \;\Rightarrow\; k \times a = (k \times b) \times q + k \times r, \quad (k > 0). \tag{7.1}$$

Ky është një shembull i mirë i kalimit nga vëzhgimi i disa rasteve numerike te një pohim i vërtetuar. Kushtet duhen mbajtur parasysh: pohimi flet për shumëzimin e të dy përbërësve me të njëjtin numër pozitiv. Ai nuk thotë asgjë për rastin kur shumëzohet vetëm njëri përbërës (seksionet 7.3 dhe 7.4), dhe nuk thotë se ruhet mbetja.

7.3 Kur ndryshon vetëm i pjesëtueshmi, me mbetje

Tani mbajmë fiks pjesëtuesin $b > 0$ dhe ndryshojmë vetëm të pjesëtueshmin. Le të jenë

$$a = b \times q + r, \quad 0 \le r < b$$

dhe $k \in \mathbb{N}_0$. Nga

$$k \times a = b \times (k \times q) + k \times r,$$

pjesëtojmë $k \times r$ me b: $k \times r = b \times t + s$, ku

$$0 \le s < b.$$

Atëherë

$$k \times a = b \times (k \times q + t) + s;$$

herësi i ri është $k \times q + t$ dhe mbetja s. Me fjalë: mbetja e shumëzuar mund të formojë grupe të reja të plota, dhe këto i shtohen herësit.

Kundërshembull. 14 : 4 jep 3 dhe mbetjen 2, ndërsa 28 : 4 jep 7 dhe mbetjen 0, jo 6 dhe mbetjen 4. Barazimi $28 = 4 \times 6 + 4$ nuk e plotëson kushtin për mbetjen. Studenti nuk duhet ta përgjithësojë një rregull jashtë kushteve të tij.

7.4 Kur ndryshon vetëm pjesëtuesi

Tani mbajmë fiks të pjesëtueshmin a dhe ndryshojmë vetëm pjesëtuesin. Për a të pandryshuar, sa më i madh të jetë pjesëtuesi b, aq më i vogël ose i barabartë është herësi i plotë. Sipas karakterizimit (5.2), me a të fiksuar, herësi q i a-së me b është numri i vetëm në $\mathbb{N}_0$ për të cilin

$$q \times b \le a < (q+1) \times b.$$

Kur b rritet, i njëjti q mund ta plotësojë ende këtë kusht; herësi zvogëlohet vetëm kur $q \times b$ e kalon a-në. Për shembull, me $a = 15$ kemi $3 \times 4 \le 15 < 4 \times 4$ dhe $3 \times 5 \le 15 < 4 \times 5$, prandaj për $b = 4$ dhe $b = 5$ herësi është 3; për $b = 6$ kemi $3 \times 6 = 18 > 15$, ndërsa $2 \times 6 \le 15 < 3 \times 6$, prandaj herësi bëhet 2. Në klasat fillore kjo shpjegohet me ndarjen e së njëjtës sasi në grupe gjithnjë e më të mëdha.

Tabela 10. *Si ndryshon herësi kur ndryshojnë përbërësit*

Ndryshimi	Kushti	Përfundimi i saktë
$a \to k \times a$, b i njëjtë	$a = b \times q$, k natyror	$q \to k \times q$, pa mbetje
$a \to k \times a$, b i njëjtë	$a = b \times q + r$	$q' = k \times q + t$ dhe $r' = s$, ku $k \times r = b \times t + s$
$a \to k \times a$, $b \to k \times b$	$k \in \mathbb{N}$	q i njëjtë; $r \to k \times r$
b rritet, a i njëjtë	b pozitiv	Herësi i plotë nuk rritet; mund të mbetet i njëjtë
$a \to a : k$, $b \to b : k$	k i plotëpjesëton a-në dhe b-në	q i njëjtë; $r \to r : k$

7.5 Nga varësitë te mendimi paraalgjebrik

Pyetje si «Nëse dyfishoj numrin e kutive dhe secila ka po aq lapsa, si ndryshon numri i lapsave?» i lejojnë fëmijët të shprehin marrëdhënie pa përdorur ende shkronja. Studenti i përdor barazimet me shkronja në punën universitare për të kontrolluar nëse pohimet janë të vërteta, ndërsa në klasë mund të nisë me tabela, vizatime dhe fjalë.

7.5.1 Herësi i plotë kur i shtohet diçka të pjesëtueshmit

Sipas teoremës së pjesëtimit, për $a \ge 0$ dhe $b > 0$ kemi

$$a = b \times q + r, \quad 0 \le r < b.$$

Nëse të pjesëtueshmit i shtojmë $d \ge 0$, shkruajmë

$$r + d = b \times t + s \ \text{ me } \ 0 \le s < b.$$

Atëherë

$$a + d = b \times (q + t) + s;$$

herësi i ri është q + t dhe mbetja e re s. Numri t është herësi i plotë i (r + d) me b dhe mund të jetë edhe zero. Kjo shpjegon pse herësi nuk rritet domosdo kur i pjesëtueshmi rritet pak: 20 : 6 jep 3 dhe mbetjen 2, ndërsa 21 : 6 jep 3 dhe mbetjen 3. Një njësi më shumë nuk mjafton për të formuar një grup të ri.

Nëse shtesa është pikërisht b, marrim

$$a + b = b \times (q + 1) + r.$$

Herësi i plotë rritet saktësisht me një dhe mbetja nuk ndryshon. Nga 20 : 6, që jep 3 dhe mbetjen 2, kalojmë te 26 : 6, që jep 4 dhe mbetjen 2. Nëse shtesa është k × b, herësi rritet me k dhe mbetja ruhet. Ky pohim, me kushtet b > 0 dhe k ≥ 0, është më i saktë dhe më i dobishëm se fjalia «kur i shtojmë të pjesëtueshmit, herësi rritet».

Kur i pjesëtueshmi mbetet i njëjtë dhe pjesëtuesi rritet, herësi i plotë nuk rritet: nëse $b_2 > b_1 \geq 1$, herësi i plotë i a-së me b_2 nuk e kalon herësin e plotë të a-së me b_1. Me karakterizimin (5.2) argumenti është i shkurtër: nëse q_2 është herësi i a-së me b_2, atëherë

$$b_1 \times q_2 \leq b_2 \times q_2 \leq a,$$

dhe meqë herësi q_1 i a-së me b_1 është numri më i madh me

$$b_1 \times q_1 \leq a,$$

del $q_2 \leq q_1$. Me fjalë: kur kërkojmë grupe më të mëdha nga e njëjta sasi, nuk mund të formojmë më shumë grupe të plota. Por herësi nuk zvogëlohet domosdo në çdo rritje të vogël të pjesëtuesit: 20 : 6 jep 3, 20 : 7 jep 2, ndërsa 20 : 7 dhe 20 : 8 japin të dy 2. Herësi nuk rritet, por as nuk zvogëlohet gjithmonë.

Nëse të dy përbërësit plotëpjesëtohen me k > 0, mund ta zëvendësojmë a : b me (a : k) : (b : k). Edhe mbetja pjesëtohet me k, sepse nëse

$$a = b \times q + r$$

dhe k i plotëpjesëton a-në dhe b-në, atëherë e plotëpjesëton edhe r-në. Për shembull, 58 : 12, që jep 4 dhe mbetjen 10, me k = 2 bëhet 29 : 6, që jep 4 dhe mbetjen 5. Studentët e shkruajnë këtë kusht dhe nuk e thjeshtojnë pjesëtimin kur numrat nuk plotëpjesëtohen me k.

7.5.2 Raporti dhe herësi i plotë

Raporti i a-së me b-në, për a ≥ 0 dhe b > 0, dhe herësi i plotë janë dy gjëra të ndryshme. Nëse r > 0, raporti është q + r/b dhe nuk është numër i plotë. Kur b mbahet fiks dhe a rritet, herësi q ndryshon vetëm kur a arrin shumëfishin pasues të b-së, (q + 1) × b. Për shembull, raporti i 20-ës me 6-ën është 10/3, ndërsa pjesëtimi me mbetje jep q = 3 dhe r = 2. Mësuesi sqaron nëse pyetja

kërkon grupe të plota, numrin e njësive që duhen apo ndarjen e një madhësie që mund të ndahet pa fund.

Te problemi «20 veta udhëtojnë me makina me nga 6 vende», herësi 3 dhe mbetja 2 tregojnë tri makina plot dhe dy veta pa vend; që të udhëtojnë të gjithë, duhen katër makina. Te problemi «20 metra shirit ndahen në gjashtë pjesë të barabarta», përgjigjja e përshtatshme mund të jetë 3⅓ metra për pjesë, sepse shiriti pritet. Bashkësia e numrave që përdorim varet nga madhësia dhe nga veprimi që përshkruan problemi. Nuk është e saktë t'i ngatërrojmë këto dy kuptime vetëm sepse shkruhen me të njëjtën shenjë «:».

Tabela 11. *Pohime për herësin: të vërteta apo jo?*

Pohimi	A është i vërtetë?	Argumenti ose kundërshembulli
Kur të pjesëtueshmit i shtojmë 1, herësi rritet.	Jo në përgjithësi.	20 : 6 jep 3 me mbetje 2; 21 : 6 jep 3 me mbetje 3.
Kur a-së i shtojmë b, herësi rritet me 1.	Po, kur b > 0.	a + b = b × (q + 1) + r.
Kur rritet pjesëtuesi, herësi rritet.	Jo.	Për a të njëjtë, herësi i plotë nuk rritet.
Kur dyfishojmë të dy përbërësit, mbetja ruhet.	Jo në përgjithësi.	29 : 6 me mbetje 5; 58 : 12 me mbetje 10.
Kur dyfishojmë të dy përbërësit, herësi ruhet.	Po, për çdo pjesëtues pozitiv.	2 × a = (2 × b) × q + 2 × r, me 2 × r < 2 × b.

7.6 Njësi profesionale: ruajtja e herësit

Shembull matematikor i zgjidhur. 23 = 5 × 4 + 3. Kur dyfishojmë të pjesëtueshmin dhe pjesëtuesin, marrim 46 = 10 × 4 + 6. Herësi 4 ruhet, ndërsa mbetja bëhet 6.

Paraqitja në klasë. Tregohen katër grupe me nga pesë shenja dhe tri shenja jashtë grupeve. Çdo shenjë zëvendësohet me një çift; tani grupet kanë nga dhjetë, dhe jashtë mbeten gjashtë.

Pyetje diagnostikuese. «Çfarë mbeti njësoj në figurë dhe çfarë u dyfishua?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Herësi dhe mbetja nuk ndryshojnë kur dyfishojmë të dy numrat.»

Analiza didaktike. Përgjigjja sugjeron se nxënësi e ka shtrirë rregullin e ruajtjes së herësit edhe te mbetja; mund të jetë edhe një përgjigje e dhënë pa e parë figurën. Pyetja diagnostikuese e dallon këtë. Kontrolli

$$10 \times 4 + 3 = 43 \neq 46$$

e tregon mospërputhjen, ndërsa figura tregon arsyen.

Alternativë metodike. E krahasojmë me rastin kur dyfishohet vetëm 23-shi: 46 = 5 × 9 + 1. Këtu herësi ndryshon, sepse mbetja e dyfishuar formon edhe një grup të plotë. Për kontroll në rast të ri përdoret

$$17 = 4 \times 4 + 1 \quad \text{dhe} \quad 34 = 8 \times 4 + 2.$$

Pyetje reflektuese për studentin. Cilat kushte duhet të thotë nxënësi që pohimi i tij të jetë i saktë edhe kur pjesëtimi ka mbetje?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Kur i pjesëtueshmi dhe pjesëtuesi shumëzohen me të njëjtin numër, herësi i plotë ruhet dhe mbetja shumëzohet me atë numër.
- Kur shumëzohet vetëm i pjesëtueshmi, mbetja e shumëzuar mund të formojë grupe të reja; herësi bëhet k × q + t.
- Kur rritet pjesëtuesi, herësi i plotë nuk rritet, por as nuk zvogëlohet në çdo hap.
- Raporti dhe herësi i plotë janë dy gjëra të ndryshme; problemi vendos cili prej tyre na duhet.

8. Gabimet si burim informacioni për mësimdhënien

NË KËTË KAPITULL

- Modeli diagnostik: çfarë shohim, hipotezë, provë, ndërhyrje, kontroll
- Tri raste për analizë profesionale
- Matricë e shkurtër e vlerësimit formues
- Nga gabimi që shohim te shkaku i mundshëm
- Një bisedë diagnostikuese e modeluar
- Rubrikë e shkurtër për diagnostikimin e gabimeve
- Një instrument me dy faza
- Si zgjedhim ndërhyrjen: çfarë rekomandojnë udhëzuesit

8.1 Modeli diagnostik: çfarë shohim, hipotezë, provë, ndërhyrje, kontroll

Të korrigjosh rezultatin nuk është njësoj si të trajtosh shkakun e gabimit. Nëse për 816 : 4 nxënësi shkruan 24, hipoteza më e mundshme është se nuk e ka shënuar zeron që mban vendin e dhjetësheve, por mund të ketë edhe paqartësi për vlerën vendore ose për mënyrën si organizohet algoritmi. Për t'i dalluar, mësuesi i kërkon nxënësit të shpjegojë çfarë tregojnë 2 dhe 4 në herës dhe të zgjidhë 824 : 4. Vetëm pas kësaj zgjedh ndërhyrjen.

8.2 Tri raste për analizë profesionale

Rasti A: «816 : 4 = 24». *Çfarë shohim:* herësi është shkruar me dy shifra. *Hipotezat:* H1, ka humbur vendi i dhjetësheve; H2, nxënësi nuk i ka njohur qindëshet. *Pyetja:* «Çfarë do të thotë t'i ndash 8 qindëshe ndërmjet 4 grupeve?» *Ndërhyrja:* ndërtohet 816 me materiale dhjetore, ndahen 8 qindëshe në 4 grupe dhe diskutohet pse 1 dhjetëshe duhet këmbyer me 10 njësi. *Kontrolli në rast të ri:* 824 : 4 dhe shpjegimi i zeros.

Rasti B: «23 : 5 jep 4 me mbetje 5». Shkrimi ka dy mospërputhje:

$$5 \times 4 + 5 = 25 \neq 23,$$

dhe mbetja 5 nuk është më e vogël se pjesëtuesi. Nga kjo përgjigje nuk mund të vendosim nëse nxënësi ka gabuar te zbritja apo te kuptimi i mbetjes. Pyetjet që i dallojnë janë: «Sa objekte mbeten pasi heqim katër grupe me nga pesë nga 23?» dhe «A mund të formosh edhe një grup me ato që mbetën?». Ndërhyrja përdor 23 objekte dhe e lidh grupimin me $23 = 5 \times 4 + 3$. Për kontroll jepen 29 : 6 dhe shkrimi $27 = 5 \times 4 + 7$; ky i fundit e plotëson barazimin, por jo kushtin për mbetjen.

Rasti C: «25 × 16 = 50 × 16». *Çfarë shohim:* njëri faktor u dyfishua, ndërsa tjetri nuk ndryshoi. *Hipoteza:* nxënësi di të dyfishojë, por nuk e njeh ruajtjen e prodhimit. *Pyetja:* «Nëse do të mbash të njëjtën sasi gjithsej, si duhet të ndryshojë faktori tjetër?» *Ndërhyrja:* tabela 25 × 16, 50 × 8, 100 × 4. *Kontrolli në rast të ri:* 15 × 24 me dyfishim dhe përgjysmim.

8.3 Matricë e shkurtër e vlerësimit formues

Tabela 12. *Matricë e vlerësimit formues*

Kriteri	Provë e pamjaftueshme	Provë e mirë
Kuptimi	Vetëm numri përfundimtar	Lidh problemin, modelin dhe barazimin
Argumentimi	Përmend «rregullin»	Shpjegon vetinë që e garanton hapin
Vlera vendore	Lexon vetëm shifrat	Emërton qindëshet, dhjetëshet dhe njësitë
Kontrolli	Kontrollon vetëm shumëzimin	Kontrollon barazimin dhe kushtin për mbetjen
Diagnostikimi	Etiketon nxënësin	Propozon hipotezë dhe pyetje që e provon

8.4 Nga gabimi që shohim te shkaku i mundshëm

Një shkrim i vetëm na jep pak informacion. Përgjigjja 34 × 6 = 204 është e saktë, por nuk tregon vetvetiu se nxënësi e kupton shpërndarjen; përgjigjja 184 është e gabuar, por nuk tregon shkakun. Mësuesi shikon shënimet, kërkon një shpjegim me gojë, jep një detyrë të ngjashme dhe një detyrë ku ndryshon vetëm një gjë. Kur këto përputhen, hipoteza bëhet më e besueshme.

Le të marrim rastin «19 × 7 = 147». Nëse nxënësi ka shkruar

$$(20 - 1) \times 7 = 140 + 7,$$

hipoteza është se e ka kthyer kompensimin në drejtim të gabuar. Ndërhyrja e parë nuk është diktimi i formulës. Mësuesi kërkon një krahasim: «A kanë 19 grupe më shumë apo më pak se 20 grupe?», pastaj e fton nxënësin të vizatojë 20 grupe dhe të heqë njërin. Në fund jepet 29 × 8 si rast i ri. Nëse nxënësi shkruan vetë 30 × 8 − 8, kemi një provë më të fortë se e ka korrigjuar marrëdhënien.

Le të marrim rastin «816 : 4 = 24». Para ndërhyrjes mësuesi kërkon një vlerësim të madhësisë: 4 × 200 = 800, prandaj herësi duhet të jetë pak mbi 200. Nëse nxënësi e kupton vlerësimin, por vazhdon të shkruajë 24, problemi ka gjasa të jetë te shkrimi i zeros. Nëse nuk e kupton pse herësi duhet të jetë mbi 200, vështirësia mund të jetë më e hershme, te lidhja e pjesëtimit me shumëzimin. Vetëm pas këtij dallimi zgjidhet ndihma e përshtatshme: tabela e vlerës vendore ose modeli me grupe.

Le të marrim rastin «27 : 5 = 4 mbetja 7». Një bisedë me nxënësin mund të tregojë se ai ka numëruar vetëm katër grupe me nga pesë, edhe pse mund të formonte edhe të pestin. Ndërhyrja përdor 27 objekte dhe pyetjen «A mund të bësh edhe një grup të plotë?». Studentët hartojnë

pyetje që nxjerrin në pah dy kushtet e teoremës, jo vetëm i kërkojnë nxënësit ta bëjë pjesëtimin përsëri.

8.5 Një bisedë diagnostikuese e modeluar

Mësuesja: «Ke shkruar 816 : 4 = 24. Sa qindëshe duhet të marrë çdo grup?»

Nxënësi 1: «Dy qindëshe.»

Mësuesja: «Sa vlen shifra 2 te numri 24?»

Nxënësi 1: «Dy dhjetëshe.»

Mësuesja: «Atëherë, a i tregon shkrimi yt dy qindëshet që gjete? Shkruaje rezultatin në tabelën qindëshe, dhjetëshe, njësi.»

Nxënësi 1: «2, 0 dhe 4. Pra 204.»

Mësuesja: «Pse vendose zero te dhjetëshet? Si e kontrollon rezultatin?»

Ky dialog i simuluar e bën të dukshme mospërputhjen ndërmjet asaj që nxënësi ka kuptuar dhe mënyrës si e ka shkruar numrin.

Në një rast tjetër nxënësi mund të thotë: «Nuk e kuptoj pse duhet 204; unë shoh vetëm 2 dhe pastaj 4». Këtu dialogu i mësipërm nuk mjafton. Mësuesi kthehet te ndarja e 8 qindësheve në katër grupe, tregon dhjetëshen që nuk ndahet në katër dhe e këmben me njësi, që të dalin 16 njësi. Kështu shihet pse diagnoza nuk bëhet vetëm nga përgjigjja e gabuar. Vendimi i përgjegjshëm i mësuesit është ta zgjedhë modelin sipas njohurisë që ka treguar nxënësi.

8.6 Rubrikë e shkurtër për diagnostikimin e gabimeve

Tabela 13. *Rubrikë për diagnostikimin e gabimeve*

Niveli	Interpretimi i punës së nxënësit	Cilësia e ndërhyrjes	Kontrolli në rast të ri
0 – i pamjaftueshëm	E ngatërron gabimin me diagnozën.	Jep vetëm përgjigjen e saktë.	Nuk parashikon kontroll.
1 – fillestar	Gjen një hipotezë të mundshme.	Propozon një ushtrim të ngjashëm.	Kontrollon vetëm rezultatin.
2 – kompetent	Krahason dy hipoteza me pyetje.	Zgjedh një model që i përshtatet gabimit.	Jep detyrë të ngjashme dhe e interpreton.
3 – i avancuar	Ndërton një provë që i dallon hipotezat dhe e justifikon interpretimin.	Kalon nga konkretja te figura dhe simboli sipas nevojës.	Harton një rast të ri me strukturë të ndryshuar.

8.7 Një instrument me dy faza

Një instrument i dobishëm për mësuesin ka dy faza: në të parën nxënësi jep përgjigjen, në të dytën e argumenton ose zgjedh arsyen që e mbështet. Për shumëzimin mund të pyesim «19 × 8 = ?», me alternativat 152, 160, 168 dhe 144, dhe pastaj «Pse rezultati duhet të jetë më i vogël se 20

× 8?». Përgjigjja 152 me argumentin 20 × 8 − 8 na tregon diçka tjetër nga përgjigjja 152 e zgjedhur me hamendje. Përgjigjja 168 me arsyetimin 20 × 8 + 8 sugjeron se kompensimi është kthyer në drejtim të gabuar.

Për pjesëtimin mund të pyesim «816 : 4 = ?», me alternativat 24, 204, 206 dhe 240, dhe pastaj «Çfarë tregon zeroja te herësi?». Nëse nxënësi zgjedh 204 dhe thotë vetëm «sepse kështu bëhet algoritmi», kjo mund të tregojë se e njeh procedurën, por nuk e provon. Zgjedhja e një alternative mund të vijë edhe nga njohja e formës së rezultatit; për zotërimin procedural na duhet që nxënësi ta kryejë vetë algoritmin në një rast të ri, si 824 : 4. Edhe një zgjidhje e saktë e tillë nuk tregon ende shpjegimin me vlerë vendore; këtë e provon pyetja «Sa dhjetëshe merr çdo grup?». Në shënimet e mësuesit regjistrohen përgjigjja dhe argumenti, jo vetëm alternativa e zgjedhur.

Një instrument i tretë synon varësitë. Jepet 23 : 5, që jep 4 dhe mbetjen 3, dhe kërkohet rezultati për 46 : 10. Alternativa «4 me mbetje 6» është e saktë; «4 me mbetje 3» tregon se nxënësi mund ta ketë ruajtur edhe mbetjen. Për ta dalluar gabimin nga hamendja, mësuesi kërkon kontrollin 46 = 10 × 4 + 6. Nëse nxënësi shkruan 10 × 4 + 3 = 43, mospërputhja numerike bëhet nisma për të menduar përsëri. Ideja matematike është se kur të dy përbërësit shumëzohen me të njëjtin numër, herësi i plotë ruhet, ndërsa mbetja shumëzohet me atë numër.

Vlerësimi formues nuk duhet t'i kthejë gabimet në etiketa të përhershme për nxënësit. Rezultatet ndryshojnë sipas formulimit, paraqitjes dhe njohurive të mëparshme; ato përdoren për të vendosur çfarë do të kërkojmë në detyrën e radhës. Një klasë ku shumica e nxënësve argumenton me shumëzim, por e humbet ende zeron në herës, përfiton nga krahasimi i dy mënyrave të shkrimit të algoritmit dhe nga tabela e vlerës vendore. Një klasë ku nxënësit nuk e kuptojnë pyetjen «sa grupe?» ka nevojë të kthehet te kuptimi i pjesëtimit, jo vetëm te më shumë ushtrime me shifra.

8.8 Si zgjedhim ndërhyrjen: çfarë rekomandojnë udhëzuesit

Udhëzuesi i WWC (Fuchs et al., 2021) rekomandon mësimdhënie sistematike, gjuhë matematike të qartë dhe paraqitje të zgjedhura me kujdes, ku mësuesi i lidh shprehimisht objektet, vizatimin dhe shkrimin me simbole. Për shembull, një vizatim i 8 qindësheve të ndara në 4 grupe ka vlerë vetëm kur nxënësi e lidh me shifrën 2 te vendi i qindësheve në herësin 204. Paraqitja nuk e zëvendëson mësimdhënien; ajo e bën të dukshme strukturën që mësuesi do të shpjegojë. Një sekuencë mund të përfshijë demonstrim të qartë, ushtrim të drejtuar, shpjegime nga nxënësit dhe punë të pavarur, sipas nevojave që dalin.

EEF (2017) thekson përdorimin e vlerësimit për të ndërtuar mbi njohuritë që kanë nxënësit, zgjedhjen e paraqitjeve dhe lidhjet ndërmjet njohurive. Kjo nuk është një formulë e vetme për çdo shkollë. Për nxënësin që e mban mend procedurën, por nuk e shpjegon vlerën vendore, mësuesi e lidh shkrimin me dhjetëshet dhe qindëshet; për nxënësin që i ka të qarta modelet, por gabon te faktet bazë, duhet edhe ushtrim i organizuar i fakteve. Pengesat konceptuale,

procedurale dhe gjuhësore duhen dalluar, pa ia vënë automatikisht çdo gabim një mungese të përgjithshme «aftësie për matematikë».

Rishikimi sistematik i Gervasoni et al. (2026) përshkruan 38 studime për ndërhyrje me grupe të vogla, për nxënës që kanë vështirësi në matematikë; në to shfaqen shpesh paraqitjet, rrjedhshmëria në llogaritje dhe mësimdhënia e drejtpërdrejtë. Ky përfundim nuk na lejon të themi se çdo kombinim i këtyre praktikave është më i miri për çdo nxënës, sepse studimet ndryshojnë në kontekst, përmbajtje dhe mënyrë zbatimi. Në një tekst universitar duhet thënë edhe ku mbarojnë provat, jo vetëm përmendur një burim i ri. Studentët duhet të mësojnë ta lexojnë literaturën me këtë kujdes.

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Një gabim i vetëm nuk mjafton për diagnozë; mësuesi formulon hipoteza dhe kërkon prova që i dallojnë.
- Vlerësimi i madhësisë së rezultatit është kontrolli më i shpejtë për zeron e humbur në herës.
- Instrumentet me dy faza ndihmojnë të dallohet përgjigjja e saktë e argumentuar nga përgjigjja e saktë e rastësishme; asnjë përgjigje e vetme nuk mjafton për të gjitha dimensionet e kompetencës.
- Rekomandimet e udhëzuesve janë orientim, jo recetë; ndërhyrja zgjidhet sipas asaj që ka treguar nxënësi.

9. Hartimi i mësimit: nga teoria te klasa

NË KËTË KAPITULL

- Një sekuencë e shkurtër: «Sa mënyra ka për 18 × 6?»
- Një sekuencë e shkurtër: «Ku humbi zeroja?»
- Diferencimi dhe mbështetja e nxënësve

9.1 Një sekuencë e shkurtër: «Sa mënyra ka për 18 × 6?»

Qëllimi: nxënësi argumenton të paktën dy strategji të shumëzimit me gojë dhe i lidh me vetitë e veprimeve. *Faza 1 (2 min):* jepet 18 × 6 pa asnjë udhëzim për procedurën. *Faza 2 (3 min):* nxënësit punojnë vetë dhe pastaj në çift. *Faza 3 (5 min):* mësuesi zgjedh tri strategji për t'u paraqitur: 10 × 6 + 8 × 6; 20 × 6 − 2 × 6; 9 × 12. *Faza 4 (3 min):* klasa diskuton cilët hapa janë të barasvlershëm dhe pse. *Faza 5 (2 min):* një detyrë e re, 19 × 6, shërben si vlerësim i menjëhershëm.

Pyetjet kanë funksione të ndryshme: «Çfarë tregon 8 te 18?» (kuptimi); «Pse duhet hequr 2 × 6 dhe jo 2?» (justifikimi); «A funksionon kjo mënyrë te 17 × 6?» (rast i ri); «Cila zgjidhje të duket më e përshtatshme dhe pse?» (reflektimi). Mësuesi vlerëson cilësinë e arsyetimit, jo vetëm nëse përgjigjet përputhen.

9.2 Një sekuencë e shkurtër: «Ku humbi zeroja?»

Qëllimi: nxënësi e lidh zeron në herës me vendin e dhjetësheve. Mësuesi tregon dy zgjidhje të 816 : 4, njëra 204 dhe tjetra 24, pa thënë kush i ka bërë. Fillimisht nxënësit parashikojnë: a duhet të jetë rezultati më shumë se 200 apo më pak se 100? Meqë 4 × 200 = 800, herësi duhet të jetë të paktën 200. Pastaj përdoret tabela me rendet e qindësheve, dhjetësheve dhe njësive, si dhe kontrolli me shumëzim. Rasti mbyllet kur nxënësi shpjegon me fjalët e veta pse një dhjetëshe e vetme nuk mjafton për t'u dhënë nga një dhjetëshe të katër grupeve.

9.3 Diferencimi dhe mbështetja e nxënësve

Diferencimi nuk do të thotë që një grup merr vetëm llogaritje të lehta dhe një tjetër vetëm të vështira. Të gjithë nxënësit mund të punojnë me të njëjtën ide, për shembull ruajtjen e prodhimit, me shkallë të ndryshme ndihme. Njëri përdor materiale konkrete për 12 × 4 = 6 × 8, një tjetër përdor modelin drejtkëndor, ndërsa një i tretë argumenton përgjithësimin

$$(2 \times a) \times (b : 2) = a \times b.$$

Të tre punojnë me strukturën, por e shprehin në nivele të ndryshme abstraksioni.

Për nxënësit që kanë vështirësi, udhëzuesi i WWC (Fuchs et al., 2021) mbështet mësimdhënien sistematike, gjuhën e qartë matematike, paraqitjet e zgjedhura me kujdes dhe mësimin e qëllimshëm të zgjidhjes së problemeve me tekst. Kjo kërkon ndihmë të shkallëzuar, jo ulje të pritshmërive për arsyetimin. Vlerësimi diagnostik shoqëron dhe drejton ndërhyrjen.

9.3.1 Hartimi i një ore 45-minutëshe: nga 936 : 4 te 816 : 4

Qëllimi i kësaj ore nuk është që çdo nxënës të bëjë sa më shumë pjesëtime, por të shpjegojë rolin e vlerës vendore në ndërtimin e herësit. Mësuesi nis me një problem: «936 lapsa do të vendosen në katër kuti të mëdha, njëlloj në secilën. Sa lapsa merr çdo kuti?» Nxënësit parashikojnë madhësinë e përgjigjes, duke vënë re se

$$4 \times 200 = 800 \quad \text{dhe} \quad 4 \times 250 = 1\,000.$$

Kështu përgjigjja pritet ndërmjet 200 dhe 250, dhe kemi një mjet kontrolli për pjesën tjetër të orës.

Në fazën e dytë mësuesi përdor kartela qindëshe, dhjetëshe dhe njësi, ose një vizatim të thjeshtë të tyre. Nga nëntë qindëshet çdo grup merr dy, dhe mbetet një qindëshe. Ajo kthehet në dhjetë dhjetëshe, që bashkë me tri dhjetëshet bëhen trembëdhjetë dhjetëshe; çdo grup merr tri dhjetëshe dhe mbetet një. Dhjetëshja bëhet dhjetë njësi, që bashkë me gjashtë njësitë bëhen gjashtëmbëdhjetë, dhe çdo grup merr katër. Rezultati 234 i lidh grupet konkrete me tri rendet e vlerës vendore.

Në fazën e tretë paraqiten njëkohësisht metoda me herës të pjesshëm dhe algoritmi standard. Mësuesi kërkon që nxënësit të gjejnë prodhimet 800, 120 dhe 16 brenda hapave të algoritmit; studentët parashikojnë cilat pyetje ndihmojnë që kuptimi të mos humbasë. Mësuesi pyet: «Pse 2 tregon 200?», «Pse një qindëshe që mbeti mund të merret si dhjetë dhjetëshe?», «Pse zeroja si mbetje nuk është njësoj si zeroja brenda herësit?».

Në fazën e katërt jepet 816 : 4. Nxënësit nuk e kopjojnë algoritmin; ata parashikojnë ku do të dalë zeroja në herës. Pasi ndahen tetë qindëshet, mbetet një dhjetëshe që nuk ndahet në katër grupe, ndaj në herës shkruhet zero te dhjetëshet dhe pastaj katër njësi. Rezultati 204 kontrollohet me 4 × 204 = 816. Bileta e daljes kërkon 618 : 6 dhe shpjegimin e zeros në herës. Presim 103. Përgjigjja 13 sugjeron se nxënësi nuk e lidh ende hapat e algoritmit me rendet e herësit; në orën pasuese kjo hipotezë kontrollohet me një pyetje gojore dhe me një rast të ngjashëm, si 824 : 8.

9.3.2 Regjistrimi i vëzhgimit gjatë orës

Tabela 14. *Plani i orës dhe vëzhgimi formues*

Minutat	Veprimtaria në klasë	Pyetja kryesore	Çfarë duam të shohim
0–7	Problemi dhe vlerësimi i madhësisë	A është herësi afër 20 apo afër 200?	Lidhjen e pjesëtimit me shumëzimin
7–18	Ndarja me qindëshe, dhjetëshe, njësi	Çfarë bëhet me dhjetëshen që mbeti?	Këmbimin e saktë
18–28	Herësit e pjesshëm dhe algoritmi	Ku është prodhimi 120 në shkrim?	Lidhjen e dy shkrimeve
28–37	816 : 4 dhe zeroja në herës	Çfarë tregon shifra 0?	Vlerën vendore
37–43	Kontrolli dhe diskutimi	Si e vërteton rezultatin?	Barazimin a = b × q + r
43–45	Bileta e daljes: 618 : 6	Pse nuk është 13?	Zbatimin në rast të ri

9.3.3 Diferencimi sipas asaj që tregojnë nxënësit

Nxënësi që nuk e kupton ndarjen e qindësheve ka nevojë për materiale ose për një vizatim ku dhjetë njësi këmbehen me një dhjetëshe. Nxënësi që e kupton ndarjen, por e humbet zeron në herës, ka nevojë për një tabelë të qartë me vendet e qindësheve, dhjetësheve dhe njësive. Të dy nuk ndihmohen nga e njëjta ndërhyrje. Nxënësi që e zotëron algoritmin mund të marrë një detyrë më të gjerë: «Gjej një numër treshifror që, i pjesëtuar me 6, të japë herës me zero në mes dhe mbetje 2», duke argumentuar kushtet.

Paraqitja e dobishme nuk duhet të bëhet detyrim formal për çdo nxënës. Ajo që tregon nxënësi vendos kur duhet rikthyer modeli dhe kur mund të punohet më shumë me simbolet. Siç thamë në seksionin 8.8, provat nga ndërhyrjet me grupe të vogla nuk duhen lexuar si provë se ka një procedurë të vetme që është më e mira për çdo klasë.

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Çdo sekuencë nis nga një qëllim i qartë dhe mbyllet me një detyrë që tregon nëse qëllimi u arrit.
- Pyetjet e mësuesit kanë funksione të ndryshme: kuptim, justifikim, rast i ri dhe reflektim.
- Diferencimi i jep të gjithë nxënësve të njëjtën ide, me shkallë të ndryshme ndihme.
- Ora për pjesëtimin me shkrim lidh vlerësimin e madhësisë, materialet, herësit e pjesshëm dhe algoritmin.

10. Punëtoria universitare: detyra me analizë dhe përgjigje orientuese

NË KËTË KAPITULL

- Detyra 1: katër strategji për të njëjtin prodhim
- Detyra 2: vërtetoni, mos u mjaftoni me shembuj
- Detyra 3: algoritmi me shkrim dhe zeroja
- Detyra 4: pjesëtimi me mbetje dhe kalimi te shumëzimi
- Detyra 5: pohime për herësin
- Detyra 6: gjurmët e arsyetimit të nxënësit
- Detyra 7: algoritmi para modelit apo modeli para algoritmit?
- Detyra 8: dy pyetje diagnostikuese
- Dymbëdhjetë detyra me zgjidhje dhe interpretim didaktik

10.1 Detyra 1: katër strategji për të njëjtin prodhim

Detyrë. Llogaritni 28 × 25 në të paktën katër mënyra, pa algoritmin me shkrim. *Zgjidhja A:*

$$28 \times (100 : 4) = (28 : 4) \times 100 = 700.$$

Zgjidhja B:

$$(30 - 2) \times 25 = 750 - 50 = 700.$$

Zgjidhja C:

$$(20 + 8) \times 25 = 500 + 200 = 700.$$

Zgjidhja D:

$$28 \times 25 = 14 \times 50 = 7 \times 100 = 700;$$

çdo hap e ruan prodhimin, sepse njërin faktor e përgjysmojmë dhe tjetrin e dyfishojmë. *Diskutim:* Cili model vizual mbështet secilën strategji? A është mënyra A gjithmonë e përshtatshme kur faktori nuk plotëpjesëtohet me 4, si te 27 × 25? Në $\mathbb{N}$ jo; atëherë duhet një rrugë tjetër, ose duhet kaluar te thyesat.

10.2 Detyra 2: vërtetoni, mos u mjaftoni me shembuj

Detyrë. Një student thotë: «Nëse të dy faktorëve u shtojmë 3, prodhimi rritet me 9». Vlerësojeni pohimin. *Përgjigje:*

$$(\mathrm{a} + 3) \times (\mathrm{b} + 3) = \mathrm{a} \times \mathrm{b} + 3 \times \mathrm{a} + 3 \times \mathrm{b} + 9,$$

prandaj ndryshimi është 3 × a + 3 × b + 9, jo 9, përveç rastit

$$a = b = 0.$$

Shembulli 2 × 4 = 8 dhe 5 × 7 = 35 e hedh poshtë pohimin. Një kundërshembull mjafton për të hedhur poshtë një pohim të përgjithshëm; për të vërtetuar një pohim të përgjithshëm duhet një argument matematik.

10.3 Detyra 3: algoritmi me shkrim dhe zeroja

Detyrë. Shpjegoni 824 : 8. *Zgjidhje e arsyetuar:* 8 qindëshe të ndara në 8 grupe japin 1 qindëshe për grup. Kemi 2 dhjetëshe, që nuk mjaftojnë për t'u dhënë nga një dhjetëshe tetë grupeve, ndaj në herës shkruajmë 0 te dhjetëshet; 2 dhjetëshet bëhen 20 njësi, dhe bashkë me 4 njësitë bëhen 24 njësi, që japin 3 njësi për grup. Herësi është 103, mbetja 0; kontrolli: 8 × 103 = 824. Nëse nxënësi shkruan 13, i kërkojmë të thotë çfarë tregon 1 te 13 dhe të llogarisë 8 × 13 = 104.

10.4 Detyra 4: pjesëtimi me mbetje dhe kalimi te shumëzimi

Detyrë. Gjeni q dhe r për 695 : 6 dhe justifikojeni rezultatin. *Përgjigje:*

$$6 \times 115 = 690,$$

prandaj

$$695 = 6 \times 115 + 5.$$

Meqë

$$0 \le 5 < 6,$$

q = 115 dhe r = 5. Mund të nisim me

$$6 \times 100 = 600,$$

pastaj

$$6 \times 15 = 90,$$

gjithsej 690, që të shihet lidhja ndërmjet pjesëtimit dhe shumëzimit. Problemi «695 nxënës udhëtojnë me furgonë me 6 vende» kërkon 116 furgonë, jo thjesht «115 me mbetje 5».

10.5 Detyra 5: pohime për herësin

Shënoni për secilin pohim nëse është i vërtetë, i rremë apo i vërtetë vetëm me kushte. (a) «Kur dyfishohet i pjesëtueshmi, dyfishohet gjithmonë herësi i plotë»: i rremë, siç tregon 14 : 4. (b) «Kur të pjesëtueshmin dhe pjesëtuesin i shumëzojmë me 3, mbetja nuk ndryshon»: i rremë në përgjithësi; mbetja trefishohet. (c) «Për një të pjesëtueshëm të caktuar, kur rritet pjesëtuesi, herësi i plotë nuk rritet»: i vërtetë për pjesëtues pozitivë. (d) «Te pjesëtimi pa mbetje, kur trefishohet vetëm i pjesëtueshmi, trefishohet herësi»: i vërtetë.

10.6 Detyra 6: gjurmët e arsyetimit të nxënësit

Rasti i simuluar. Nxënësi shkruan: «97 × 5 = 100 × 5 − 3 = 497». Mos shkruani vetëm «Gabim». Përgjigjja profesionale përfshin: *çfarë shohim*, nxënësi e ka parë 97-ën si 100 − 3; *hipotezën*, ka zbritur 3 në vend të 3 × 5; *pyetjen verifikuese*, «Nëse heqim tri grupe me nga pesë, sa heqim gjithsej?»; *ndërhyrjen*, vizatimin e 100 grupeve ose shkrimin (100 − 3) × 5; *kontrollin në rast të ri*, 98 × 5 = 490. Rezultati i saktë është 485.

10.7 Detyra 7: algoritmi para modelit apo modeli para algoritmit?

Studentët analizojnë dy skenarë. Në skenarin A mësuesi jep vargun «pjesëto, shumëzo, zbrit, ul shifrën» dhe kërkon 15 ushtrime. Në skenarin B mësuesi nis nga ndarja e 936 objekteve në 4 grupe, përdor herësit e pjesshëm dhe vetëm pastaj shkruan algoritmin në kolonë. Studentët gjejnë anët e forta, kufijtë dhe kushtet e përdorimit të secilit. Përgjigjja e pritshme nuk është një kundërvënie absolute: udhëzimi i qartë për procedurën është i dobishëm, por duhet lidhur vazhdimisht me kuptimin matematik dhe me provat e të nxënit.

10.8 Detyra 8: dy pyetje diagnostikuese

Për 19 × 7 hartoni një pyetje që provon njohjen e vetisë shpërndarëse dhe një tjetër që provon zgjedhjen e strategjisë. *Shembull përgjigjeje:* «Pse (20 − 1) × 7 jep të njëjtin rezultat me 19 × 7?» dhe «Cila mënyrë do të ishte më e përshtatshme për 21 × 7? Pse?» Pyetja e parë vlerëson justifikimin e barasvlerësisë; e dyta kërkon zbatim në rast të ri dhe fleksibilitet.

10.9 Dymbëdhjetë detyra me zgjidhje dhe interpretim didaktik

Provoni fillimisht vetë detyrat e seksionit 10.9.1. Zgjidhjet dhe komentet didaktike jepen më pas, në seksionin 10.9.2.

10.9.1 Detyrat

Detyra A. Llogaritni 75 × 8 në tri mënyra dhe tregoni cilën veti përdor secila.

Detyra B. Një nxënës shkruan 29 × 6 = 30 × 6 + 6 = 186. Gjeni vlerën e saktë, shpjegoni çfarë paraqet 186 dhe formuloni një pyetje diagnostikuese.

Detyra C. Shpjegoni pse 25 × 36 = 900 pa algoritmin me shkrim, duke respektuar marrëveshjen për rolin e faktorëve.

Detyra D. Zgjidhni 735 : 5 me herës të pjesshëm dhe me algoritmin standard, dhe tregoni lidhjen ndërmjet dy procedurave.

Detyra E. Gjeni herësin dhe mbetjen e 209 : 8 dhe kontrolloni kushtin për mbetjen.

Detyra F. Gjeni një kundërshembull për pohimin «Kur dyfishohet i pjesëtueshmi, dyfishohet herësi i plotë» dhe formuloni një pohim të saktë.

Detyra G. Gjeni numra natyrorë a dhe b, me b > 0, të tillë që pjesëtimi a : b të japë herësin 4 dhe mbetjen 3. Çfarë ndodh me herësin dhe mbetjen kur dyfishohen të dy përbërësit? Përshkruani të gjitha zgjidhjet e mundshme.

Detyra H. Për cilët numra natyrorë b pjesëtimi 29 : b jep herësin 4 dhe mbetjen 1? Për cilët b jep herësin 4, pa kusht për mbetjen?

Detyra I. Tregoni pse (a + 2) × b = a × b + 2 × b dhe hartoni një problem me kuptim për këtë barazim.

Detyra J. Pjesëtimi 52 : 6 jep herësin 8 dhe mbetjen 4. Gjeni herësin dhe mbetjen e 104 : 6 dhe shpjegoni pse mbetja nuk dyfishohet.

Detyra K. Një nxënës shkruan 618 : 6 = 13. Analizoni gabimin dhe propozoni një rast të ri për kontroll.

Detyra L. Hartoni dy probleme ku pjesëtimi 29 : 4 çon në përgjigje të ndryshme.

10.9.2 Zgjidhje dhe interpretim didaktik

Detyra A. Tri rrugë janë:

$$75 \times (10 - 2) = 750 - 150 = 600,$$

$$(75 \times 4) \times 2 = 300 \times 2 = 600,$$

$$(75 \times 2) \times 4 = 150 \times 4 = 600.$$

E para përdor shpërndarjen ndaj zbritjes; e dyta dhe e treta përdorin zbërthimin 8 = 4 × 2 dhe vetinë shoqëruese. Mësuesi pyet nëse nxënësi e di pse mund t'i grupojë faktorët ndryshe. Krahasimi synon vetinë shoqëruese, jo vetëm rezultatin 600.

Detyra B. Vlera e saktë është

$$29 \times 6 = (30 - 1) \times 6 = 180 - 6 = 174.$$

Shkrimi 186 paraqet 31 grupe me nga gjashtë, jo 29. Pyetja «A janë 29 grupe më pak apo më shumë se 30?» e kthen vëmendjen te struktura. Si rast i ri, nxënësi shpjegon 49 × 7 = 350 − 7 = 343.

Detyra C. Sipas marrëveshjes, 25 × 36 do të thotë 25 grupe me nga 36. Që të grupojmë kopjet e 25-ës me nga katër, ndërrojmë fillimisht rolet e faktorëve me vetinë ndërruese:

$$25 \times 36 = 36 \times 25.$$

Pastaj, meqë 36 = 9 × 4, nga vetia shoqëruese kemi

$$36 \times 25 = (9 \times 4) \times 25 = 9 \times (4 \times 25) = 9 \times 100 = 900.$$

Modeli i ri, 36 grupe me nga 25, organizohet në nëntë grupe me nga katër grupe fillestare. Mësuesi pyet «Pse kemi të drejtë t'i ndërrojmë faktorët?» dhe «Cilat grupe i bashkuam?», për të parë nëse nxënësi e dallon ndërrimin e roleve nga ruajtja e vlerës.

Detyra D. Me herës të pjesshëm heqim njëri pas tjetrit 5 × 100, 5 × 40 dhe 5 × 7:

$$735 - 500 = 235, \quad 235 - 200 = 35, \quad 35 - 35 = 0,$$

prandaj herësi është 100 + 40 + 7 = 147. Me algoritmin standard, 7 qindëshe japin një qindëshe për grup dhe mbeten 2; 23 dhjetëshe japin katër dhjetëshe dhe mbeten 3; 35 njësi japin shtatë njësi. Kontrolli: 5 × 147 = 735. Dy procedurat shkruajnë të njëjtin zbërthim të 147-ës sipas vlerës vendore.

Detyra E. Meqë 8 × 26 = 208, kemi

$$209 = 8 \times 26 + 1, \quad 0 \le 1 < 8,$$

pra herësi është 26 dhe mbetja 1. Mund të nisim edhe nga 8 × 25 = 200: nga 200 te 209 kemi nëntë njësi, që formojnë një grup të plotë dhe lënë një mbetje. Studentët e lidhin strategjinë me teoremën e pjesëtimit.

Detyra F. Pjesëtimi 14 : 4 jep 3 dhe mbetjen 2, por 28 : 4 jep 7 pa mbetje, jo 6. Pohimi i saktë del nga teorema e pjesëtimit: nëse a = b × q + r, me 0 ≤ r < b, atëherë

$$2 \times \mathrm{a} = \mathrm{b} \times (2 \times \mathrm{q}) + 2 \times \mathrm{r}.$$

Kur 2 × r < b, herësi është 2 × q dhe mbetja 2 × r; kur 2 × r ≥ b, formohet edhe një grup dhe herësi është 2 × q + 1, me mbetje 2 × r − b.

Detyra G. Nga kushti duhet a = 4 × b + 3 dhe 3 < b, pra çdo b ≥ 4 jep një zgjidhje; për shembull, b = 5 dhe a = 23. Kur dyfishohen të dy përbërësit, sipas seksionit 7.2 herësi mbetet 4 dhe mbetja bëhet 6: 46 = 10 × 4 + 6. Kjo detyrë kërkon përgjithësim, jo vetëm llogaritje.

Detyra H. Nga

$$29 = 4 \times \mathrm{b} + 1$$

marrim b = 7, dhe kushti 0 ≤ 1 < 7 plotësohet. Pra ka vetëm një vlerë, b = 7. Pa kusht për mbetjen, sipas karakterizimit (5.2) kërkojmë b me

$$4 \times \mathrm{b} \le 29 < 5 \times \mathrm{b},$$

dhe dalin b = 6 dhe b = 7. Varianti tregon sa informacion na jep mbetja.

Detyra I. Barazimi del nga vetia shpërndarëse. Problem me kuptim: «Kemi a kuti me nga b lapsa dhe shtojmë edhe dy kuti me nga b lapsa. Sa lapsa kemi gjithsej?» Lapsat shtohen me 2 × b. Studentët kontrollojnë që problemi të ketë vërtet dy kuti të reja dhe jo vetëm dy lapsa.

Detyra J. Kemi

$$104 = 6 \times 17 + 2,$$

pra herësi është 17 dhe mbetja 2. Mbetja nuk dyfishohet, sepse 2 × 4 = 8 ≥ 6 dhe me të formohet edhe një grup i plotë. Studentët e dallojnë këtë rast nga dyfishimi i njëkohshëm i të dy përbërësve.

Detyra K. Kontrolli 6 × 13 = 78 tregon se rezultati është shumë larg 618-ës. Meqë

$$618 = 6 \times 100 + 18,$$

herësi është 103. Një model me qindëshe, dhjetëshe dhe njësi e shpjegon zeron te dhjetëshet. Rasti i ri 642 : 6 = 107 tregon nëse nxënësi e ka kuptuar vlerën vendore.

Detyra L. Kemi 29 = 4 × 7 + 1. Në problemin «29 objekte vendosen në grupe me nga katër; sa grupe të plota formohen?» përgjigjja është shtatë grupe, dhe mbetet një objekt. Në problemin «29 veta udhëtojnë me makina me nga katër vende; sa makina duhen?» përgjigjja është tetë makina. Barazimi është i njëjtë në të dyja. Mësuesi kontrollon nëse studenti e dallon pyetjen e problemit nga rezultati i llogaritjes.

11. Vlerësimi përmbyllës dhe vetëvlerësimi

NË KËTË KAPITULL

- Kriteret e vlerësimit të punës së studentëve
- Katër situata për seminar
- Test përmbledhës (30 minuta, 20 pikë)
- Çelësi orientues i testit
- Rubrika e punës së studentit

11.1 Kriteret e vlerësimit të punës së studentëve

Te detyrat matematike, një rezultat i saktë pa justifikim nuk tregon kompetencë të plotë profesionale. Vlerësimi kontrollon katër gjëra: (i) saktësinë e barazimeve; (ii) kushtet e vlefshmërisë së formulave, përfshirë pjesëtuesin pozitiv dhe mbetjen më të vogël se pjesëtuesi; (iii) lidhjen e argumentit me një paraqitje që mund të përdoret në klasat fillore; (iv) zgjedhjen e një pyetjeje diagnostikuese që provon nëse nxënësi ka kuptuar. Një student mund të ketë argument matematik shumë të mirë, por shpjegim që nuk u përshtatet fëmijëve; kjo mangësi duhet thënë qartë dhe nuk duhet të fshihet pas një rezultati të saktë.

Te mikromësimdhënia, studenti paraqet një problem të qartë, parashikon dy përgjigje të mundshme të nxënësve, përdor një paraqitje të menduar, tregon cila veti justifikon procedurën dhe mbyll me një pyetje për një rast të ri. Niveli më i lartë kërkon pyetje që nxjerrin në pah arsyetimin e nxënësit, jo vetëm përsëritjen e një rregulli. Vlerësimi mbështetet te ajo që tregon studenti, jo te përshtypja e përgjithshme për mënyrën si flet.

11.2 Katër situata për seminar

Situata 1. Një mësues shkruan në dërrasë

$$45 \times 18 = 45 \times (20 - 2) = 900 - 90 = 810.$$

Pastaj u kërkon nxënësve të zgjedhin ndërmjet

$$45 \times 18 = 45 \times 9 \times 2 \quad \text{dhe} \quad 45 \times 18 = 45 \times (10 + 8).$$

Studenti shpjegon pse të tria shkrimet japin të njëjtin rezultat, cilat veti i justifikojnë dhe cili shkrim i përshtatet më mirë një nxënësi që shumëzon mirë me 10, por nuk e di mirë tabelën e 9-ës. Shkrimi i parë përdor shpërndarjen ndaj zbritjes, i dyti zbërthimin $18 = 9 \times 2$ dhe shoqërueshmërinë, i treti shpërndarjen ndaj mbledhjes. Për këtë nxënës rruga $45 \times (20 - 2)$ mund të jetë më e lehtë, sepse kërkon 45×20 dhe dyfishin e 45-ës, ndërsa $45 \times 9 \times 2$ kërkon një fakt që ai nuk e di mirë. Vendimi didaktik argumentohet me njohuritë e nxënësit, jo me preferencën e mësuesit.

Situata 2. Nxënësi A shkruan «925 : 5 = 185». Nxënësi B përdor herësit e pjesshëm:

$$925 - 500 = 425; \quad 425 - 400 = 25; \quad 25 - 25 = 0;$$

herësi

$$100 + 80 + 5 = 185.$$

Nxënësi C shkruan «900 : 5 + 25 : 5 = 180 + 5 = 185». Studentët analizojnë ku ngjajnë matematikisht. Mënyra B heq 5 × (100 + 80 + 5); mënyra C e pjesëton një shumë duke pjesëtuar të mbledhshmit, gjë që vlen sepse të dy plotëpjesëtohen me 5. Algoritmi standard e shkruan shkurt organizimin sipas vlerës vendore. Nuk është e saktë të thuhet se vetëm mënyra A është «matematikë e vërtetë» dhe të tjerat «marifete». Mësuesi zgjedh një moment ku nxënësit i lidhin strategjitë, jo vetëm i tregojnë njëra pas tjetrës.

Situata 3. Dy fëmijë zgjidhin 35 : 6. Fëmija A shkruan 5 me mbetje 5; fëmija B shkruan 6 me mbetje −1. Studentët gjykojnë cili shkrim është i vlefshëm sipas teoremës së pjesëtimit me mbetje. I pari është i saktë, sepse

$$35 = 6 \times 5 + 5 \ \text{ dhe } \ 0 \le 5 < 6.$$

I dyti e plotëson barazimin 35 = 6 × 6 − 1, por mbetja −1 nuk i plotëson kushtet e pjesëtimit të numrave natyrorë. Nuk mjafton të thuhet «nuk kemi numra negativë». Arsyeja kryesore është kushti

$$0 \le \mathrm{r} < \mathrm{b},$$

i cili është i barasvlershëm me

$$6 \times \mathrm{q} \le 35 < 6 \times (\mathrm{q} + 1):$$

ai garanton që q të jetë numri më i madh i grupeve të plota me nga gjashtë që formohen nga 35, pra q = 5, sepse 30 ≤ 35 < 36.

Situata 4. Një nxënës thotë: «Nëse 84 : 7 = 12, atëherë 168 : 14 = 12 dhe 168 : 7 = 24». Të dy përfundimet janë të sakta, por për arsye të ndryshme. Te i pari ndryshojnë njëkohësisht i pjesëtueshmi dhe pjesëtuesi:

$$(2 \times \mathrm{a}) : (2 \times \mathrm{b}) = \mathrm{a} : \mathrm{b},$$

për pjesëtim pa mbetje dhe b > 0. Te i dyti ndryshon vetëm i pjesëtueshmi:

$$(2 \times \mathrm{a}) : \mathrm{b} = 2 \times (\mathrm{a} : \mathrm{b}),$$

sepse a është shumëfish i b-së. Studentët shqyrtojnë nëse këto rregulla vlejnë pa ndryshim kur ka mbetje. Kur

$$\mathrm{a} = \mathrm{b} \times \mathrm{q} + \mathrm{r}$$

me r > 0, herësi i plotë i 2 × a me b mund të jetë 2 × q ose 2 × q + 1, sipas r-së. Për shembull, 35 : 6 jep 5 me mbetje 5, ndërsa 70 : 6 jep 11 me mbetje 4, jo 10 me mbetje 10. Kjo situatë tregon dallimin ndërmjet arsyetimit për pjesëtimin pa mbetje dhe atij për pjesëtimin me mbetje.

11.3 Test përmbledhës (30 minuta, 20 pikë)

Testi kërkon llogaritje, paraqitje, vërtetim dhe analizë didaktike. Për këtë arsye koha e parashikuar është 30 minuta; në një version 15-minutësh mbahen vetëm detyrat 2 dhe 4. Koha orientuese për secilën detyrë jepet në kllapa.

1) Shpjegoni me dy paraqitje të ndryshme pse 23 × 6 = 138. (4 pikë; 6 minuta)

2) Zgjidhni 756 : 6 me algoritmin standard, duke shpjeguar çfarë tregon secila shifër e herësit, dhe kontrolloni rezultatin. (5 pikë; 7 minuta)

3) Le të jenë a, q, r numra të plotë jonegativë dhe b, k numra të plotë pozitivë, me

$$a = b \times q + r \quad \text{dhe} \quad 0 \le r < b.$$

Vërtetoni se

$$k \times a = (k \times b) \times q + k \times r$$

dhe se

$$0 \le k \times r < k \times b.$$

Çfarë përfundoni për herësin dhe mbetjen e pjesëtimit të k × a me k × b? (5 pikë; 8 minuta)

4) Një nxënës shkruan

$$47 \times 8 = 40 \times 8 + 7 = 327.$$

Formuloni dy hipoteza për shkakun, një pyetje që i dallon dhe një ndërhyrje. (6 pikë; 9 minuta)

11.4 Çelësi orientues i testit

1) Paraqitja e parë: rrjeta me 23 rreshta me nga 6 kuti ndahet në 20 rreshta dhe 3 rreshta, pra

$$23 \times 6 = 20 \times 6 + 3 \times 6 = 120 + 18 = 138.$$

Paraqitja e dytë: me kartela dhjetore, 23 = 2 dhjetëshe e 3 njësi; gjashtë herë 2 dhjetëshe japin 12 dhjetëshe, gjashtë herë 3 njësi japin 18 njësi, dhe 12 dhjetëshe e 18 njësi bëjnë 138. *Pikët:* 2 për secilën paraqitje që lidhet saktë me barazimin; 1 pikë kur paraqitja është e saktë, por lidhja me numrat nuk thuhet.

2) 7 qindëshe : 6 japin 1 qindëshe për grup dhe mbetet 1 qindëshe; ajo këmbehet me 10 dhjetëshe dhe, bashkë me 5 dhjetëshet, bëhen 15 dhjetëshe, që japin 2 dhjetëshe për grup dhe mbeten 3; këto bëhen 30 njësi dhe, bashkë me 6 njësitë, japin 36 njësi, pra 6 njësi për grup. Herësi është 126: shifrat tregojnë 100, 20 dhe 6. Kontrolli: 6 × 126 = 756 dhe mbetja 0 < 6. *Pikët:* 2 për algoritmin, 2 për kuptimin e shifrave, 1 për kontrollin.

3) Nga shpërndarja dhe shoqërueshmëria,

$$k \times a = k \times (b \times q + r) = (k \times b) \times q + k \times r.$$

Meqë $k \geq 1$ dhe $r \geq 0$, kemi $k \times r \geq 0$; nga $r < b$ dhe vetia e monotonisë del $k \times r < k \times b$, pra

$$0 \leq k \times r < k \times b.$$

Sipas pohimit 5.1, herësi dhe mbetja janë të vetëm, prandaj pjesëtimi i $k \times a$ me $k \times b$ ka herësin q dhe mbetjen $k \times r$. Shumëzimi i të dy përbërësve me të njëjtin numër pozitiv e ruan herësin dhe e shumëzon mbetjen me atë numër. *Pikët:* 2 për barazimin, 2 për mosbarazimin e justifikuar, 1 për përfundimin me unicitetin.

4) Përgjigjja e saktë është 376 = 320 + 56. Hipoteza e parë: nxënësi e ka zbërthyer 47-ën, por pjesën 7 e ka shtuar pa e shumëzuar me 8, sepse nuk e sheh si 7 grupe me nga 8. Hipoteza e dytë: e ka kuptuar zbërthimin, por ka harruar një hap gjatë shkrimit. Pyetja që i dallon: «Sa grupe me nga 8 tregon shifra 7? Sa është 7 × 8?», e ndjekur nga një rast i ri, si 36 × 7. Nëse nxënësi e korrigjon vetë hapin te pyetja, por e përsërit gabimin te rasti i ri, hipoteza e parë bëhet më e besueshme. Ndërhyrja: modeli i syprinës me dy pjesë, 40 × 8 dhe 7 × 8, ku nxënësi emërton çdo pjesë me barazimin përkatës. *Pikët:* 2 për hipotezat, 2 për pyetjen dhe rastin e ri, 2 për ndërhyrjen e lidhur me hipotezën.

11.5 Rubrika e punës së studentit

Tabela 15. *Rubrika analitike e punës së studentit (0–2 pikë për dimension)*

Dimensioni	0 – i pamjaftueshëm	1 – pjesërisht	2 – plotësisht
Saktësia matematikore	Rregull i gabuar ose rezultat pa kontroll	Llogaritje e saktë, argument i paplotë	Kushtet, vërtetimi dhe kontrolli
Paraqitjet	Mungojnë	Një paraqitje pa lidhje	Dy paraqitje të lidhura
Analiza didaktike	Vetëm korrigjim	Hipotezë pa provë	Hipotezë, pyetje dhe ndërhyrje
Gjuha profesionale	Terma të pasaktë	Terminologji kryesisht e saktë	Gjuhë e saktë dhe e përshtatur me nivelin

Rubrika e Tabelës 15 vlerëson produktin e punës së studentit në katër dimensione, prandaj përdor tri nivele, 0–2, që dallohen lehtë gjatë korrigjimit. Rubrika e Tabelës 13 përshkruan zhvillimin e një aftësie të vetme profesionale, diagnostikimin, dhe për këtë arsye ka katër nivele, 0–3, ku niveli 3 kërkon edhe hartimin e një rasti të ri. Dy shkallët nuk mblidhen; secila përdoret për qëllimin e vet.

Vetëvlerësim. A mund ta shpjegoj jo vetëm si, por edhe pse për çdo hap të pjesëtimit? A mund të gjej një kundërshembull kur një rregull nuk vlen? A mund ta dalloj diagnozën e një nxënësi nga një supozim i paverifikuar? A mund të formuloj një pyetje që më tregon nëse nxënësi ka kuptuar?

12. Përmbledhje dhe punë e pavarur

NË KËTË KAPITULL

– Sinteza e leksionit
– Punë individuale pas leksionit
– Çfarë e dallon ekspertizën e mësuesit

12.1 Sinteza e leksionit

Shumëzimi me gojë nuk është koleksion «marifetesh»; është përdorimi fleksibël i vetive të shumëzimit dhe i ndërtimit të numrave. Pjesëtimi me shkrim nuk është varg shenjash në kolonë; është organizimi i shkurtër i pjesëtimit me mbetje sipas vlerës vendore. Varësitë e prodhimit dhe të herësit nuk janë rregulla me fjalë pa kushte; ato shprehen me barazime që vërtetohen dhe me përjashtime që mund të provohen. Kompetenca profesionale e mësuesit duket kur këto tri nivele, struktura, paraqitja dhe argumentimi, bëhen pjesë e mësimit dhe e vlerësimit.

12.2 Punë individuale pas leksionit

- Hartoni një fletë pune me 6 detyra për shumëzimin me gojë, ku secila nxit një strategji të caktuar; parashikoni dy përgjigje të mundshme të nxënësve dhe diskutoni sa të përshtatshme janë.
- Shkruani një analizë prej 500–700 fjalësh për gabimin 618 : 6 = 13: hipotezën, dy pyetje diagnostikuese, modelin vizual dhe kontrollin në rast të ri.
- Përgatitni një mikromësimdhënie 10-minutëshe për 29 : 6, duke e dalluar kuptimin e mbetjes në problem nga përkufizimi formal.
- Lexoni NCTM (2023) dhe udhëzuesin e WWC (Fuchs et al., 2021); përmblidhni në 250–300 fjalë nga një vendim didaktik që mbështetet në secilin dokument.

12.3 Çfarë e dallon ekspertizën e mësuesit

Pas këtij leksioni, kompetenca profesionale nuk provohet vetëm me aftësinë për të shumëzuar dhe pjesëtuar. Studenti duhet të ndërtojë një zinxhir arsyetimi: nis nga struktura e veprimit, kalon te paraqitjet dhe vetitë, shpjegon procedurën, parashikon vështirësitë dhe propozon prova diagnostikuese për të vendosur nëse nxënësi ka kuptuar. Ky zinxhir e tregon njohurinë matematike për mësimdhënie shumë më mirë se paraqitja e algoritmit pa interpretim.

Lidhja ndërmjet kuptimit konceptual dhe rrjedhshmërisë procedurale zhvillohet në të dy drejtimet. Modeli me vizatim ndihmon të ndërtohet procedura, ndërsa ushtrimi i një procedure të shpjeguar sjell vëzhgime të reja për ndërtimin e numrave. Por paraqitja nuk garanton

kuptimin nëse nxënësi vetëm e kopjon figurën, dhe përdorimi i algoritmit standard nuk tregon mungesë kuptimi nëse nxënësi di të argumentojë pse funksionon. Mësuesi kërkon prova të qarta para se të nxjerrë përfundime.

Një kriter i fundit për vetëvlerësim: «A mund ta shpjegoj të njëjtin veprim në tri gjuhë që përputhen: si problem me kuptim, si model i vizatuar dhe si barazim matematik?» Për 936 : 4 të tria duhet të japin 234, por jo duke përsëritur të njëjtin rregull në tri forma. Problemi paraqet ndarjen, vizatimi tregon këmbimin dhe barazimi 936 = 4 × 234 shpjegon kontrollin. Kur këto shpjegime mbështesin njëri-tjetrin, algoritmi ka kuptim matematik dhe vlerë didaktike.

LEKSIONI 5 · KAPITULLI 13

13. Bankë problemesh për studim të pavarur

1. Shpjegoni pse 99 × 8 = 792, duke përdorur dy barazime të ndryshme.

2. Ndërtoni dy probleme me 35 : 6, që jep 5 dhe mbetjen 5, dhe shpjegoni kuptimin e mbetjes në secilin.

3. Korrigjoni 852 : 4 = 23 dhe thoni cila shifër mungon në herës. Shpjegoni pse ky rast ndryshon nga 816 : 4 = 24.

4. Shpjegoni pse në përgjithësi (a + 1) × (b + 1) ≠ a × b + 1.

5. Gjeni herësin dhe mbetjen te 207 : 8 dhe kontrolloni kushtin për mbetjen.

6. Gjeni një kundërshembull për pohimin «Kur dyfishohet i pjesëtueshmi, dyfishohet herësi i plotë».

7. Llogaritni 18 × 25 duke i grupuar faktorët ndryshe dhe shpjegoni çfarë kushtesh kërkon zgjidhja.

8. Shpjegoni pse 63 : 7 = 9 dhe 126 : 14 = 9 janë shembuj të ruajtjes së herësit.

9. Ndërtoni një problem me shirit për 24 : 6, ku kërkohet madhësia e grupit.

10. Hartoni një pyetje që dallon ngatërrimin e shifrës me vlerën e saj vendore te 42 × 3.

11. Shqyrtoni nëse 17 : 4 dhe 17 : 5 kanë të njëjtin herës të plotë.

12. Shpjegoni pse 960 : 8 mund të gjendet me 96 : 8 dhe shumëzim me 10.

LEKSIONI 5 · KAPITULLI 14

14. Përgjigje të shkurtra për kontrollin e punës

1. (100 − 1) × 8 = 800 − 8 = 792; ose (90 + 9) × 8 = 720 + 72 = 792.

2. $35 = 6 \times 5 + 5$. Te grupimi me nga gjashtë: pesë grupe të plota dhe pesë objekte që mbeten. Nëse duhen vendosur të gjitha objektet në kuti me nga gjashtë, duhen gjashtë kuti. Herësi dhe mbetja nuk ndryshojnë; ndryshon interpretimi që kërkon pyetja.

3. $852 : 4 = 213$, sepse $4 \times 213 = 852$. Te shkrimi 23 mungon shifra 1 e dhjetësheve, dhe 2-shi ka humbur vlerën e qindësheve. Këtu nuk ka humbur një zero, si te $204 \rightarrow 24$; prandaj dy gabimet nuk diagnostikohen njësoj.

4. $(a + 1) \times (b + 1) = a \times b + a + b + 1$, prandaj rritja është $a + b + 1$. Ajo është 1 vetëm kur $a = b = 0$.

5. $207 = 8 \times 25 + 7$, me $0 \leq 7 < 8$.

6. $14 : 4$ jep 3 dhe mbetjen 2, por $28 : 4$ jep 7 pa mbetje.

7. $18 \times 25 = 9 \times 50 = 450$; kur 25-ën e dyfishojmë dhe 18-ën e përgjysmojmë, prodhimi ruhet. Kushti është që 18 të jetë çift.

8. $63 = 7 \times 9$ dhe $126 = 14 \times 9$: i pjesëtueshmi dhe pjesëtuesi u shumëzuan me 2.

9. 24 njësi në gjashtë pjesë të barabarta; çdo pjesë ka katër njësi.

10. «Te 42, çfarë tregon shifra 4? Sa është 40×3?»

11. $17 : 4$ jep 4 dhe mbetjen 1; $17 : 5$ jep 3 dhe mbetjen 2. Jo.

12. $960 = 10 \times 96$, prandaj $960 : 8 = 10 \times (96 : 8) = 120$; pjesëtimi është pa mbetje.

LEKSIONI 5

Bibliografia

Shënim mbi përdorimin e burimeve

Bibliografia ndjek stilin APA (botimi i 7-të). Argumentet matematikore mbështeten te vërtetimet në tekst; burimet empirike citohen vetëm për pohime mbi mësimdhënien. Shembujt, dialogët dhe rastet e nxënësve janë hartuar për këtë leksion.

Literatura e cituar

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Education Endowment Foundation. (2017). *Improving mathematics in Key Stages Two and Three: Guidance report*. https://educationendowmentfoundation.org.uk/education-evidence/guidance-reports/maths-ks-2-3

Fuchs, L. S., Newman-Gonchar, R., Schumacher, R., Dougherty, B., Bucka, N., Karp, K. S., Woodward, J., Clarke, B., Jordan, N. C., Gersten, R., Jayanthi, M., Keating, B., & Morgan, S. (2021). *Assisting students struggling with mathematics: Intervention in the elementary grades* (WWC 2021006). National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. https://ies.ed.gov/ncee/WWC/PracticeGuide/26

Gervasoni, A., Roche, A., Kalogeropoulos, P., & Downton, A. (2026). A systematic review of mathematics intervention approaches for primary school students who experience difficulties with learning mathematics. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-026-00599-8

National Council of Teachers of Mathematics. (2023). *Procedural fluency in mathematics* [Qëndrim zyrtar]. https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Position-Statements/Procedural-Fluency-in-Mathematics/

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* (J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell, Eds.). National Academy Press. https://doi.org/10.17226/9822

Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review*, *27*(4), 587–597. https://doi.org/10.1007/s10648-015-9302-x

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2018). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions* (2nd ed.). Corwin.