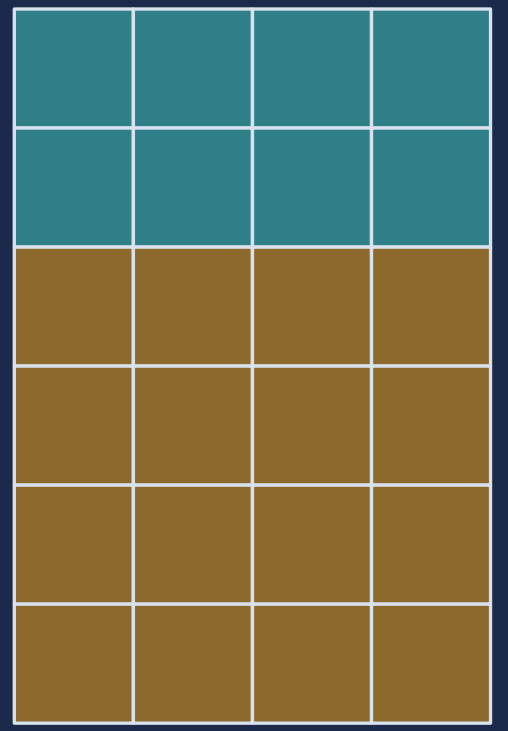
METODIKA E MATEMATIKËS 3 · LEKSIONI 5 · JAVA XI

Shumëzimi me gojë dhe pjesëtimi me shkrim

Varësia e prodhimit dhe e herësit nga përbërësit e veprimeve

«Kompetenca e mësuesit shfaqet kur ai shpjegon pse funksionon një algoritëm, interpreton gabimin dhe zgjedh ndërhyrjen e përshtatshme.»



$6 \times 4 = 2 \times 4 + 4 \times 4$

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Metodika e Matematikës 3 · Viti akademik 2026–2027 · 4 × 45 minuta

PARASHIKIM · 4 MIN

Dy nxënës, i njëjti pjesëtim, dy përgjigje

Nxënësi A

$$816 : 4 = 204$$

Nxënësi B

$$816 : 4 = 24$$

Të dy kanë bërë saktë hapat $8 : 4 = 2$ dhe $16 : 4 = 4$.

1. Çfarë mund ta shpjegojë dallimin ndërmjet dy përgjigjeve?
2. Çfarë pyetjeje do t'i bënit secilit nxënës, pa i thënë rezultatin?

Shkruani përgjigjen tuaj. Do t'i rikthehemi pas algoritmit të pjesëtimit.

Në fund të leksionit studenti argumenton, jo vetëm llogarit

1

Njohuria matematikore

Vërteton vetitë dhe strategjitë; formulon teoremën e pjesëtimit me mbetje dhe justifikon algoritmin.

2

Shpjegimi në arsimin fillor

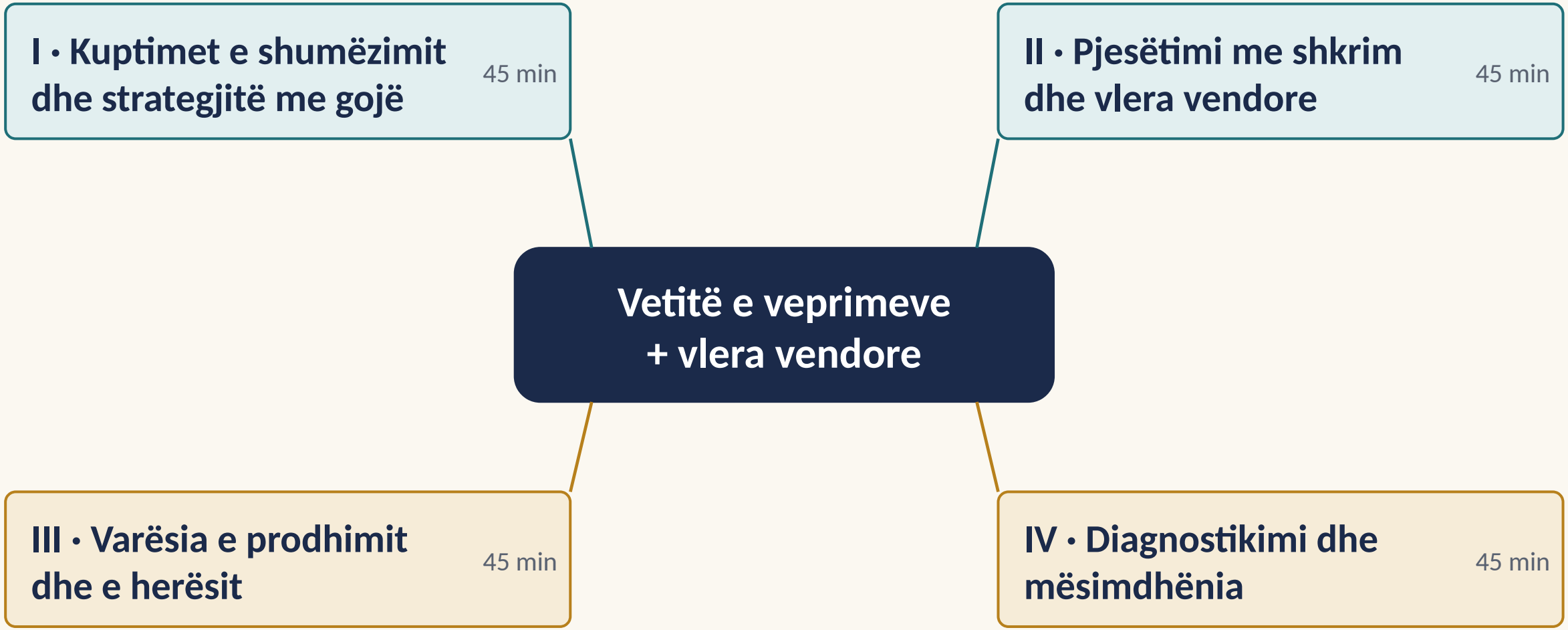
Zgjedh paraqitje të përshtatshme dhe dallon dy kuptimet e pjesëtimit dhe rolet e faktorëve.

3

Mendimi i nxënësit

Formulon hipoteza për gabimin, harton pyetjen që i dallon dhe kontrollon ndërhyrjen në rast të ri.

Një bosht i vetëm: vetitë e veprimeve dhe vlera vendore



BLLOKU I · 45 MINUTA

Kuptimet e shumëzimit dhe strategjitë me gojë

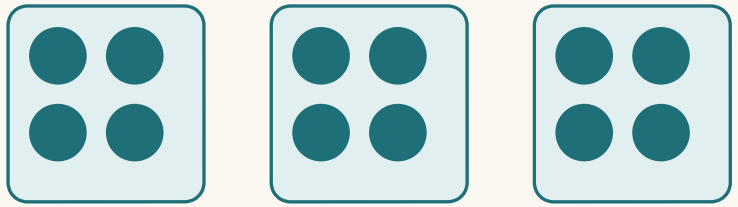
Hapja dhe Blloku I · minutat 0–45

Në këtë bllok

- Marrëveshja për faktorët dhe modelet
- Vetia shpërndarëse
- Kompensimi dhe analiza e gabimit
- Ruajtja e prodhimit: 28 × 25

Marrëveshja: m × n do të thotë m grupe me nga n

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\} \qquad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$



3 grupe me nga 4 kokrra

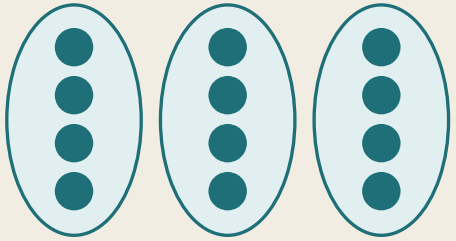
$$3 \times 4 = 12$$

Faktori i parë numëron grupet ose rreshtat; i dyti tregon sa ka secili.

$3 \times 4 = 4 \times 3$ si numra, por «3 qese me nga 4» dhe «4 qese me nga 3» janë situata të ndryshme.

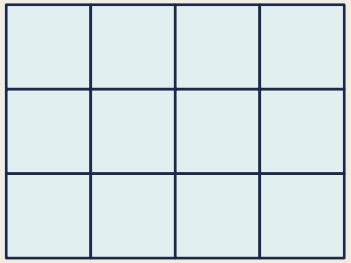
Katër modele japin 3 × 4 = 12, por me struktura të ndryshme

Grupe të barabarta



3 qese me nga 4

Rrjetë drejtkëndore



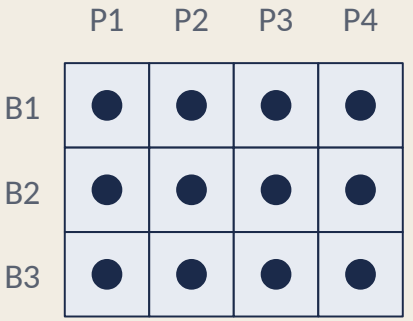
3 rreshta me nga 4

Model i syprinës



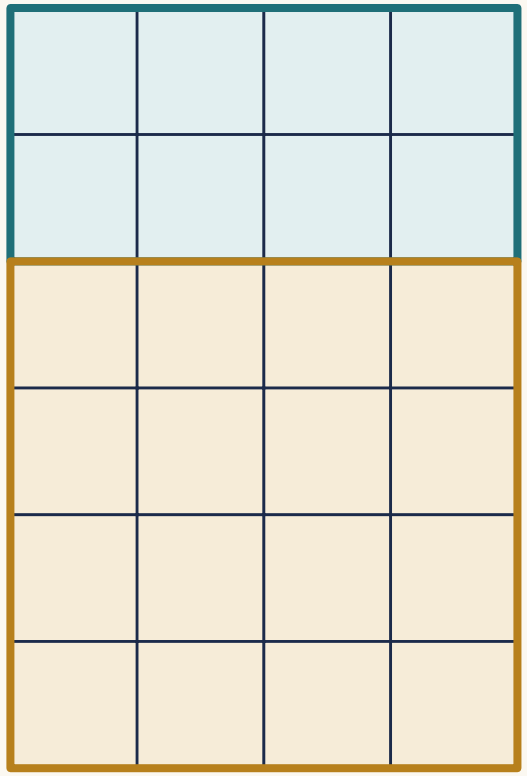
brinjë 3 cm dhe 4 cm

Prodhim kartezian



3 bluza, 4 pantallona

Rrjeta 6 × 4 e ndarë në 2 + 4 rreshta tregon vetinë shpërndarëse



2 rreshta

4 rreshta

4 kuti në çdo rresht

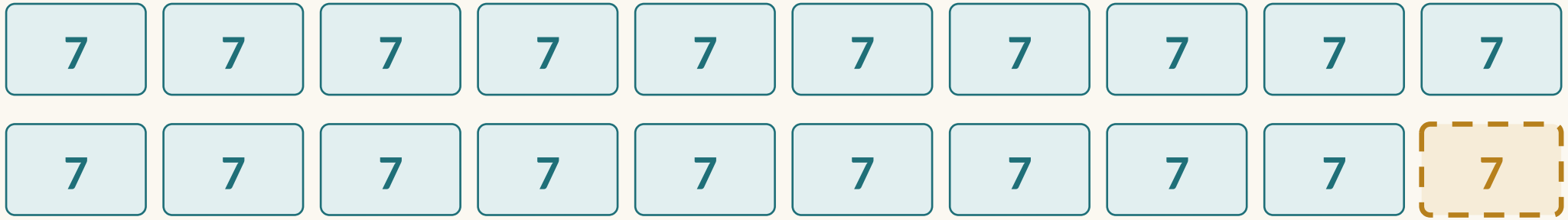
$$6 \times 4 = 2 \times 4 + 4 \times 4$$

$$= 8 + 16 = 24$$

Në përgjithësi:

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

Kompensimi: nga 20 grupe me nga 7 heqim një grup të tërë



$$19 \times 7 = 20 \times 7 - \mathbf{1 \times 7} = 140 - 7 = 133$$

Vetia: shpërndarja ndaj zbritjes, $(20 - 1) \times 7 = 20 \times 7 - 1 \times 7$, ku $20 \geq 1$.

ANALIZË GABIMI · 2 MIN

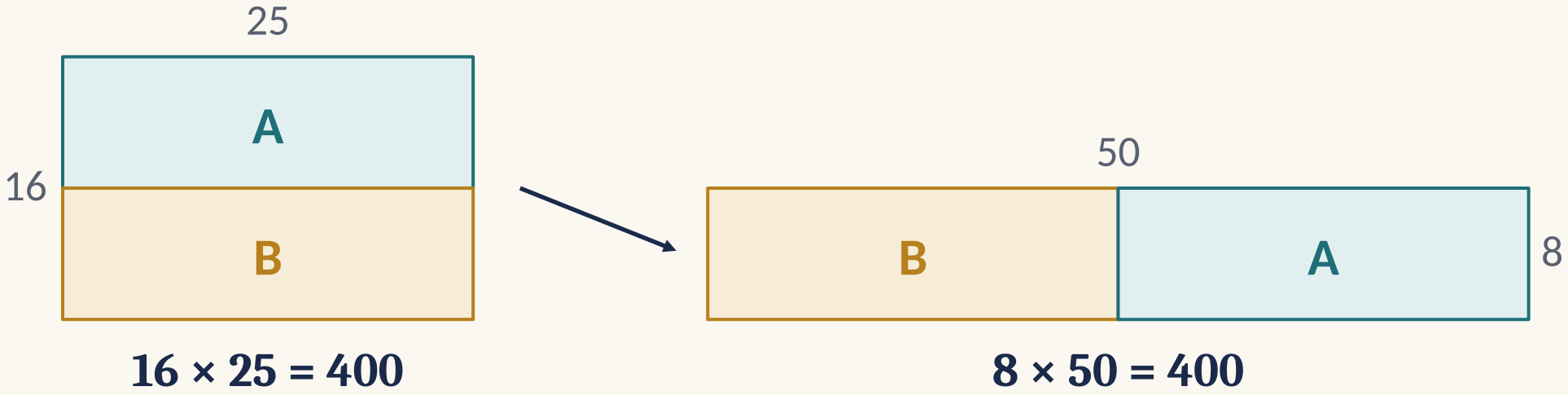
19 × 7 = 20 × 7 − 1: çfarë mund të ketë ndodhur?

Puna e nxënësit (simulim didaktik)

$$19 \times 7 = 20 \times 7 - 1 = 139$$

1. Formuloni dy shpjegime të mundshme për këtë shkrim.
2. Hartoni një pyetje që i dallon dy shpjegimet.
3. Çfarë rasti të ri do të jepnit për kontroll?

Përgjysmojmë njërin faktor, dyfishojmë tjetrin: syprina ruhet



$$16 \times 25 = (2 \times 8) \times 25 = 8 \times (2 \times 25) = 8 \times 50 = 400$$

Kushti: faktori që përgjysmohet duhet të jetë çift. Te 16×25 kemi $16 = 2 \times 8$, prandaj kalimi bëhet brenda $\mathbb{N}$.

KRAHASIM STRATEGJISH · PUNË NË ÇIFTE · 4 MIN

Llogaritni 28 × 25 në dy mënyra të ndryshme

$$28 \times 25$$

1. Shkruani dy rrugë të ndryshme pa algoritmin me shkrim.

2. Për secilën rrugë: cila veti e justifikon?

3. Cila rrugë nuk funksionon për 27 × 25? Pse?

Katër rrugë për 28 × 25, secila me vetinë e vet

Zbërthimi

shpërndarëse (mbledhje)

$$20 \times 25 + 8 \times 25 = 500 + 200 = 700$$

Kompensimi

shpërndarëse (zbritje)

$$30 \times 25 - 2 \times 25 = 750 - 50 = 700$$

Grupimi me katër

shoqëruese, $28 = 7 \times 4$

$$28 \times 25 = 7 \times (4 \times 25) = 7 \times 100 = 700$$

Dyfishim dhe përgjysmim

ruajtja e prodhimit, 28 çift

$$28 \times 25 = 14 \times 50 = 7 \times 100 = 700$$

27 × 25: 27 nuk përgjysmohet në $\mathbb{N}$ dhe nuk ndahet në katërsha. Rrugë e përshtatshme: $28 \times 25 - 25 = 675$.

BLLOKU II · 45 MINUTA

Pjesëtimi, vlera vendore dhe justifikimi i algoritmit

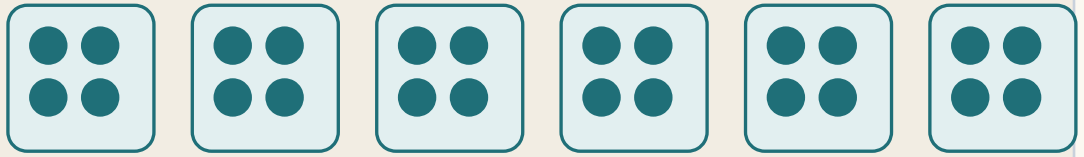
Minutat 45–90

Në këtë bllok

- Dy kuptimet e pjesëtimit
- Teorema e pjesëtimit me mbetje
- Algoritmi 936 : 4 hap pas hapi
- Invarianti dhe zeroja në herës

24 : 6 = 4 përgjigjet dy pyetjeve të ndryshme

Ndarje në 6 grupe të barabarta

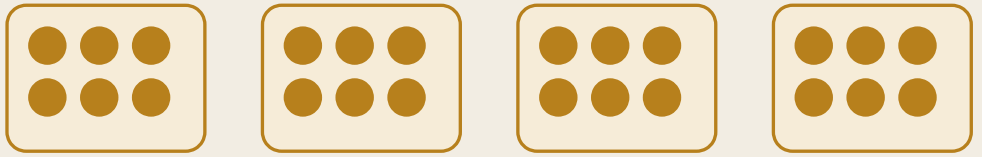


Dimë: 24 objekte, 6 grupe

Kërkojmë: sa në secilin grup?

$$24 : 6 = 4$$

Grupim me nga 6



Dimë: 24 objekte, 6 në çdo grup

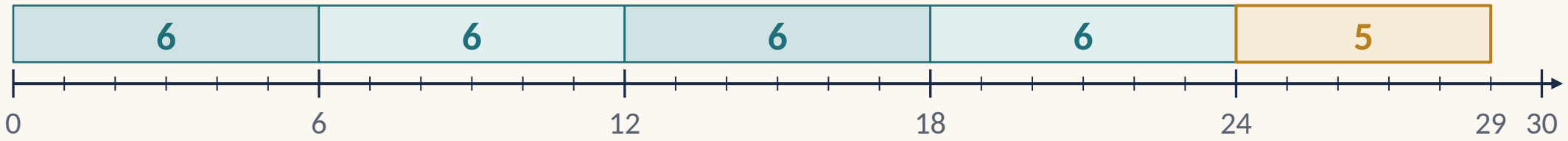
Kërkojmë: sa grupe?

$$24 : 6 = 4$$

Teorema e pjesëtimit me mbetje ka dy kushte, jo një

Për çdo $a \in \mathbb{N}_0$ dhe $b \in \mathbb{N}$ ekzistojnë $q, r \in \mathbb{N}_0$, të vetëm, të tillë që

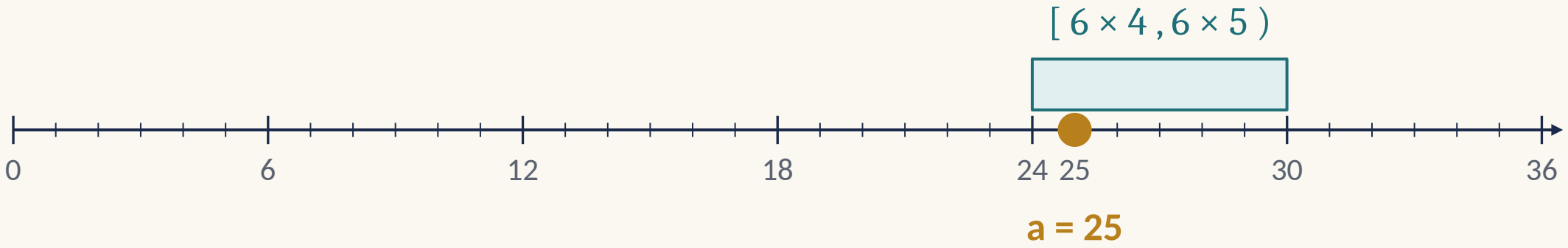
$$a = b \times q + r, \qquad 0 \le r < b$$



$$29 = 6 \times 4 + \mathbf{5}, \qquad 0 \le 5 < 6$$

$\mathbf{29 = 6 \times 3 + 11}$ e plotëson barazimin, por jo kushtin: $11 \ge 6$.

Herësi: numri më i madh i grupeve të plota



$$6 \times 4 = 24 \le 25 < 30 = 6 \times 5 \quad \Rightarrow \quad q = 4$$

Mosbarazimi i majtë do të thotë $r \ge 0$; i djathti do të thotë $r < b$. Herësi është numri më i madh i grupeve të plota me nga b, jo numri më i madh që nuk e kalon a-në.

936 : 4, hapi 1: 9 qindëshe në 4 grupe, nga 2; mbetet 1 qindëshe

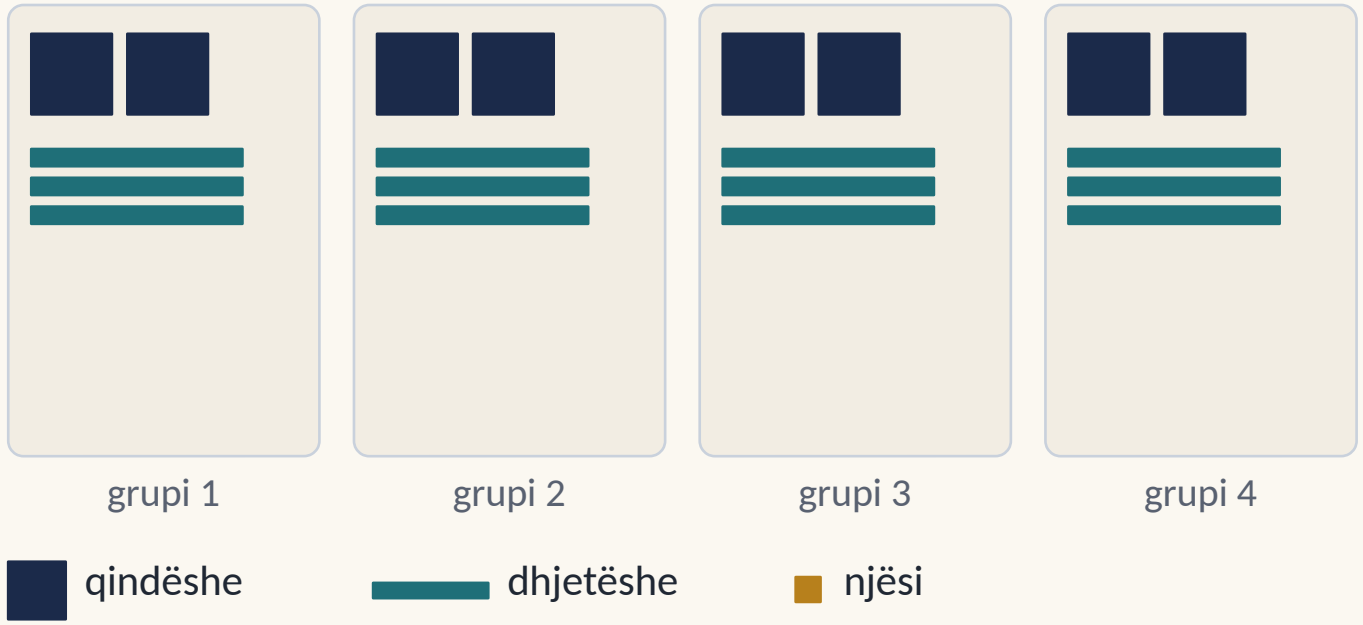


$$\begin{array}{r} 9\,3\,6 : 4 = 2 \\ -\ 8 \\ \hline 1 \end{array}$$

mbetet 1 qindëshe → 10 dhjetëshe

$$9 = 4 \times 2 + 1$$

Hapi 2: 10 + 3 = 13 dhjetëshe, nga 3 për grup; mbetet 1 dhjetëshe

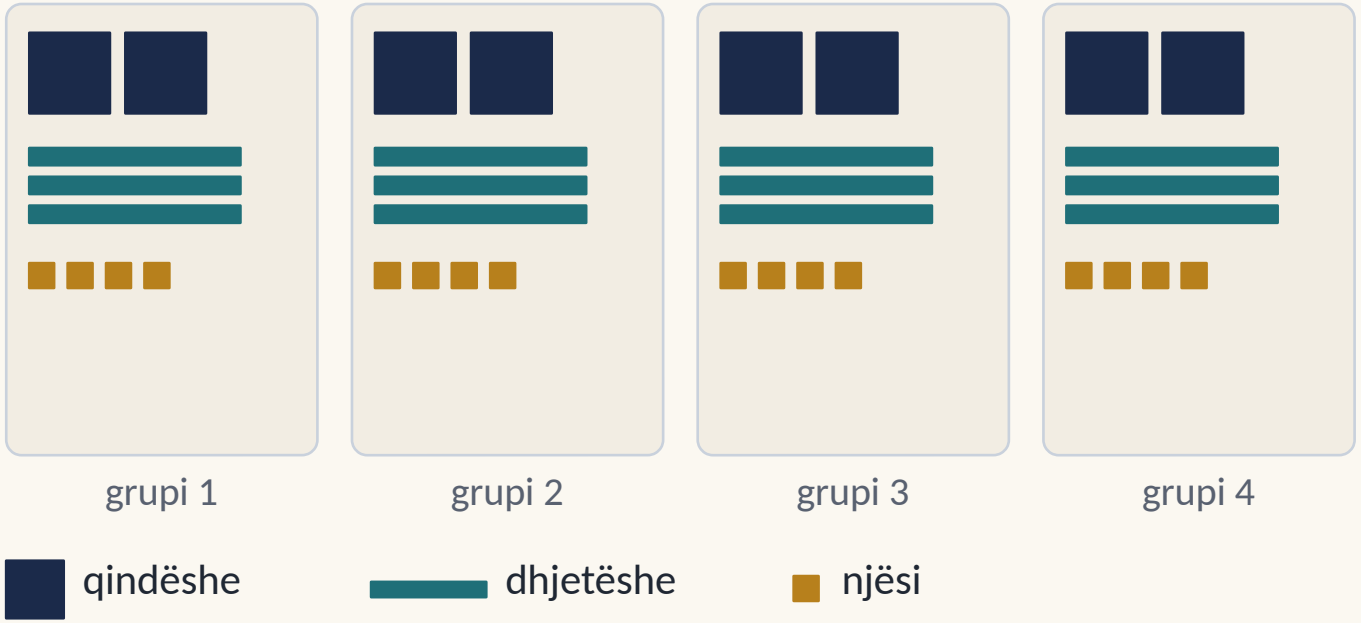


$$
\begin{array}{r}
9\,3\,6 : 4 = 2\,3 \\
-\,8 \\
\hline
1\,3 \\
-\,1\,2 \\
\hline
1
\end{array}
$$

mbetet 1 dhjetëshe → 10 njësi

$$13 = 4 \times 3 + 1$$

Hapi 3: 10 + 6 = 16 njësi, nga 4 për grup; herësi është 234



$$
\begin{array}{r}
936 : 4 = 234 \\
-\,8 \\
\hline
13 \\
-\,12 \\
\hline
16 \\
-\,16 \\
\hline
0
\end{array}
$$

$16 = 4 \times 4 + 0$ Kontroll: $4 \times 234 = 936$

Invarianti: pas çdo hapi, pjesa e lexuar ka herës dhe mbetje

$\mathbf{A = d_1 d_2 \ldots d_n}$ shifrat e të pjesëtueshmit, nga e majta; $\mathbf{b} \in \mathbb{N}$ pjesëtuesi.

$\mathbf{P_k}$ = numri i k shifrave të para; $\mathbf{P_0 = 0}$; q_k, r_k = herësi dhe mbetja e P_k me b.

$$P_k = b \times q_k + r_k, \qquad 0 \le r_k < b$$

9 3 6

$P_1 = 9$
$P_2 = 93$
$P_3 = 936$

Për k = 0 vlen me $q_0 = r_0 = 0$. Për k = n kemi P_n = A: q_n dhe r_n janë herësi dhe mbetja e kërkuar.

Zeroja ruan vendin e dhjetësheve në herës

	qindëshe	dhjetëshe	njësi
I pjesëtueshmi 816	**8**	**1**	**6**
Çdo grup nga 4 merr	**2**	**0**	**4**

1 dhjetëshe nuk mjafton për 4 grupe: çdo grup merr 0 dhjetëshe. Ajo këmbehet me 10 njësi: 10 + 6 = 16 njësi.

$$4 \times 204 = 816$$

2 qindëshe, 0 dhjetëshe, 4 njësi

$$4 \times 24 = 96$$

24 = 2 dhjetëshe e 4 njësi: vlerë tjetër

Hartoni pyetjen që dallon dy shpjegimet e 816 : 4 = 24

Nxënësi B (simulim didaktik)

$$816 : 4 = 24$$

H1 Nuk e shkruan zeron që mban vendin e dhjetësheve.

H2 Nuk e lidh herësin me qindëshet dhe me shumëzimin.

1. Hartoni një pyetje që i dallon H1 dhe H2, pa e dhënë përgjigjen.
2. Çfarë përgjigjeje do ta forconte secilën hipotezë?
3. Cilin rast të ri do të jepnit për kontroll?

Kontrolli ka dy pjesë: barazimi dhe kushti për mbetjen

$$4 \times 236 + 3 = 947$$

barazimi plotësohet

$$0 \le 3 < 4$$

kushti plotësohet

$$947 = 4 \times 235 + 7$$

barazimi plotësohet...

$$7 < 4\ ?$$

...por kushti nuk plotësohet

Kontrolli i tretë është vlerësimi i madhësisë: $4 \times 200 = 800$, prandaj herësi është mbi 200.

BLLOKU III · 45 MINUTA

Varësia e prodhimit dhe e herësit nga përbërësit

Minutat 90–135

Në këtë bllok

- Ndryshimi i njërit ose i të dy faktorëve
- Prodhimi i ri dhe rritja e tij
- Ruajtja e herësit, ndryshimi i mbetjes
- Raporti dhe herësi i plotë

Kur ndryshojnë faktorët: shtesa është c × b, jo c

Ndryshon njëri faktor

$$(a + c) \times b = a \times b + c \times b$$

$$(k \times a) \times b = k \times (a \times b)$$

Shembull

$$18 \times 7 = 126 \;\Rightarrow\; 19 \times 7 = 133,\; 36 \times 7 = 252$$

Ndryshojnë të dy

$$(k \times a) \times (m \times b) = (k \times m) \times (a \times b)$$

$$(k \times a) \times (b : k) = a \times b, \text{ kur } k \mid b$$

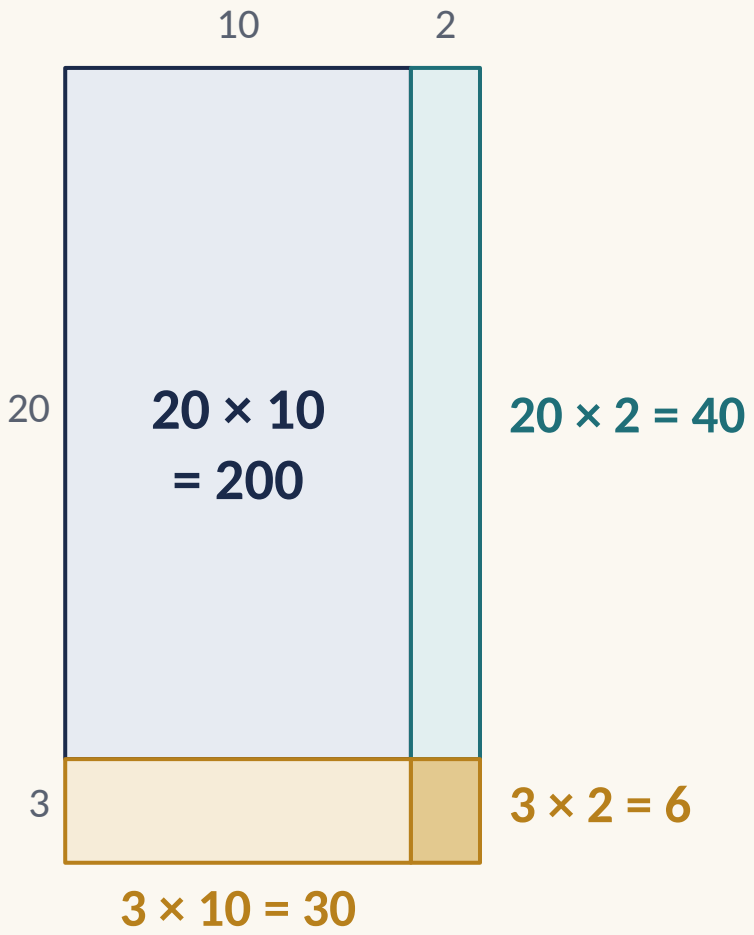
Shembull

$$15 \times 24 = 30 \times 12 = 60 \times 6 = 360$$

$a, b, c, k, m \in \mathbb{N}_0$; te ruajtja $k > 0$. Për $k = m = 2$ prodhimi katërfishohet, nuk dyfishohet.

INTERPRETIM FIGURE · 2 MIN

Prodhimi i ri ka katër terma; rritja e tij ka vetëm tre



Prodhimi i ri: katër terma

$$(a + p) \times (b + q) = a \times b + a \times q + p \times b + p \times q$$

Rritja e prodhimit: tre terma

$$(a + p) \times (b + q) - a \times b = a \times q + p \times b + p \times q$$

$$23 \times 12 = 200 + 40 + 30 + 6 = 276; \quad \text{rritja} = 76$$

Zona p × q është drejtkëndësh me brinjë p dhe q; është katror vetëm kur p = q.

«Nëse çdo faktori i shtojmë 2, prodhimi rritet me 4.» E vërtetë?

«Nëse çdo faktori i shtojmë 2, prodhimi rritet me 4.»

1

Gjeni një kundërshembull me numra të vegjël.

2

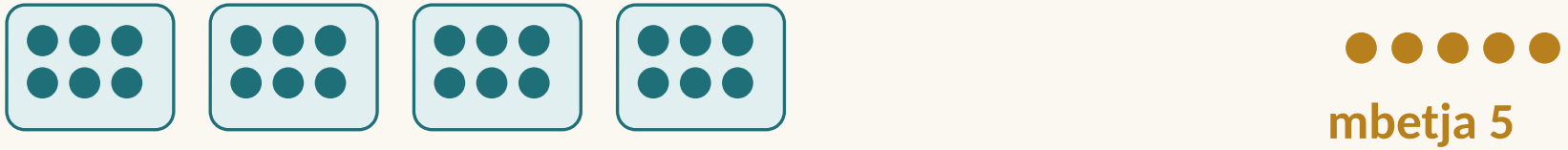
Shkruani rritjen $(a + 2) \times (b + 2) - a \times b$ në përgjithësi.

3

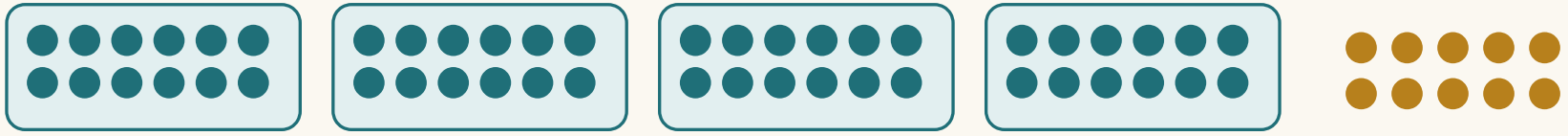
Për cilët a dhe b pohimi është i vërtetë?

Dyfishojmë të dy përbërësit: grupet mbeten 4, mbetja dyfishohet

29 = 6 × 4 + 5



58 = 12 × 4 + 10



herësi	ruhet
4 dhe 4	

mbetja	dyfishohet
5 dhe 10	

kushti	plotësohet
$10 < 12$	

Ruajtja e herësit: $k \times a = (k \times b) \times q + k \times r$, me $0 \le k \times r < k \times b$

Hipotezat: $a, q, r \in \mathbb{N}_0$; $b, k \in \mathbb{N}$; $a = b \times q + r$; $0 \le r < b$.

shpërndarja dhe shoqërueshmëria

$$k \times a = k \times (b \times q + r) = (k \times b) \times q + k \times r$$

$k \ge 1$, $r < b$ dhe monotonia

$$0 \le k \times r < k \times b$$

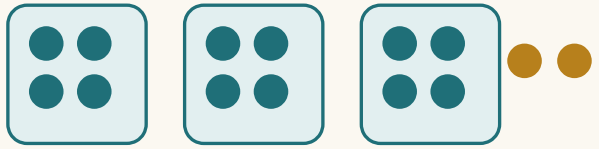
uniciteti

$$\text{herësi} = q, \qquad \text{mbetja} = k \times r$$

Pohimi flet vetëm për shumëzimin e të dy përbërësve me të njëjtin numër pozitiv.

14 : 4 jep herësin 3, por 28 : 4 jep 7: mbetja formoi një grup të ri

14 = 4 × 3 + 2



28 = 4 × 7 + 0



2 + 2 mbetje = grup i ri

Me b fiks:

$$2 \times a = b \times (2 \times q) + 2 \times r$$

Nëse $2 \times r < b$: herësi $2 \times q$. Nëse $2 \times r \geq b$: herësi $2 \times q + 1$, mbetja $2 \times r - b$.

Me a të fiksuar, herësi nuk rritet kur rritet pjesëtuesi

$$q \times b \le a < (q+1) \times b, \qquad a \text{ i fiksuar}$$

b	kushti për a = 15	q
4	$3 \times 4 = 12 \le 15 < 16 = 4 \times 4$	**3**
5	$3 \times 5 = 15 \le 15 < 20 = 4 \times 5$	**3**
6	$2 \times 6 = 12 \le 15 < 18 = 3 \times 6$	**2**

$b_1 < b_2 \Rightarrow q_2 \le q_1$: herësi nuk rritet, por as nuk zvogëlohet në çdo hap.

GJYKIM POHIMESH · INDIVIDUALISHT, PASTAJ NË ÇIFTE · 5 MIN

Të vërteta, të rreme apo të vërteta me kushte?

1. Kur të pjesëtueshmit i shtojmë 1, herësi rritet. — V / R / me kusht
2. Kur a-së i shtojmë b, herësi rritet me 1. — V / R / me kusht
3. Kur dyfishojmë të dy përbërësit, mbetja ruhet. — V / R / me kusht
4. Kur rritet pjesëtuesi, herësi i plotë nuk rritet. — V / R / me kusht

BLLOKU IV · 45 MINUTA

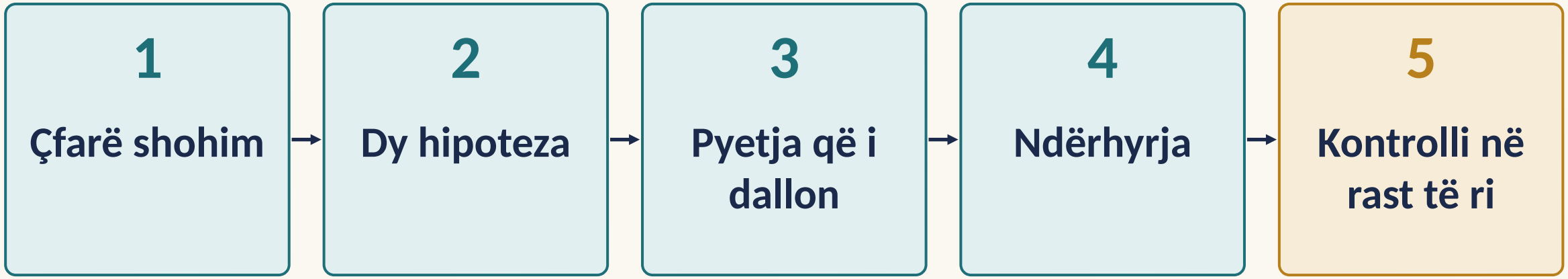
Diagnostikimi dhe mësimdhënia

Minutat 135–180

Në këtë bllok

- Gabimi si burim informacioni
- Plani i një ore dhe diferencimi
- Vlerësimi formues dhe rubrika
- Rikthim, sintezë, biletë daljeje

Një gabim është hipotezë për t'u verifikuar, jo diagnozë



Dallojmë gabimin e rastësishëm, vështirësinë procedurale dhe keqkuptimin konceptual. Rastet dhe dialogët e leksionit janë simulime didaktike, jo të dhëna empirike.

Rasti A: «816 : 4 = 24» në pesë hapa

1	**Çfarë shkroi**	816 : 4 = 24
2	**Dy hipoteza**	H1: ka humbur vendi i dhjetësheve. H2: nuk e lidh herësin me qindëshet dhe me shumëzimin.
3	**Pyetja**	«A duhet të jetë herësi afër 20 apo afër 200? Sa qindëshe merr çdo grup?»
4	**Ndërhyrja**	816 me kartela dhjetore; 8 qindëshe në 4 grupe; 1 dhjetëshe këmbehet me 10 njësi.
5	**Rast i ri**	824 : 4 = 206 ? dhe shpjegimi i zeros

Një orë 45-minutëshe: nga 936 : 4 te 816 : 4

Minutat	Veprimtaria	Pyetja kryesore	Çfarë duam të shohim
0–7	Problemi dhe vlerësimi i madhësisë	Afër 20 apo afër 200?	Lidhja me shumëzimin
7–18	Qindëshe, dhjetëshe, njësi	Ç'bëhet me dhjetëshen që mbeti?	Këmbimi i saktë
18–28	Herësit e pjesshëm dhe algoritmi	Ku është 120 në shkrim?	Lidhja e dy shkrimeve
28–37	816 : 4 dhe zeroja	Çfarë tregon shifra 0?	Vlera vendore
37–43	Kontrolli dhe diskutimi	Si e vërteton rezultatin?	a = b × q + r
43–45	Bileta e daljes: 618 : 6	Pse nuk është 13?	Zbatimi në rast të ri

Diferencimi: e njëjta ide, shkallë të ndryshme ndihme

Konkrete

Materiale të prekshme:

$12 \times 4 = 6 \times 8$

→

Figurative

Drejtkëndëshi që ruan syprinën:

$12 \times 4 = 6 \times 8$

→

Simbolike

Përgjithësimi, me b çift:

$(2 \times a) \times (b : 2) = a \times b$

Të gjithë nxënësit punojnë me të njëjtën ide: ruajtjen e prodhimit.

Fuchs et al. (2021); Gervasoni et al. (2026)

Vlerësim formues: përgjigjja dhe argumenti, në dy faza

Faza 1 · Përgjigjja

$$816 : 4 = ?$$

24 204 206 240

Faza 2 · Argumenti

«Çfarë tregon zeroja te herësi?»

Çfarë provon dhe çfarë jo

- 204 me «kështu bëhet algoritmi» nuk e provon zotërimin procedural.
- Procedura provohet me një rast të ri, të zgjidhur vetë: 824 : 4.
- Shpjegimi provohet me pyetjen «Sa dhjetëshe merr çdo grup?».

Rubrika: tri nivele të dallueshme për katër dimensione

Dimensioni	0 – i pamjaftueshëm	1 – pjesërisht	2 – plotësisht
Saktësia matematikore	Rregull i gabuar ose rezultat pa kontroll	Llogaritje e saktë, argument i paplotë	Kushtet, vërtetimi dhe kontrolli
Paraqitjet	Mungojnë	Një paraqitje pa lidhje	Dy paraqitje të lidhura me barazimin
Analiza didaktike	Vetëm korrigjim	Hipotezë pa provë	Hipotezë, pyetje dhe ndërhyrje
Gjuha profesionale	Terma të pasaktë	Terminologji kryesisht e saktë	Gjuhë e saktë dhe e përshtatur

Rubrika e diagnostikimit ka nivele 0–3, sepse përshkruan zhvillimin e një aftësie të vetme (Shtojca A7).

Rikthim: 204 dhe 24 dallohen nga vlera vendore, jo nga hapat

Nxënësi A

$$816 : 4 = 204$$

4 × 204 = 816: 2 qindëshe, 0 dhjetëshe, 4 njësi.

Pyetja e mësuesit

«Pse shkruajte 0? Çfarë do të ndodhte pa të?»

Nxënësi B

$$816 : 4 = 24$$

4 × 24 = 96: vendi i dhjetësheve ka humbur.

Pyetja e mësuesit

«A duhet të jetë herësi afër 20 apo 200? Sa qindëshe merr çdo grup?»

Sinteza: struktura, paraqitja dhe argumenti në çdo hap

Strategjitë me gojë

shpërndarja, kompensimi,
ruajtja e prodhimit

Algoritmi i pjesëtimit

$P_k = b \times q_k + r_k,\ 0 \le r_k < b$

Vetitë e veprimeve + vlera vendore

Varësitë

barazime me kushte:
$k > 0,\ k \mid b,\ 0 \le r < b$

Diagnostikimi

hipotezë → pyetje →
ndërhyrje → rast i ri

BILETË DALJEJE · INDIVIDUALISHT · 5 MIN

Bileta e daljes: tri pyetje, 5 minuta

1. Një nxënës shkruan 852 : 4 = 23. Cila shifër mungon? Si e zbulon vetë nxënësi?

2. Nga 29 = 6 × 4 + 5, pa llogaritur nga e para: çfarë japin 58 : 12 dhe 58 : 6?

3. Pse 19 × 7 = 140 − 7? Emërtoni vetinë që e justifikon.

Përgjigjet dhe kriteri i vlerësimit janë në shënimet e pedagogut.

Punë e pavarur dhe literaturë e përzgjedhur

Fletë pune

6 detyra shumëzimi me gojë, secila për një strategji; dy përgjigje të mundshme të nxënësve.

Analizë 500–700 fjalë

Gabimi 618 : 6 = 13: hipoteza, dy pyetje, modeli vizual, rasti i ri.

Mikromësimdhënie 10 min

29 : 6: kuptimi i mbetjes në problem kundrejt përkufizimit formal.

Literaturë e përzgjedhur

- Ball, Thames & Phelps (2008)
- Fuchs et al. (2021), WWC
- NCTM (2023), Procedural fluency
- National Research Council (2001), Adding it up
- Rittle-Johnson, Schneider & Star (2015)

A1 · Vetitë e shumëzimit dalin nga përkufizimi rekursiv

Shpërndarja (induksion sipas b)	$(a + b + 1) \times c = (a + b) \times c + c = a \times c + (b + 1) \times c$
Shoqërueshmëria (induksion sipas a)	$((a + 1) \times b) \times c = (a \times b) \times c + b \times c = (a + 1) \times (b \times c)$
Ndërrueshmëria (bijeksion)	$(x, y) \mapsto (y, x)$ nga $A \times B$ në $B \times A$, pra $m \times n = n \times m$
Monotonia ($m \geq 1$)	$v = u + h,\ h \geq 1 \Rightarrow m \times v = m \times u + m \times h > m \times u$

Rasti fillestar i secilit induksion është i menjëhershëm nga $0 \times n = 0$.

A2 · $|A \times B| = |A| \times |B|$: induksion sipas $|A|$

m = 0 $A = \varnothing,\ A \times B = \varnothing,\ |A \times B| = 0 = 0 \times n$

hapi $A = A' \cup \{a\},\ a \notin A',\ |A'| = m$

ndarja $A \times B = (A' \times B) \cup (\{a\} \times B),$ pa element të përbashkët

përfundimi $|A \times B| = m \times n + n = (m + 1) \times n$

A3 · Teorema e pjesëtimit me mbetje: ekzistenca

1 **Shumëfishat e b-së që nuk e kalojnë a-në:**

$0, b, 2 \times b, \ldots$ (jo bosh, e fundme: $k \le a$)

2 **Marrim më të madhin dhe mbetjen:**

$b \times q \le a, \qquad r = a - b \times q \ge 0$

3 **Nëse r ≥ b, atëherë**

$a \ge b \times q + b = b \times (q + 1)$: kundërshtim. Pra $r < b$. ∎

A4 · Teorema e pjesëtimit me mbetje: uniciteti

$$a = b \times q + r = b \times q' + r', \qquad 0 \le r, r' < b$$

Nëse $q < q'$, atëherë $q' \ge q + 1$ dhe

$$b \times q' + r' \ge b \times (q + 1) = b \times q + b > b \times q + r = a$$

kundërshtim. Njësoj përjashtohet $q' < q$. Pra $q = q'$ dhe $r = r'$.

Pasojë didaktike: «27 : 5 = 4 mbetja 7» nuk është përgjigje e vlefshme; çifti i vetëm është $q = 5$, $r = 2$.

A5 · Çdo hap i algoritmit e ruan invariantin

shifra pasuese d

$$P_{k+1} = 10 \times P_k + d = b \times (10 \times q_k) + (10 \times r_k + d)$$

«ulim shifrën» dhe pjesëtojmë

$$10 \times r_k + d = b \times t + s, \qquad 0 \le s < b$$

zëvendësojmë

$$P_{k+1} = b \times (10 \times q_k + t) + s$$

uniciteti

$$q_{k+1} = 10 \times q_k + t, \qquad r_{k+1} = s$$

$q_{k+1} = 10 \times q_k + t$: shifra t shkruhet në të djathtë të herësit të mëparshëm.

A6 · Pjesëtime për diagnostikimin e vlerës vendore

Pjesëtimi	Herësi dhe mbetja	Çështja e vlerës vendore	Pyetja diagnostikuese
816 : 4	204; r = 0	Zero te dhjetëshet	Çfarë tregon 0 te 204?
618 : 6	103; r = 0	1 dhjetëshe nuk mjafton për 6 grupe	Pse 13 nuk mund të jetë rezultati?
132 : 6	22; r = 0	Nisim me 13 dhjetëshe	Pse fillojmë me 13 e jo me 1?
207 : 8	25; r = 7	Mbetja dhe kushti r < 8	A mund të formohet edhe një grup?

A7 · Rubrika e diagnostikimit të gabimeve (0–3)

Niveli	Interpretimi i punës	Cilësia e ndërhyrjes	Kontrolli në rast të ri
0 – i pamjaftueshëm	E ngatërron gabimin me diagnozën	Jep vetëm përgjigjen e saktë	Nuk parashikon kontroll
1 – fillestar	Gjen një hipotezë	Propozon një ushtrim të ngjashëm	Kontrollon vetëm rezultatin
2 – kompetent	Krahason dy hipoteza me pyetje	Zgjedh model që i përshtatet gabimit	Detyrë e ngjashme, e interpretuar
3 – i avancuar	Ndërton provë që i dallon hipotezat	Kalon nga konkretja te simboli sipas nevojës	Rast i ri me strukturë të ndryshuar

A8 · Tri detyra të zgjidhura nga punëtoria

C · 25 × 36

$$25 \times 36 = 36 \times 25 = (9 \times 4) \times 25 = 9 \times (4 \times 25) = 900$$

H · 29 : b

$$29 = 4 \times b + 1 \Rightarrow b = 7; \quad 4 \times b \le 29 < 5 \times b \Rightarrow b = 6 \text{ ose } 7$$

J · 52 : 6 → 104 : 6

$$52 = 6 \times 8 + 4, \quad 104 = 6 \times 17 + 2, \quad \text{sepse } 8 \ge 6$$

Referencat

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Education Endowment Foundation. (2017). Improving mathematics in Key Stages Two and Three: Guidance report. https://educationendowmentfoundation.org.uk/education-evidence/guidance-reports/maths-ks-2-3

Fuchs, L. S., Newman-Gonchar, R., Schumacher, R., Dougherty, B., Bucka, N., Karp, K. S., Woodward, J., Clarke, B., Jordan, N. C., Gersten, R., Jayanthi, M., Keating, B., & Morgan, S. (2021). Assisting students struggling with mathematics: Intervention in the elementary grades (WWC 2021006). Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.

Gervasoni, A., Roche, A., Kalogeropoulos, P., & Downton, A. (2026). A systematic review of mathematics intervention approaches for primary school students who experience difficulties with learning mathematics. Mathematics Education Research Journal. https://doi.org/10.1007/s13394-026-00599-8

National Council of Teachers of Mathematics. (2023). Procedural fluency in mathematics [Qëndrim zyrtar].

National Research Council. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics (J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell, Eds.). National Academy Press. https://doi.org/10.17226/9822

Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. Educational Psychology Review, 27(4), 587–597.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2018). 5 practices for orchestrating productive mathematics discussions (2nd ed.). Corwin.