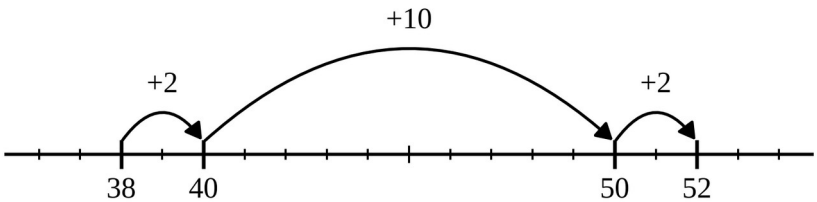
METODIKA E MATEMATIKËS 3

Leksioni 4

Metodika e zbritjes dhe e llogaritjes me gojë deri në 100

Kuptimi, përfaqësimi, arsyetimi dhe diagnostikimi në formimin e mësuesve



shtesa e plotë: 2 + 10 + 2 = 14

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Material universitar për formimin fillestar të mësuesve të arsimit fillor

Tema 4 · Javët IX–X · 4 × 45 minuta

Viti akademik 2026–2027

Metodika e Matematikës 3 · Leksioni 4

Metodika e zbritjes dhe e llogaritjes me gojë deri në 100

Autorja: Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Destinacioni: studentët e programit të formimit fillestar të mësuesve të arsimit fillor. Materiali mbulon temën 4 të programit (javët IX–X), për katër orë akademike dhe për studim të pavarur.

SI TË LEXOHET KY MATERIAL

Përkufizimet, pohimet dhe vetitë paraqiten në kuti me sfond të kaltër të lehtë; vërtetimet vijojnë menjëherë pas tyre dhe mbyllen me shenjën ∎.

Njësitë profesionale, me shirit të errët në krye, ndjekin gjithmonë të njëjtat shtatë hapa: shembulli i zgjidhur, paraqitja në klasë, pyetja diagnostikuese, përgjigja e mundshme e nxënësit, analiza didaktike, alternativa ose kundërshembulli dhe pyetja reflektuese.

Kapitujt 2–12 mbyllen me kutinë «Idetë kryesore të kapitullit», që shërben për përsëritje dhe vetëkontroll.

Dialogët, përgjigjet e nxënësve dhe rastet e gabimeve janë simulime didaktike dhe nuk paraqiten si të dhëna empirike. Figurat, problemet, sekuenca mësimore, protokolli i vëzhgimit dhe rubrika janë hartuar posaçërisht për këtë leksion.

© 2026 Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Përmbajtja

Hyrje **5**
Rëndësia e temës për formimin e mësuesve 5
Vendi i leksionit në lëndë 5
Si të studiohet ky leksion 6
Pyetja hyrëse 6

1. Rezultatet e të nxënit, parakushtet dhe organizimi **7**
1.1 Rezultatet e matshme të të nxënit 7
1.2 Parakushtet konceptuale 8
1.3 Organizimi i katër orëve akademike 8

2. Perspektivat teorike të leksionit **9**
2.1 Njohuria matematikore për mësimdhënie 9
2.2 Mësimdhënia e udhëhequr nga njohja e të menduarit të fëmijës 10
2.3 Kuptimi konceptual dhe rrjedhshmëria procedurale 10
2.4 Konkret–pamor–abstrakt si lidhje ndërmjet përfaqësimeve 11
2.5 Teoria e variacionit 11
2.6 Vlerësimi formues 11
2.7 Statusi epistemik i pohimeve në këtë leksion 12
2.8 Fusha konceptuale e strukturave additive 12
2.9 Koordinimi i regjistrave të përfaqësimit 13
2.10 Ndërveprimi i njohurisë konceptuale dhe procedurale 14

3. Baza matematikore e zbritjes **15**
3.1 Përkufizimi i zbritjes në $\mathbb{N}_0$ 15
3.2 Ekzistenca dhe njëvlerësia e diferencës 15
3.3 Dallimi ndërmjet $\mathbb{N}_0$ dhe $\mathbb{Z}$ 16
3.4 Vetitë e zbritjes dhe kufizimet e tyre 16
3.5 Modeli bashkësior dhe kufijtë e tij 18
3.6 Vërtetimi matematikor dhe argumentimi për nxënësin 18
3.7 Njësi profesionale: zbritja si veprim i kundërt i mbledhjes 18

4. Strukturat semantike të situatave me zbritje **20**
4.1 Katër kuptime të zbritjes 20
4.2 Pse modeli i heqjes nuk mjafton për formimin e konceptit 21
4.3 Klasifikimi i CGI-së dhe pozicioni i së panjohurës 22
4.4 Vështirësia njohëse dhe strategjitë e fëmijëve 23
4.5 Variacioni i kontrolluar: ndryshimi i vetëm një karakteristike 24
4.6 Kundërshembulli ndaj rregullit të fjalëve kyçe 24
4.7 Njësi profesionale: pozicioni i së panjohurës 25

5. Përfaqësimet e zbritjes: përparësitë dhe kufizimet **27**
5.1 Objektet konkrete 27
5.2 Materialet dhjetore 28
5.3 Modeli pjesë–e tërë dhe shiritat krahasues 28
5.4 Boshti numerik 29
5.5 Shënimi simbolik 31
5.6 Krahasimi i përfaqësimeve dhe lidhja ndërmjet tyre 31
5.7 Njësi profesionale: diferenca si largësi në bosht 32

6. Sistemi dhjetor pozicional deri në 100 ..... **33**
6.1 Dhjetëshja si njësi e re 33
6.2 Paraqitja e vetme e numrave dyshifrorë 33
6.3 Leximi dhe shkrimi i numrave në gjuhën shqipe 34
6.4 Roli i zeros 34
6.5 Zbërthimi kanonik dhe jokanonik 35
6.6 Rigrupimi në zbritje 36
6.7 Njësi profesionale: rigrupimi me zero te njësitë 37

7. Llogaritja me gojë si transformim i argumentuar 38
7.1 Çfarë kuptojmë me llogaritje me gojë 38
7.2 Zbërthimi sipas vlerës vendore 38
7.3 Strategjia sekuenciale 39
7.4 Kalimi përmes dhjetëshes 40
7.5 Plotësimi ndërmjet dy numrave 40
7.6 Strategjitë si transformime: përmbledhje 40
7.7 Fleksibiliteti dhe zgjedhja e strategjisë 41
7.8 Njësi profesionale: vlerësimi i një strategjie jostandarde 42

8. Kompensimi dhe ruajtja e diferencës 44
8.1 Strategjia A: zbritja e një sasie më të madhe dhe korrigjimi 44
8.2 Strategjia B: zhvendosja e të dy përbërësve 45
8.3 Krahasimi i shprehur i dy mekanizmave 46
8.4 Kufijtë e vlefshmërisë në $\mathbb{N}_0$ 47
8.5 Dialog i simuluar për analizë 47
8.6 Njësi profesionale: ruajtja e diferencës dhe kufiri i përgjithësimit 48

9. Varësia e shumës nga të mbledhshmit 49
9.1 Ndryshimi i njërit të mbledhshëm 49
9.2 Ruajtja e shumës 49
9.3 Ndryshimi i njëkohshëm i të dy të mbledhshmëve 50
9.4 Variacioni sistematik dhe kalimi nga shembujt te argumentimi 51
9.5 Njësi profesionale: drejtimi i kompensimit te mbledhja 51

10. Varësia e diferencës nga i zbritshmi dhe zbritësi 53
10.1 Ndryshimi i njërit përbërës 53
10.2 Ndryshimi i njëkohshëm i të dy përbërësve 54
10.3 Krahasimi me ndryshimin e shumës 55
10.4 Arsyetimi relacional dhe kuptimi i barazimit 55
10.5 Njësi profesionale: barazi apo jo? 56

11. Analiza e gabimeve dhe ndërhyrja didaktike 58
11.1 Nga etiketimi te hipoteza 58
11.2 Rasti A: zbritja e shifrës më të vogël nga më e madhja 58
11.3 Rasti B: kompensimi në drejtim të gabuar 59
11.4 Rasti C: vlera vendore e paqartë 60
11.5 Rasti D: shenja e barazimit si sinjal për përgjigjen 60
11.6 Rasti E: zgjedhja e veprimit sipas fjalës kyçe 61
11.7 Rasti F: numërimi i skajeve në plotësim 61
11.8 Përmbledhje e rasteve 62

12. Projektimi i sekuencës mësimore dhe mikromësimdhënia 63
12.1 Modeli i projektimit 63
12.2 Një sekuencë e projektuar: ruajtja e diferencës 63
12.3 Mikromësimdhënia si cikël profesional 64

13. Detyra të diferencuara për studentët 66
Niveli I: kuptimi dhe argumentimi 66
Niveli II: analiza dhe krahasimi 66
Niveli III: vërtetimi dhe projektimi 66

14. Zgjidhje dhe udhëzime të argumentuara 68

15. Vlerësimi i formimit profesional 72
15.1 Rubrika e vlerësimit 72
15.2 Detyra përmbyllëse individuale 73
15.3 Detyrë për studim të pavarur 73

16. Përfundime konceptuale dhe profesionale 74

Bibliografia 75
Shënim mbi përdorimin e burimeve 75
Literatura e cituar 75

LEKSIONI 4

Hyrje

Rëndësia e temës për formimin e mësuesve

Zbritja në fushën e numrave deri në 100 duket, në pamje të parë, një temë e thjeshtë aritmetike. Për një të rritur që e ka automatizuar llogaritjen, barazimi 52 − 38 = 14 nuk kërkon asnjë përpjekje të veçantë. Pikërisht kjo lehtësi përbën rrezikun kryesor për mësuesin e ardhshëm: ajo që ne e kryejmë pa menduar, nxënësi i klasës së parë ose të dytë duhet ta ndërtojë hap pas hapi, duke lidhur sasitë, fjalët, figurat dhe simbolet. Mësuesi që nuk e ka analizuar këtë ndërtim e ka të vështirë të kuptojë pse një nxënës shkruan 26 në vend të 14, pse një tjetër numëron të dy skajet në boshtin numerik ose pse një i tretë zgjedh mbledhjen në një problem ku «dikush dha diçka».

Ky leksion e trajton matematikën elementare si objekt studimi profesional. Synimi nuk është që studenti të mësojë të zbresë, sepse këtë e di. Synimi është që ai të kuptojë **pse** procedurat e zbritjes janë të vlefshme, **në cilat kushte** vlejnë, **si** mund të përfaqësohen në mënyra të ndryshme dhe **si** mund të interpretohet mendimi i nxënësit kur ai shfaqet në formë të paplotë ose të gabuar. Kjo kërkesë i përgjigjet një përfundimi të përsëritur në kërkimin mbi formimin e mësuesve: njohuria matematikore e nevojshme për mësimdhënie nuk përputhet me njohurinë që mjafton për të zgjidhur detyrat (Ball et al., 2008; Ma, 1999).

Tema ka edhe një rëndësi strukturore për programin e matematikës. Zbritja deri në 100 është vendi ku takohen tri ide themelore të aritmetikës: marrëdhënia e kundërt ndërmjet mbledhjes dhe zbritjes, sistemi dhjetor pozicional dhe vetitë e veprimeve që lejojnë transformimin e shprehjeve. Strategjitë e llogaritjes me gojë që trajtohen këtu, si kompensimi dhe ruajtja e diferencës, janë forma të hershme të arsyetimit algjebrik. Kur nxënësi shpjegon pse 52 − 38 = 54 − 40, ai po arsyeton për një marrëdhënie ndërmjet shprehjeve dhe jo vetëm për një rezultat numerik (Carpenter et al., 2003).

Vendi i leksionit në lëndë

Leksioni i përket lëndës *Metodika e matematikës 3* dhe mbulon temën me numër 4 të programit, që përkon me javët IX–X. Ai mbështetet në leksionet e mëparshme për bashkësitë, numrat natyrorë dhe veprimet deri në 20. Nga leksioni 3 merren si të njohura mbledhja dhe zbritja deri në 20, çiftet plotësuese të dhjetës dhe kalimi përmes dhjetëshes në rastet njëshifrore. Këtu këto ide zgjerohen në fushën deri në 100, ku struktura dhjetore bëhet vendimtare.

Materiali është hartuar për katër orë akademike prej 45 minutash, gjithsej 180 minuta pa pushimet. Shtrirja e tij e tejkalon atë që mund të trajtohet gojarisht në auditor. Pjesët teorike të seksioneve 2, 3 dhe 6, si dhe zgjidhjet e plota të seksionit 14, janë menduar edhe për studim të

pavarur para dhe pas orës mësimore. Organizimi i propozuar i kohës është një zgjedhje planifikimi dhe mund të përshtatet me orarin institucional.

Si të studiohet ky leksion

Leximi i këtij materiali duhet të jetë aktiv. Studenti duhet të vizatojë modelet, të verifikojë barazimet, të provojë vërtetimet me numra të tjerë dhe të formulojë pyetje që do t'u bënte nxënësve. Për çdo strategji, ai duhet të përcaktojë çfarë duhet të dijë fëmija paraprakisht dhe çfarë përgjigjeje do të dëshmonte të kuptuarit e saj.

Seksionet 3–10 përmbyllen me një **njësi profesionale**, e cila ka gjithmonë të njëjtën strukturë me shtatë elemente: shembull matematikor i zgjidhur, paraqitja në klasën fillore, pyetje diagnostikuese, përgjigje e mundshme e nxënësit, analiza didaktike e saj, alternativë metodike ose kundërshembull dhe pyetje reflektuese për studentin. Struktura e njëjtë synon që studenti ta përvetësojë këtë mënyrë analize si zakon profesional.

Dialogët, përgjigjet e nxënësve dhe rastet e gabimeve në këtë leksion janë **simulime didaktike** të hartuara për formim profesional. Ato mbështeten në tipa gabimesh dhe strategjish të përshkruara në literaturë, por nuk paraqiten si të dhëna empirike të mbledhura nga ndonjë studim. Kur një pohim mbështetet në kërkim shkencor, kjo shënohet me citim pranë tij.

Pyetja hyrëse

> Një nxënës thotë: «Për 52 − 38 bëj 52 − 40 dhe pastaj shtoj 2». Një tjetër thotë: «I bëj numrat 54 dhe 40». A po përdorin të dy të njëjtën ide? Argumentoni pa u mjaftuar me faktin se të dy marrin 14. Shkruani përgjigjen tuaj fillestare dhe rishikojeni pas seksionit 8.
> Kriteri i suksesit për këtë pyetje është që studenti të identifikojë çfarë ndryshon në secilën strategji, çfarë mbetet e pandryshuar dhe pse barazimi që përdoret është i vlefshëm. Shpejtësia e llogaritjes nuk është kriter i kësaj detyre universitare. Do të shohim se dy strategjitë mbështeten në dy marrëdhënie të ndryshme, megjithëse të dyja quhen shpesh me të njëjtin emër: «kompensim».

1. Rezultatet e të nxënit, parakushtet dhe organizimi

NË KËTË KAPITULL

- Rezultatet e matshme të të nxënit
- Parakushtet konceptuale
- Organizimi i katër orëve akademike

1.1 Rezultatet e matshme të të nxënit

Rezultatet e mëposhtme janë formuluar në mënyrë që secili prej tyre të mund të vlerësohet me një detyrë konkrete të seksionit 13 ose me rubrikën e seksionit 15. Në përfundim të leksionit, studenti duhet të jetë në gjendje:

- **RN1.** Të përkufizojë zbritjen në $\mathbb{N}_0$ nëpërmjet mbledhjes, të formulojë kushtin e ekzistencës së diferencës dhe të vërtetojë njëvlerësinë e saj.
- **RN2.** Të vërtetojë identitetet që përdoren në llogaritjen me gojë dhe të përcaktojë për secilin kushtet e vlefshmërisë në $\mathbb{N}_0$.
- **RN3.** Të klasifikojë një situatë problemore sipas strukturës semantike dhe pozicionit të së panjohurës dhe të argumentojë pse folja e tekstit nuk e përcakton veprimin zgjidhës.
- **RN4.** Të përzgjedhë dhe të lidhë të paktën dy përfaqësime për një koncept të caktuar, duke shpjeguar çfarë bën të dukshme dhe çfarë fsheh secili prej tyre.
- **RN5.** Të shpjegojë rigrupimin e dhjetësheve dhe njësive si ndryshim të organizimit të një sasie dhe jo të vetë sasisë.
- **RN6.** Të krahasojë strategji të ndryshme të llogaritjes me gojë sipas transformimit që kryejnë, vetive mbi të cilat mbështeten dhe njohurive që kërkojnë nga nxënësi.
- **RN7.** Të dallojë kompensimin pas zbritjes nga ruajtja e diferencës dhe ta argumentojë dallimin me vërtetim dhe me model vizual.
- **RN8.** Të formulojë dhe të vërtetojë rregullat e ndryshimit të shumës dhe të diferencës dhe të hartojë një varg detyrash me variacion të kontrolluar.
- **RN9.** Të analizojë një përgjigje të gabuar me katër faza: evidenca, hipotezat, pyetjet diagnostikuese dhe ndërhyrja me kontroll transferimi.
- **RN10.** Të projektojë, të realizojë dhe të reflektojë mbi një mikromësimdhënie, duke lidhur synimin, detyrat, evidencën dhe vlerësimin.

1.2 Parakushtet konceptuale

Leksioni supozon se studenti zotëron disa njohuri. E para është renditja në $\mathbb{N}_0$ dhe vetitë ndërruese, shoqëruese dhe e anulimit për mbledhjen, të trajtuara në leksionet e mëparshme. E dyta është kuptimi i bashkësisë së fundme, i nënbashkësisë dhe i kardinalitetit nga leksioni 1. E treta është zbritja deri në 20 dhe strategjitë përkatëse nga leksioni 3. Së fundi, kërkohet një njohje fillestare e numrave të plotë $\mathbb{Z}$, sa për të dalluar një shprehje të papërcaktuar në $\mathbb{N}_0$ nga një shprehje e papërcaktuar në përgjithësi.

Nga ana e nxënësit, parakushtet që mësuesi duhet të kontrollojë para trajtimit të kësaj teme janë: numërimi i qëndrueshëm deri në 100 përpara dhe mbrapa; njohja e çifteve që japin 10; mbledhja dhe zbritja e sigurt deri në 20; dhe të paktën një përvojë e grupimit të objekteve në dhjetëshe. Kur këto mungojnë, strategjitë e seksionit 7 kthehen në procedura të mësuara përmendsh, sepse nxënësi nuk ka bazën mbi të cilën ato mbështeten.

1.3 Organizimi i katër orëve akademike

Tabela 1 paraqet një shpërndarje orientuese të përmbajtjes. Secila orë ka një produkt të studentit, i cili shërben si evidencë për vlerësimin formues gjatë leksionit.

Tabela 1. *Shpërndarja orientuese e katër orëve akademike*

Ora	Përmbajtja kryesore	Produkti i studentit	Seksionet
1	Baza matematikore e zbritjes; strukturat semantike dhe pozicioni i së panjohurës	Klasifikim i argumentuar i problemeve dhe një vërtetim i shkurtër	1–4
2	Përfaqësimet; sistemi dhjetor pozicional; rigrupimi	Shpjegim i një zbritjeje me dy përfaqësime të lidhura	5–6
3	Strategjitë me gojë; kompensimi; ndryshimi i shumës dhe i diferencës	Krahasim i dy strategjive dhe një përgjithësim i vërtetuar	7–10
4	Analiza e gabimeve; projektimi i sekuencës; mikromësimdhënia	Ndërhyrje didaktike me kontroll transferimi dhe detyrë përmbyllëse	11–15

2. Perspektivat teorike të leksionit

NË KËTË KAPITULL

- Njohuria matematikore për mësimdhënie
- Mësimdhënia e udhëhequr nga njohja e të menduarit të fëmijës
- Kuptimi konceptual dhe rrjedhshmëria procedurale
- Konkret–pamor–abstrakt si lidhje ndërmjet përfaqësimeve
- Teoria e variacionit
- Vlerësimi formues
- Statusi epistemik i pohimeve në këtë leksion
- Fusha konceptuale e strukturave additive
- Koordinimi i regjistrave të përfaqësimit
- Ndërveprimi i njohurisë konceptuale dhe procedurale

Ky seksion paraqet perspektivat teorike dhe lidhjet ndërmjet tyre që përdoren në pjesën tjetër të leksionit. Ato nuk trajtohen si etiketa që i ngjiten tekstit. Për secilën shpjegohet mekanizmi didaktik që ajo propozon dhe mënyra si ky mekanizëm ndikon në projektimin e mësimit të zbritjes.

2.1 Njohuria matematikore për mësimdhënie

Ball, Thames dhe Phelps (2008) zhvilluan, mbi bazën e analizës së punës së përditshme të mësuesve, një model të njohurisë matematikore për mësimdhënie (ang. Mathematical Knowledge for Teaching). Modeli dallon ndërmjet njohurisë së përbashkët të përmbajtjes, që përdoret edhe jashtë mësimdhënies, dhe njohurisë së specializuar të përmbajtjes, që lidhet posaçërisht me kërkesat matematikore të mësimdhënies. Ndaj kësaj të fundit, autorët dallojnë edhe dy fusha që e lidhin përmbajtjen me praktikën: njohurinë e përmbajtjes dhe të nxënësve, që ka të bëjë me mënyrat tipike të të menduarit dhe gabimet e tyre, dhe njohurinë e përmbajtjes dhe të mësimdhënies, që ka të bëjë me përzgjedhjen e shembujve, renditjen e detyrave dhe përfaqësimeve.

Dallimi bëhet i qartë me një shembull nga kjo temë. Të llogaritësh $52 - 38 = 14$ është njohuri e përbashkët. Të shpjegosh pse algoritmi «zbrit shifrën më të vogël nga më e madhja» jep 26 dhe pse përgjigjja e gabuar është gjithmonë më e madhe se përgjigjja e saktë është njohuri e specializuar, sepse kërkon analizë matematikore të një procedure të gabuar që duhet rindërtuar dhe analizuar (shih seksionin 11.2). Të parashikosh se ky gabim do të shfaqet te disa nxënës kur zbritja kërkon rigrupim është njohuri e përmbajtjes dhe e nxënësve. Të vendosësh nëse fillon me materiale dhjetore apo me boshtin numerik është njohuri e përmbajtjes dhe e mësimdhënies.

Vetë autorët e ilustrojnë njohurinë e specializuar pikërisht me analizën e metodave jostandarde dhe të gabimeve në një zbritje shumëshifrore (Ball et al., 2008).

Për këtë leksion, modeli ka një pasojë të drejtpërdrejtë: çdo njësi profesionale kërkon që studenti të veprojë në të katër fushat. Ai duhet të llogarisë saktë, të shpjegojë arsyen matematikore, të parashikojë mendimin e nxënësit dhe të marrë një vendim mësimor.

2.2 Mësimdhënia e udhëhequr nga njohja e të menduarit të fëmijës

Programi *Cognitively Guided Instruction* (CGI), i zhvilluar nga Carpenter, Fennema dhe bashkautorët, mbështetet në një tezë të thjeshtë: mësuesit marrin vendime më të mira kur njohin në mënyrë të hollësishme si zgjidhin fëmijët problemet (Carpenter et al., 2014). Kontributi më i përdorur i këtij programi është klasifikimi i problemeve me mbledhje dhe zbritje sipas strukturës semantike: problemet e *bashkimit* dhe të *ndarjes*, ku një sasi ndryshon në kohë; problemet *pjesë–pjesë–e tërë*, ku një sasi e pandryshuar shihet si e përbërë nga dy pjesë; dhe problemet e *krahasimit*, ku krahasohen dy sasi të veçanta. Brenda çdo tipi, problemet dallohen edhe sipas pozicionit të së panjohurës.

Mekanizmi didaktik i CGI-së është ky: fëmijët e vegjël i zgjidhin problemet duke *modeluar drejtpërdrejt* veprimin ose marrëdhënien që përshkruan teksti. Për «Kishte 14, dha 6», fëmija numëron 14 objekte dhe heq 6. Për «Kishte 6, sa i duhen për 14», ai shton objekte duke numëruar nga 6 deri në 14. Me kalimin e kohës, modelimi i drejtpërdrejtë zëvendësohet nga strategji numërimi dhe pastaj nga fakte numerike të rikujtuara ose të nxjerra. Pasoja për mësuesin është se vështirësia e një problemi varet nga struktura dhe pozicioni i së panjohurës, jo vetëm nga madhësia e numrave. Ky klasifikim përdoret në seksionin 4.

2.3 Kuptimi konceptual dhe rrjedhshmëria procedurale

Raporti *Adding It Up* i Këshillit Kombëtar të Kërkimit të SHBA-së përshkruan kompetencën matematikore si të përbërë nga pesë fije të ndërthurura: kuptimi konceptual, rrjedhshmëria procedurale, kompetenca strategjike, arsyetimi përshtatës dhe prirja produktive (National Research Council, 2001). Metafora e fijeve është e qëllimshme. Fijet nuk zhvillohen njëra pas tjetrës, por njëkohësisht, dhe secila e forcon tjetrën.

Për zbritjen deri në 100, kjo do të thotë se rrjedhshmëria në llogaritjen me gojë nuk duhet kuptuar si shpejtësi në zbatimin e një procedure të vetme. Raporti e përkufizon rrjedhshmërinë procedurale si aftësi për t'i kryer procedurat me fleksibilitet, saktësi dhe efikasitet. Fleksibiliteti nënkupton se nxënësi zgjedh $76 - 69 = 7$ nëpërmjet plotësimit dhe jo nëpërmjet zbritjes hap pas hapi. Kjo zgjedhje është e mundur vetëm kur ai kupton marrëdhënien ndërmjet zbritjes dhe mbledhjes, pra kur ka kuptim konceptual. Kur nxënësi mund të shpjegojë pse një strategji është e vlefshme, ai po zhvillon arsyetimin përshtatës.

2.4 Konkret–pamor–abstrakt si lidhje ndërmjet përfaqësimeve

Ideja se të nxënit matematikor kalon nëpër përfaqësime *veprore*, *pamore* dhe *simbolike* lidhet me punën e Bruner-it (1966) dhe në praktikën shkollore njihet shpesh si vargu konkret–pamor–abstrakt. Në këtë leksion, ky model nuk përdoret si procedurë e detyrueshme lineare, sipas së cilës nxënësi duhet të «kalojë» fazën konkrete para se të lejohet të shohë një simbol. Një përdorim i tillë mund të çojë në dy gabime metodike. I pari është qëndrimi i gjatë te materialet konkrete pa i lidhur ato me simbolet. I dyti është braktisja e plotë e modeleve sapo shfaqen simbolet.

Interpretimi që propozohet këtu është *relacional*: të kuptuarit dëshmohet nga aftësia për të lëvizur ndërmjet përfaqësimeve dhe për të shpjeguar korrespondencën ndërmjet tyre. Nxënësi që ndërton 52 me pesë shufra dhe dy kubikë, e vizaton këtë si 5 vija dhe 2 pika dhe shkruan 50 + 2 tregon më shumë kuptim se ai që punon mirë vetëm me njërin nga këto përfaqësime. Pyetja kryesore e mësuesit bëhet: «Ku e shoh këtë hap të shkrimit në modelin tënd?» Ky interpretim zbatohet në seksionin 5.

2.5 Teoria e variacionit

Teoria e variacionit e të nxënit, e zhvilluar nga Marton dhe bashkëpunëtorët, nis nga pohimi se të nxënit e një koncepti kërkon që nxënësi të *dallojë* aspektet e tij kritike. Një aspekt mund të dallohet vetëm kur ai ndryshon, ndërsa aspektet e tjera mbeten të pandryshuara (Marton, 2015). Nëse të gjitha detyrat e një ore kanë të njëjtën strukturë dhe ndryshojnë vetëm numrat, struktura nuk bëhet objekt vëmendjeje, sepse nuk ndryshon kurrë. Teoria dallon disa modele variacioni. *Kontrasti* tregon çfarë nuk është koncepti. *Përgjithësimi* tregon se koncepti mbetet i njëjtë kur ndryshojnë aspektet joqenësore. *Ndarja* e veçon një aspekt duke e ndryshuar vetëm atë. *Bashkimi* ndryshon njëkohësisht disa aspekte, pasi ato janë dalluar veç e veç (Kullberg et al., 2017).

Për mësimin e zbritjes, ky mekanizëm ka pasoja konkrete në projektimin e detyrave. Për të bërë të dukshëm pozicionin e së panjohurës, mësuesi mban të njëjtat numra dhe të njëjtin kontekst dhe ndryshon vetëm vendin e së panjohurës (seksioni 4.5). Për të bërë të dukshëm efektin e zbritësit mbi diferencën, ai mban të zbritshmin të pandryshuar dhe e ndryshon zbritësin me hapa të rregullt (seksioni 10). Pasoja e kundërt është po aq e rëndësishme: kur ndryshojnë njëkohësisht numrat, konteksti dhe struktura, mësuesi nuk mund të përcaktojë cili ndryshim e shkaktoi vështirësinë e nxënësit.

2.6 Vlerësimi formues

Vlerësimi formues kuptohet këtu si përdorimi i evidencës për të nxënit e nxënësve për të përshtatur mësimdhënien dhe të nxënit gjatë procesit, jo vetëm në fund të tij. Rishikimi i Black dhe Wiliam (1998) i dha kësaj ideje një bazë të gjerë kërkimore. Në punën e tyre të mëvonshme teorike, autorët e organizuan praktikën formuese rreth pesë strategjive: sqarimi i synimeve dhe i

kritereve të suksesit; organizimi i diskutimeve dhe i detyrave që nxjerrin në pah evidencën e të kuptuarit; informimi kthyes që e çon nxënësin përpara; nxitja e nxënësve si burime për njëri-tjetrin; dhe nxitja e nxënësve si zotërues të të nxënit të tyre (Black & Wiliam, 2009).

Në këtë leksion, vlerësimi formues ka një formë të veçantë: *pyetjen diagnostikuese*. Ajo është një pyetje që dallon dy ose më shumë mënyra të të menduarit, të cilat mund të japin të njëjtën përgjigje në një detyrë të zakonshme. Për shembull, pyetja «A mund ta ndërtosh 47 me vetëm tri shufra dhjetëshe?» dallon nxënësin që e kupton 47 si sasi nga ai që e njeh vetëm si «4 dhe 7». Për këtë arsye, analiza e gabimeve në seksionin 11 nuk ndalet te ndërhyrja. Ajo kërkon gjithmonë një *kontroll transferimi*: një detyrë të re që tregon nëse ndryshimi i të kuptuarit u ruajt edhe jashtë rastit të trajtuar.

2.7 Statusi epistemik i pohimeve në këtë leksion

Një tekst universitar duhet të bëjë të qartë mbi çfarë mbështetet secili pohim. Në këtë leksion dallohen katër lloje pohimesh. **Pohimet matematikore**, si përkufizimet, pohimet dhe identitetet, vërtetohen në tekst dhe vlefshmëria e tyre nuk varet nga asnjë burim. **Pohimet e mbështetura në kërkim**, si klasifikimi i problemeve sipas CGI-së, dallimi ndërmjet strategjive sekuenciale dhe atyre me zbërthim ose karakteri sistematik i disa gabimeve procedurale, shoqërohen me citim. **Interpretimet pedagogjike**, si rekomandimi për të lidhur dy përfaqësime ose renditja e propozuar e detyrave, janë propozime të arsyetuara të autores dhe paraqiten si të tilla. **Shembujt, dialogët dhe rastet** janë hartuar posaçërisht për këtë leksion dhe nuk duhen lexuar si rezultate empirike.

Ky dallim ka edhe një qëllim formues për studentin. Mësuesi i ardhshëm duhet të mësojë të pyesë: «A është ky pohim i vërtetuar, i mbështetur në studime apo një propozim i arsyeshëm?» Pyetja vlen edhe për materialet që do të gjejë në tekstet shkollore dhe në udhëzuesit metodikë.

2.8 Fusha konceptuale e strukturave additive

Vergnaud (2009) e trajton zhvillimin e koncepteve përmes marrëdhënieve ndërmjet situatave, organizimit të veprimtarisë dhe njohurive që përdoren në të. Një fushë konceptuale përfshin situata dhe koncepte të lidhura: një koncept merr kuptim në shumë situata, ndërsa një situatë zakonisht kërkon disa koncepte. Për strukturat additive, kjo qasje e zgjeron analizën përtej emrit të veprimit. Organizimi i qëndrueshëm i veprimtarisë për një klasë situatash përshkruhet përmes skemës. Dallimi ndërmjet njohurisë së përdorur në veprim dhe njohurisë së shprehur në gjuhë ose simbole ndihmon të analizohet pse një nxënës mund të veprojë me sukses pa e formuluar ende parimin që përdor.

Në analizën që zhvillojmë këtu, një familje problemesh është një bashkësi detyrash që ruajnë një marrëdhënie sasiore të caktuar, edhe kur ndryshojnë emrat, numrat ose objektet. Për shembull, «kishte 18, dha 7, sa mbetën?» dhe «kishte 52, shpenzoi 16, sa mbetën?» kanë të njëjtën strukturë të gjendjes fillestare, ndryshimit zvogëlues dhe gjendjes përfundimtare.

Ndryshimi i madhësisë së numrave ndryshon kërkesën e llogaritjes; ai nuk ndryshon rolin e së panjohurës. Nëse kërkohet gjendja fillestare, marrëdhënia semantike ruhet, por mënyra e gjetjes së saj ndryshon.

Zbatimi në seksionin 4 kërkon që studenti të dallojë rolin e numrit si gjendje, ndryshim ose diferencë krahasimi. Për I si gjendje fillestare, F si gjendje përfundimtare dhe $t \geq 0$ si madhësi ndryshimi, rritja modelohet me $F = I + t$ dhe zvogëlimi me $F = I - t$, kur $I \geq t$. Në një marrëdhënie pjesë–tërësi kemi $T = P_1 + P_2$; në krahasim kemi $M = m + d$. Shkrimi i të njëjtit barazim numerik nuk i bën këto role semantike të njëjta.

Për shembull, «kishte 27 dhe dha 9», «kishte 27 dhe tani ka 18» dhe «dha 9 dhe tani ka 18» kërkojnë përkatësisht $27 - 9$, $27 - 18$ dhe $18 + 9$. Mësuesi duhet të dallojë vështirësinë e modelimit nga ajo e llogaritjes. Një nxënës mund të llogarisë të gjitha veprimet dhe përsëri të mos zgjedhë ekuacionin e duhur. Për analizën profesionale kërkohen dy dëshmi të veçanta: si u ndërtua marrëdhënia dhe si u gjet vlera e së panjohurës.

2.9 Koordinimi i regjistrave të përfaqësimit

Duval (2006) dallon transformimet brenda një regjistri përfaqësimi nga kalimet ndërmjet regjistrave. Trajtimi ndryshon paraqitjen brenda të njëjtit sistem, ndërsa konvertimi kërkon kalimin në një sistem tjetër duke ruajtur objektin ose marrëdhënien e përfaqësuar. Në këtë perspektivë, vështirësitë e të nxënit mund të lidhen me koordinimin e paraqitjeve dhe jo vetëm me kryerjen e veprimeve. Dallimi është i dobishëm për të analizuar kalimin nga teksti i një problemi te një skemë dhe më pas te ekuacioni përkatës.

Në zbatimin që ndërtojmë për këtë leksion, $52 - 38$ dhe $52 - 40 + 2$ janë dy shprehje në regjistrin simbolik. Një shirit me gjatësi 52, i ndarë në një pjesë 38 dhe një pjesë të panjohur, është një paraqitje diagramatike. Kalimi ndërmjet tyre kërkon identifikimin e së tërës, pjesës së njohur dhe pjesës që kërkohet. Fakti që mësuesi i vendos të dyja në tabelë nuk provon se nxënësi e ka ndërtuar lidhjen; kjo lidhje duhet të artikulohet përmes pyetjeve dhe veprimeve të nxënësit.

Për seksionin 5, kjo jep një kriter të kontrollueshëm: studenti duhet të shpjegojë çfarë përfaqëson çdo pjesë e modelit në barazim. Te $41 - 18$, shkëmbimi i një dhjetësheje me dhjetë njësi përputhet me $41 = 30 + 11$; heqja e 18 përputhet me heqjen e $10 + 8$. Shkrimi $(30 - 10) + (11 - 8) = 23$ bëhet shprehje e marrëdhënies së modeluar. Pyetja «Ku shfaqet 11 në model?» kontrollon lidhjen që një rezultat numerik i saktë nuk e zbulon vetë.

Koordinimi nuk kërkon që çdo detyrë të përdorë të gjitha modelet. Materialet dhjetore bëjnë të dukshëm shkëmbimin e njësive, shiritat marrëdhënien e pjesëve dhe boshti numerik largësinë ose hapat. Në një bosht të shkallëzuar, intervalet e barabarta duhet të përfaqësojnë ndryshime të barabarta. Në një bosht të hapur skematik, madhësitë e hapave lexohen nga etiketat. Ngatërrimi i këtyre dy konventave mund të prodhojë interpretime të gabuara të një figure të saktë.

2.10 Ndërveprimi i njohurisë konceptuale dhe procedurale

Rittle-Johnson, Schneider dhe Star (2015) shqyrtojnë marrëdhënien ndërmjet njohurisë konceptuale dhe procedurale dhe argumentojnë, mbi bazën e studimeve të analizuara, se ndikimi mund të jetë i dyanshëm. Përmirësimi i procedurave mund të mbështesë zhvillimin konceptual dhe të kuptuarit konceptual mund të mbështesë procedurat. Ky përfundim nuk përcakton një rend të vetëm mësimor për çdo përmbajtje dhe çdo nxënës. Ai kërkon kujdes ndaj kundërvënies së prerë ndërmjet të kuptuarit dhe ushtrimit procedural.

Për zbritjen deri në 100, një organizim i arsyeshëm i këtij ndërveprimi mund të ndërtohet mbi 43 − 19. Nxënësi mund të nisë me procedurën 43 − 20 + 1. Diskutimi i arsyes pse shtohet 1 e orienton drejt ruajtjes së rezultatit pas një ndryshimi të përkohshëm të zbritësit. Më pas, zbatimi te 63 − 29 kontrollon nëse marrëdhënia është transferuar. Një detyrë e katërt, 63 − 31, kërkon ndryshimin e drejtimit të korrigjimit: 63 − 30 − 1. Në këtë sekuencë, zbatimi procedural prodhon material për analizë konceptuale dhe analiza konceptuale udhëheq një zbatim të ri.

Automatizimi i fakteve numerike ka vlerë kur çliron vëmendjen për marrëdhënie më komplekse. Megjithatë, një përgjigje e shpejtë nuk zbulon vetvetiu njohurinë që e prodhoi. Për këtë arsye, në detyrat universitare të këtij leksioni, rrjedhshmëria analizohet përmes saktësisë, kontrollit, përshtatshmërisë së strategjisë dhe mundësisë për ta shpjeguar atë. Ky është një kriter didaktik i përdorur në tekst; nuk pretendohet si instrument psikometrik i standardizuar.

Këto tri perspektiva plotësuese përdoren për analizën e detyrave dhe të shpjegimeve; shembujt e këtij seksioni janë zbatime didaktike të hartuara për leksionin. Ato nuk paraqiten si prova eksperimentale të efektivitetit të një sekuence të caktuar.

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Njohuria matematikore për mësimdhënie përfshin, përveç llogaritjes, shpjegimin e arsyes, parashikimin e mendimit të nxënësit dhe vendimin mësimor.
- Vështirësia e një problemi varet nga struktura semantike dhe pozicioni i së panjohurës, jo vetëm nga madhësia e numrave.
- Një aspekt i konceptit bëhet i dallueshëm kur ndryshon, ndërsa aspektet e tjera mbeten të pandryshuara.
- Të kuptuarit dëshmohet nga lidhja ndërmjet përfaqësimeve dhe nga evidenca që mësuesi nxjerr me pyetje diagnostikuese.

3. Baza matematikore e zbritjes

NË KËTË KAPITULL

- Përkufizimi i zbritjes në $\mathbb{N}_0$
- Ekzistenca dhe njëvlerësia e diferencës
- Dallimi ndërmjet $\mathbb{N}_0$ dhe $\mathbb{Z}$
- Vetitë e zbritjes dhe kufizimet e tyre
- Modeli bashkësior dhe kufijtë e tij
- Vërtetimi matematikor dhe argumentimi për nxënësin
- Njësi profesionale: zbritja si veprim i kundërt i mbledhjes

Ky seksion e vendos zbritjen mbi një bazë të saktë matematikore. Qëllimi nuk është që ky formalizëm të paraqitet në klasën fillore. Qëllimi është që mësuesi të dijë saktësisht çfarë është e vërtetë, në cilat kushte është e vërtetë dhe pse. Pa këtë njohuri, mësuesi rrezikon të mësojë rregulla që vlejnë vetëm për disa shembuj ose që duhet të «çmësohen» më vonë.

3.1 Përkufizimi i zbritjes në $\mathbb{N}_0$

Përdorim shënimin $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ për bashkësinë e numrave të plotë jonegativë. Supozojmë të njohura mbledhjen dhe vetitë e saj: ndërrueshmërinë, shoqërueshmërinë, elementin neutral 0 dhe vetinë e anulimit, sipas së cilës $b + c = b + d$ sjell $c = d$. Renditja në $\mathbb{N}_0$ përkufizohet nëpërmjet mbledhjes:

$$b \le a \iff \text{ekziston } c \in \mathbb{N}_0 \text{ i tillë që } b + c = a. \tag{3.1}$$

Përkufizimi 3.1. Le të jenë $a, b \in \mathbb{N}_0$ me $a \ge b$. *Diferencë* e a-së dhe b-së quhet numri $c \in \mathbb{N}_0$ për të cilin $b + c = a$. Diferenca shënohet $a - b$. Numri a quhet *i zbritshmi*, b *zbritësi*, ndërsa $a - b$ *diferenca*.

$$a - b = c \iff b + c = a, \quad \text{ku } a, b, c \in \mathbb{N}_0 \text{ dhe } a \ge b. \tag{3.2}$$

Përkufizimi e paraqet zbritjen si *veprim të kundërt* të mbledhjes: diferenca $a - b$ është i mbledhshmi që mungon në barazimin $b + \square = a$. Për shembull, $13 - 8 = 5$, sepse $8 + 5 = 13$. Kjo marrëdhënie nuk është një «metodë kontrolli» e shtuar pas zbritjes. Ajo është vetë përmbajtja e konceptit, dhe kjo ka rëndësi të madhe metodike.

3.2 Ekzistenca dhe njëvlerësia e diferencës

Që përkufizimi 3.1 të jetë korrekt, duhet treguar se numri c ekziston dhe se ai është i vetëm. Vetëm atëherë simboli $a - b$ përcakton një numër dhe jo një bashkësi numrash.

Pohimi 3.1. Për $a, b \in \mathbb{N}_0$, ekuacioni $b + x = a$ ka zgjidhje në $\mathbb{N}_0$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $a \geq b$. Kur zgjidhja ekziston, ajo është e vetme.

Vërtetim. Ekzistenca rrjedh drejtpërdrejt nga përkufizimi (3.1) i renditjes: $a \geq b$ do të thotë pikërisht se ekziston $c \in \mathbb{N}_0$ me $b + c = a$. Anasjelltas, nëse $b + c = a$ për ndonjë $c \in \mathbb{N}_0$, atëherë sipas (3.1) kemi $b \leq a$. Për njëvlerësinë, supozojmë se $b + c = a$ dhe $b + d = a$. Atëherë $b + c = b + d$ dhe nga vetia e anulimit rrjedh $c = d$. ∎

Vërejtja e mëposhtme ka rëndësi për mësuesin. Kur renditja përkufizohet si në (3.1), kushti $a \geq b$ *nuk është një kufizim i shtuar* mbi zbritjen. Ai është saktësisht kushti i ekzistencës së diferencës. Në arsimin fillor, renditja ndërtohet zakonisht përmes krahasimit të sasive ose pozicionit në vargun e numrave. Në këtë rast, lidhja «$a \geq b$ atëherë dhe vetëm atëherë kur ekziston c me $b + c = a$» është një pohim që nxënësi e ndesh në mënyrë intuitive: «nëse kam më shumë, mund të shtoj diçka te më pak për të arritur te më shumë».

Njëvlerësia, nga ana e saj, e justifikon kontrollin e zbritjes me mbledhje. Nëse nxënësi gjen $63 - 27 = 36$ dhe verifikon se $27 + 36 = 63$, ai mund të jetë i sigurt se 36 është *e vetmja* përgjigje e saktë. Asnjë numër tjetër nuk mund ta plotësojë 27 deri në 63.

3.3 Dallimi ndërmjet $\mathbb{N}_0$ dhe $\mathbb{Z}$

Në $\mathbb{N}_0$, zbritja është *veprim i pjesshëm*: ajo nuk është e përcaktuar për çdo çift të renditur (a, b). Shprehja $4 - 7$ nuk ka vlerë në $\mathbb{N}_0$, sepse nuk ekziston asnjë $c \in \mathbb{N}_0$ me $7 + c = 4$. Kur bashkësia zgjerohet në bashkësinë $\mathbb{Z}$ të numrave të plotë, çdo element ka të kundërtin e vet dhe zbritja përkufizohet si $a - b = a + (-b)$. Në $\mathbb{Z}$, zbritja është e përcaktuar për çdo çift dhe $4 - 7 = -3$.

Ky dallim ka pasojë të drejtpërdrejtë për gjuhën e mësuesit. Formulimi absolut «$4 - 7$ nuk bëhet» është i pasaktë, sepse ai do të kundërshtohet nga vetë matematika që nxënësi do të mësojë më vonë. Formulimi i saktë dhe i përshtatshëm për klasën e parë është: «Me numrat që njohim tani, nuk mund të heqim 7 nga 4». Ai e lidh pamundësinë me fushën numerike dhe e lë të hapur zgjerimin e mëvonshëm. Një shembull i njohur nga jeta, si temperatura nën zero, mund të përmendet si paralajmërim i asaj që do të vijë, pa u trajtuar në këtë fazë.

3.4 Vetitë e zbritjes dhe kufizimet e tyre

Më poshtë paraqiten vetitë kryesore të zbritjes në $\mathbb{N}_0$. Për secilën jepet kushti i vlefshmërisë dhe një vërtetim i shkurtër që mbështetet vetëm në përkufizimin 3.1. Çdo vërtetim ndjek të njëjtën skemë: për të treguar se një numër d është i barabartë me një diferencë $x - y$, mjafton të tregojmë se $y + d = x$. Këtë e lejon njëvlerësia e diferencës.

Vetia 1: zbritja e zeros dhe diferenca zero. Për çdo $a \in \mathbb{N}_0$ vlejnë $a - 0 = a$ dhe $a - a = 0$, sepse $0 + a = a$ dhe $a + 0 = a$. Zeroja është neutrale vetëm nga e djathta për zbritjen; nuk është element neutral i dyanshëm i këtij veprimi.

Vetia 2: zbritja e një shume. Për a, b, c ∈ $\mathbb{N}_0$ me b + c ≤ a vlen:

$$a - (b + c) = (a - b) - c. \tag{3.3}$$

Vërtetim. Nga b + c ≤ a rrjedh b ≤ a, prandaj a − b ekziston. Gjithashtu c ≤ a − b, sepse b + c ≤ a = b + (a − b), dhe pas anulimit të b-së kemi c ≤ a − b. Le të jetë d = (a − b) − c. Atëherë c + d = a − b, pra b + c + d = a. Sipas njëvlerësisë, d = a − (b + c). ∎

Kjo veti justifikon zbritjen e një numri pjesë-pjesë: 64 − 23 = 64 − (20 + 3) = (64 − 20) − 3 = 41. Ajo justifikon edhe kalimin përmes dhjetëshes: 43 − 7 = 43 − (3 + 4) = 40 − 4 = 36.

Vetia 3: zbritja e një diference. Për a, b, c ∈ $\mathbb{N}_0$ me c ≤ b ≤ a vlen:

$$a - (b - c) = (a - b) + c. \tag{3.4}$$

Vërtetim. Mjafton të tregojmë se (b − c) + [(a − b) + c] = a. Duke rirenditur të mbledhshmit, marrim [(b − c) + c] + (a − b) = b + (a − b) = a. ∎

Vetia 3 është baza matematikore e strategjisë së kompensimit pas zbritjes (seksioni 8.1). Në rastin 52 − 38 = 52 − (40 − 2) = (52 − 40) + 2, numri 38 shkruhet si diferencë dhe zbritja e kësaj diference zëvendësohet me një zbritje dhe një mbledhje.

Vetia 4: mbledhja dhe zbritja e kombinuar. Për a, b, c ∈ $\mathbb{N}_0$ me b ≤ a vlen (a + c) − b = (a − b) + c. Vërtetimi është i ngjashëm: b + (a − b) + c = a + c. Kjo veti lejon, për shembull, 47 + 30 − 27 = (47 − 27) + 30 = 50.

Zbritja nuk është ndërruese. Në $\mathbb{Z}$ kemi 8 − 3 = 5 dhe 3 − 8 = −5. Në $\mathbb{N}_0$ situata është edhe më e qartë: për a > b, shprehja b − a nuk është as e përcaktuar. Barazimi a − b = b − a vlen vetëm kur a = b. Në atë rast, të dyja anët janë zero.

Zbritja nuk është shoqëruese. Për shembull, (9 − 4) − 2 = 3, ndërsa 9 − (4 − 2) = 7. Rezultati mund të përgjithësohet. Kur të dyja anët janë të përcaktuara në $\mathbb{N}_0$, nga vetia 2 dhe vetia 3 marrim (a − b) − c = a − (b + c) dhe a − (b − c) = (a − b) + c. Diferenca ndërmjet tyre është saktësisht 2c. Prandaj barazimi (a − b) − c = a − (b − c) vlen atëherë dhe vetëm atëherë kur c = 0. Një shembull numerik nuk mjafton për të treguar se vetia nuk vlen për asnjë rast, por mjafton për ta hedhur poshtë si veti universale. Analiza e plotë tregon gjithashtu se ajo dështon për çdo c ≠ 0.

Diferenca nuk e kalon të zbritshmin. Për a ≥ b vlen a − b ≤ a, me barazim atëherë dhe vetëm atëherë kur b = 0. Kjo rrjedh nga a = b + (a − b). Prandaj formulimi i shpeshtë «zbritja e zvogëlon gjithmonë numrin» nuk është i plotë. Kur zbritësi është zero, rezultati mbetet i njëjtë. Në $\mathbb{Z}$, zbritja e një numri negativ e rrit rezultatin. Formulimi i saktë për $\mathbb{N}_0$ është: «diferenca është më e vogël se i zbritshmi kur zbritësi është më i madh se zero».

3.5 Modeli bashkësior dhe kufijtë e tij

Në leksionin 1, numri natyror u ndërtua si kardinal i një bashkësie të fundme. Zbritja ka një interpretim bashkësior të natyrshëm.

Pohimi 3.2. Nëse A është bashkësi e fundme dhe $B \subseteq A$, atëherë $|A \setminus B| = |A| - |B|$.

Vërtetim. Bashkësitë B dhe $A \setminus B$ janë të shkëputura dhe bashkimi i tyre është A. Prandaj $|B| + |A \setminus B| = |A|$. Sipas përkufizimit 3.1, $|A \setminus B| = |A| - |B|$. ∎

Kushti $B \subseteq A$ është thelbësor. Ky model përshkruan *heqjen* e elementeve që i përkasin bashkësisë fillestare dhe situatat *pjesë–e tërë*. Ai nuk përshkruan drejtpërdrejt *krahasimin*. Kur Ana ka 14 lapsa dhe Bora 6, bashkësitë e lapsave të tyre janë të shkëputura dhe asnjëra nuk është nënbashkësi e tjetrës. Matematikisht, krahasimi modelohet me një *çiftëzim*. Ndërtojmë një pasqyrim injektiv f nga bashkësia e Borës në bashkësinë e Anës, duke vendosur përballë çdo lapsi të Borës një laps të Anës. Diferenca është numri i elementeve të Anës që mbeten pa çift: $|A| - |B| = |A \setminus f(B)|$. Kjo është pikërisht ajo që bën fëmija kur rreshton dy rreshta objektesh njëri përballë tjetrit. Analiza tregon pse krahasimi kërkon një përfaqësim tjetër, siç janë shiritat e rreshtuar në Figurën 2, dhe pse nuk mund të reduktohet te heqja pa një hap të ndërmjetëm.

3.6 Vërtetimi matematikor dhe argumentimi për nxënësin

Vërtetimet e mësipërme i drejtohen studentit universitar. Nxënësi i klasës së dytë nuk vërteton vetinë 2 me ndryshore, por ai mund të *argumentojë* për të. Ky argumentim mbështetet në një *shembull përfaqësues*. Është një rast i veçantë, por i përzgjedhur dhe i paraqitur në mënyrë që struktura e tij të jetë e dukshme dhe e transferueshme. Nxënësi mund të thotë: «Kam 64 kokrra. Heq 20, pastaj heq 3. Kam hequr gjithsej 23, pra është njësoj sikur të kisha hequr 23 menjëherë».

Mësuesi duhet të dallojë tri nivele argumentimi. Në nivelin e parë, nxënësi verifikon disa raste numerike dhe konstaton se «del njësoj». Ky është argumentim empirik që mund të sugjerojë një hamendësim, por nuk përbën vërtetim të pohimit universal, sepse disa raste nuk garantojnë të gjitha rastet. Në nivelin e dytë, nxënësi shpjegon një rast të vetëm duke iu referuar veprimit me sasitë, pa u mbështetur te numrat konkretë. Ky është argument me shembull përfaqësues, i vlefshëm për moshën. Në nivelin e tretë, që i përket studentit, pohimi formulohet me ndryshore, shoqërohet me kushtet e vlefshmërisë dhe vërtetohet nga përkufizimet. Rëndësia e këtij dallimi për mësuesin është e qartë: ai duhet ta nxisë nxënësin nga niveli i parë drejt të dytit dhe të mos e pranojë konstatimin «provova tri herë dhe doli» si shpjegim.

3.7 Njësi profesionale: zbritja si veprim i kundërt i mbledhjes

Shembull matematikor i zgjidhur. Llogarisim $63 - 27$ dhe justifikojmë rezultatin. Kërkojmë numrin që, i shtuar te 27, jep 63: $27 + 3 = 30$, $30 + 30 = 60$, $60 + 3 = 63$. Shtesa e plotë është $3 + 30 + 3 = 36$. Sipas përkufizimit 3.1, $63 - 27 = 36$, sepse $27 + 36 = 63$. Sipas pohimit 3.1, kjo është e vetmja vlerë e mundshme.

Paraqitja në klasën fillore. Nxënësve u paraqitet një shirit i plotë me etiketën 63, i ndarë në dy pjesë: 27 dhe një pjesë pa etiketë. Mësuesi kërkon katër barazime për të njëjtën figurë: 27 + □ = 63, □ + 27 = 63, 63 − 27 = □ dhe 63 − □ = 27. Lidhja ndërmjet mbledhjes dhe zbritjes bëhet kështu e dukshme si katër lexime të së njëjtës marrëdhënie pjesë–e tërë.

Pyetje diagnostikuese. «Ti gjete 63 − 27 = 36. Pa e bërë sërish zbritjen, si mund ta dish që është e saktë?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. Nxënësi A: «E bëra edhe një herë dhe më doli përsëri 36». Nxënësi B: «Bëj 63 + 27 dhe shoh nëse del». Nxënësi C: «27 dhe 36 bëjnë 63».

Analiza didaktike. Përgjigjja A nuk jep ende dëshmi se nxënësi e përdor lidhjen e zbritjes me mbledhjen. Ajo nuk mjafton për të përfunduar se ai nuk e kupton këtë lidhje; duhet një pyetje pasuese. Përsëritja e së njëjtës procedurë riprodhon edhe gabimet sistematike, prandaj nuk është kontroll i vërtetë. Përgjigjja B tregon se nxënësi ka mbajtur mend se «zbritja kontrollohet me mbledhje», por nuk e di cilët numra duhet të mblidhen. Kjo është një procedurë pa kuptim konceptual. Përgjigjja C përputhet me përkufizimin 3.1 dhe mbështet hipotezën e të kuptuarit të marrëdhënies pjesë–e tërë. Shpjegimi me model dhe zbatimi në një rast të ri e forcojnë këtë evidencë.

Alternativë metodike. Për nxënësin B, mësuesi kthehet te shiriti dhe pyet: «Cili është i tërë? Cilat janë pjesët? Cilat pjesë duhet të bashkosh për të marrë të tërën?» Rezultati 63 + 27 = 90 i krahasohet figurës, ku 90 nuk shfaqet askund. Kundërshembulli e bën të dukshëm gabimin pa e shpallur atë.

Pyetje reflektuese për studentin. Pse kontrolli me mbledhje e zbulon gabimin «zbrit shifrën më të vogël nga më e madhja», ndërsa përsëritja e zbritjes nuk e zbulon? Lidheni përgjigjen me njëvlerësinë e diferencës.

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Në $\mathbb{N}_0$, $a - b$ është numri i vetëm c për të cilin $b + c = a$; ai ekziston atëherë dhe vetëm atëherë kur $a \geq b$.
- Çdo identitet i llogaritjes me gojë ka një kusht vlefshmërie, i cili në klasë shfaqet si kufi i strategjisë.
- Zbritja nuk është as ndërruese, as shoqëruese; kur janë të përcaktuara, $(a - b) - c$ dhe $a - (b - c)$ ndryshojnë me $2c$.
- Disa shembuj numerikë sugjerojnë një rregull, por nuk e vërtetojnë; argumenti me shembull përfaqësues është ura ndërmjet tyre dhe vërtetimit.

4. Strukturat semantike të situatave me zbritje

NË KËTË KAPITULL

- Katër kuptime të zbritjes
- Pse modeli i heqjes nuk mjafton për formimin e konceptit
- Klasifikimi i CGI-së dhe pozicioni i së panjohurës
- Vështirësia njohëse dhe strategjitë e fëmijëve
- Variacioni i kontrolluar: ndryshimi i vetëm një karakteristike
- Kundërshembulli ndaj rregullit të fjalëve kyçe
- Njësi profesionale: pozicioni i së panjohurës

I njëjti barazim mund të përshkruajë situata me kuptim krejt të ndryshëm. Për mësuesin, kjo do të thotë se zgjedhja e veprimit nga nxënësi nuk mund të reduktohet në njohjen e një «fjale kyçe». Ajo kërkon analizën e marrëdhënies ndërmjet sasive, të rolit të së panjohurës dhe të veprimit që e gjen atë. Burimet profesionale për mësimdhënien e zbritjes e trajtojnë krahasimin si strukturë të veçantë, krahas heqjes dhe pjesë–së tërë (National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics [NCETM], pa datë-b). Kjo na orienton që të mos e kufizojmë konceptin vetëm te heqja.

4.1 Katër kuptime të zbritjes

Tabela 2 paraqet katër situata me të njëjtët numra, 14 dhe 6. Situatat ndryshojnë vetëm në marrëdhënien ndërmjet sasive. Kolona e fundit tregon barazimin që *modelon* situatën. Ai nuk duhet ngatërruar me veprimin që e *zgjidh* atë.

Tabela 2. *Katër kuptime të zbritjes me të njëjtët numra*

Struktura	Situata e hartuar për analizë	Marrëdhënia ndërmjet sasive	Barazimi modelues
Heqje	Kishte 14 lapsa. Dhuroi 6. Sa lapsa i mbetën?	Një sasi ndryshon në kohë; kërkohet gjendja përfundimtare.	14 − 6 = □
Pjesë që mungon	Në kuti janë 14 lapsa: 6 të kuq, të tjerët blu. Sa janë blu?	Një sasi e pandryshuar përbëhet nga dy pjesë; kërkohet njëra pjesë.	6 + □ = 14
Krahasim	Ana ka 14 lapsa, Bora ka 6. Sa lapsa më shumë ka Ana?	Dy sasi të veçanta ekzistojnë njëkohësisht; kërkohet diferenca.	14 − 6 = □
Plotësim	Bora ka 6 lapsa. Sa lapsa i duhen që të ketë 14?	Një sasi duhet rritur deri te një sasi e synuar; kërkohet shtesa.	6 + □ = 14

Në situatën e *heqjes* ka një ngjarje në kohë: diçka largohet dhe sasia fillestare zvogëlohet. Në situatën *pjesë që mungon* nuk ndodh asnjë ngjarje. Lapsat blu dhe të kuq janë njëkohësisht në kuti dhe pyetja ka të bëjë me përbërjen e një sasie të pandryshuar. Në *krahasim*, dy sasitë mbeten të paprekura. Asgjë nuk hiqet, dhe diferenca është një marrëdhënie ndërmjet tyre: sa më shumë ka njëra, ose sa më pak ka tjetra. Në *plotësim*, një sasi rritet deri te një objektiv. Kjo situatë modelohet natyrshëm me mbledhje me të mbledhshëm të panjohur dhe zgjidhet shpesh duke numëruar përpara.

Të katër situatat kanë të njëjtën përgjigje, 8, dhe të gjitha mund të zgjidhen me 14 − 6. Pyetja metodike është tjetër: çfarë veprimi *përfytyron* fëmija që ende nuk e ka abstraguar marrëdhënien? Fëmija që modelon drejtpërdrejt i trajton ndryshe këto situata. Te heqja numëron 14 dhe heq 6. Te krahasimi rreshton 14 dhe 6 dhe numëron të tepërtat. Te plotësimi numëron nga 6 deri në 14 (Carpenter et al., 2014). Qëllimi i mësimdhënies është që fëmija të kuptojë se këto veprime të ndryshme fizike përshkruhen nga i njëjti barazim. Ky është një akt abstraksioni, jo një fakt i dhënë.

Ndarja në katër kuptime përdoret këtu për analizë mësimore. Klasifikimet kërkimore mund t'i grupojnë ndryshe. Në klasifikimin e CGI-së, për shembull, «plotësimi» është një problem *bashkimi me ndryshim të panjohur*, ndërsa «pjesa që mungon» është problem *pjesë–pjesë–e tërë me pjesë të panjohur*. Lidhja ndërmjet dy klasifikimeve trajtohet në seksionin 4.3.

4.2 Pse modeli i heqjes nuk mjafton për formimin e konceptit

Në shumë tekste shkollore, zbritja paraqitet fillimisht dhe për një kohë të gjatë vetëm si heqje: «kishte, iku, mbeti». Kjo zgjedhje është e kuptueshme, sepse heqja është kuptimi më i lehtë për t'u modeluar me objekte. Megjithatë, një koncept i ndërtuar vetëm mbi heqjen ka katër kufizime.

I pari është *kufizimi semantik*. Nxënësi që e njeh zbritjen vetëm si heqje nuk e njeh atë në situatat e krahasimit, ku asgjë nuk hiqet. Ai e ka të vështirë të pranojë se pyetja «Sa më shumë ka Ana?» zgjidhet me zbritje. Siç u tregua në seksionin 3.5, krahasimi kërkon një model tjetër matematikor, çiftëzimin, dhe nuk mund të reduktohet drejtpërdrejt te heqja e një nënbashkësie.

I dyti është *kufizimi strategjik*. Për 81 − 78, heqja e 78 njësive nga 81 është e mundimshme dhe e prirur ndaj gabimeve. Kuptimi i zbritjes si plotësim, 78 + 3 = 81, e kthen problemin në një hap të vetëm. Nxënësi që nuk e ka këtë kuptim nuk mund ta zgjedhë këtë strategji, sepse ajo nuk ekziston për të.

I treti është *kufizimi i lidhjes me mbledhjen*. Përkufizimi 3.1 e paraqet zbritjen si mbledhje me të mbledhshëm të panjohur. Ky kuptim zhvillohet natyrshëm nga situatat e plotësimit dhe të pjesës që mungon, jo nga heqja. Pa këto situata, kontrolli i zbritjes me mbledhje mbetet një rregull i jashtëm.

I katërti është *kufizimi i vazhdimësisë*. Në klasat e mëvonshme, zbritja interpretohet si largësi në boshtin numerik, si ndryshim i temperaturës, si diferencë ndërmjet matjeve dhe, në algjebër, si zgjidhje e ekuacioneve të formës x + 5 = 12. Asnjë nga këto interpretime nuk është heqje. Prandaj kuptimet e tjera duhen paraqitur që herët, jo pasi kuptimi i heqjes të jetë ngulitur si i vetmi.

4.3 Klasifikimi i CGI-së dhe pozicioni i së panjohurës

Në një situatë me ndryshim marrin pjesë tri sasi: sasia fillestare, ndryshimi dhe sasia përfundimtare. Secila prej tyre mund të jetë e panjohura. Kështu, për të njëjtën ngjarje fitohen tri probleme me kërkesa të ndryshme mendore. Tabela 3 i paraqet këto variante me të njëjtët numra. Përkthimi i emërtimeve të CGI-së është i autores.

Tabela 3. *Pozicioni i së panjohurës me të njëjtët numra (14, 6, 8)*

Tipi dhe e panjohura	Problemi	Barazimi modelues	Veprimi zgjidhës
Ndarje: rezultati i panjohur	Kishte 14 lapsa. Dhuroi 6. Sa i mbetën?	14 − 6 = □	14 − 6 = 8
Ndarje: ndryshimi i panjohur	Kishte 14 lapsa. Dhuroi disa dhe i mbetën 8. Sa dhuroi?	14 − □ = 8	14 − 8 = 6 ose 8 + □ = 14
Ndarje: fillimi i panjohur	Kishte disa lapsa. Dhuroi 6 dhe i mbetën 8. Sa kishte?	□ − 6 = 8	8 + 6 = 14
Bashkim: ndryshimi i panjohur	Kishte 6 lapsa. Bleu disa dhe tani ka 14. Sa bleu?	6 + □ = 14	14 − 6 = 8
Bashkim: fillimi i panjohur	Kishte disa lapsa. Bleu 6 dhe tani ka 14. Sa kishte?	□ + 6 = 14	14 − 6 = 8
Krahasim: diferenca e panjohur	Ana ka 14 lapsa, Bora 6. Sa më shumë ka Ana?	14 − 6 = □	14 − 6 = 8
Krahasim: sasia e krahasuar e panjohur	Bora ka 6 lapsa. Ana ka 8 më shumë se Bora. Sa ka Ana?	6 + 8 = □	6 + 8 = 14
Krahasim: sasia referuese e panjohur	Ana ka 14 lapsa, 8 më shumë se Bora. Sa ka Bora?	□ + 8 = 14	14 − 8 = 6

Tabela tregon tri fakte me rëndësi metodike. Së pari, folja e tekstit nuk e përcakton veprimin zgjidhës. Në problemin «Dhuroi 6 dhe i mbetën 8», veprimi i përshkruar është heqje, por zgjidhja kërkon mbledhje. Në problemin «Bleu 6 dhe tani ka 14», veprimi i përshkruar është shtim, por zgjidhja kërkon zbritje. Së dyti, barazimi që modelon situatën dhe veprimi që e zgjidh atë janë dy objekte të ndryshme. Kalimi nga i pari te i dyti mbështetet pikërisht në marrëdhënien (3.2) ndërmjet mbledhjes dhe zbritjes. Së treti, në krahasim mund të jetë e panjohur cilado nga tri sasitë: sasia e madhe, sasia e vogël ose diferenca. Kjo e bën krahasimin strukturën më të pasur dhe, sipas literaturës, njërën nga më të vështirat.

4.4 Vështirësia njohëse dhe strategjitë e fëmijëve

Kërkimet e programit CGI tregojnë se problemet me rezultat të panjohur zgjidhen më herët dhe më lehtë se ato me ndryshim të panjohur. Problemet me fillim të panjohur janë zakonisht ndër më të vështirat për fëmijët e vegjël (Carpenter et al., 2014). Shpjegimi lidhet me modelimin e drejtpërdrejtë. Për të modeluar «Kishte disa, dhuroi 6, i mbetën 8», fëmija duhet të fillojë me një sasi që nuk e njeh. Prandaj ai nuk mund ta ndërtojë hapin e parë të modelit. Për ta zgjidhur, ai duhet ta rimendojë situatën si marrëdhënie pjesë–e tërë: 6 dhe 8 janë pjesët, ndërsa sasia fillestare është e tëra. Pikërisht ky rimendim strukturor është objektivi didaktik.

Në problemet e krahasimit, vështirësia ka burim tjetër. Formulimi «Ana ka 8 më shumë se Bora» shpreh një marrëdhënie ndërmjet dy sasive dhe jo një sasi. Fëmija i vogël tenton ta lexojë «8» si sasi dhe «më shumë» si urdhër për të mbledhur. Kur e panjohura është sasia referuese, ky lexim çon drejtpërdrejt në gabim: «14 dhe 8 më shumë bëjnë 22».

Rëndësia e kësaj analize për mësuesin nuk është renditja e problemeve nga «më i lehti» te «më i vështiri», sikur kjo renditje të ishte e fiksuar. Rëndësia qëndron në aftësinë për të *parashikuar* ku do të ndeshë vështirësi nxënësi dhe për të *interpretuar* zgjidhjet e tij sipas strategjisë që përdor: modelim i drejtpërdrejtë, numërim përpara ose mbrapa, ose fakt numerik i nxjerrë.

4.5 Variacioni i kontrolluar: ndryshimi i vetëm një karakteristike

Teoria e variacionit (seksioni 2.5) sugjeron se, për ta bërë të dukshëm një aspekt të strukturës, mësuesi duhet ta ndryshojë vetëm atë aspekt dhe t'i mbajë të tjerët të pandryshuar. Më poshtë jepen tri vargje problemesh, secili me një qëllim të ndryshëm.

Vargu I: ndryshon vetëm pozicioni i së panjohurës. Konteksti dhe numrat mbeten të njëjtë. (a) «Në raft ishin 23 libra. U morën 7. Sa libra mbetën?» (b) «Në raft ishin 23 libra. U morën disa dhe mbetën 16. Sa libra u morën?» (c) «Në raft ishin disa libra. U morën 7 dhe mbetën 16. Sa libra ishin?» Ky kontroll e bën më të qartë ndikimin e mundshëm të pozicionit të së panjohurës. Megjithatë, ai nuk provon një lidhje shkakore: rendi i detyrave, të kuptuarit gjuhësor dhe përvoja e mëparshme mund të ndikojnë gjithashtu në përgjigje. Problemi (c) kërkon mbledhje, megjithëse ngjarja është heqje.

Vargu II: ndryshon vetëm struktura. Numrat 23, 7 dhe pozicioni i së panjohurës mbeten të njëjtë, ndërsa ndryshon marrëdhënia. (a) «Ishin 23 libra, u morën 7. Sa mbetën?» (b) «Në raft janë 23 libra, 7 prej tyre janë me figura. Sa janë pa figura?» (c) «Arta ka 23 libra, Drini ka 7. Sa libra më shumë ka Arta?» Këtu nxënësi duhet të zbulojë se tri situata të ndryshme modelohen me të njëjtin barazim.

Vargu III: ndryshojnë vetëm numrat. Struktura dhe pozicioni i së panjohurës mbeten të njëjtë. (a) «Arta ka 23 libra, Drini ka 7. Sa më shumë ka Arta?» (b) «Arta ka 41 libra, Drini ka 38. Sa më shumë ka Arta?» (c) «Arta ka 60 libra, Drini ka 24. Sa më shumë ka Arta?» Ky varg ka qëllim tjetër: nxënësi të dallojë që strategjia e përshtatshme varet nga numrat. Te (b), plotësimi nga 38 në 41 është ekonomik. Te (c), zbritja sipas vlerës vendore kërkon rigrupim të dhjetëshes; strategji të tjera, si $60 - 20 - 4$, mbeten të mundshme.

Një projektim që ndryshon njëkohësisht kontekstin, numrat dhe strukturën nga një problem te tjetri e vështirëson identifikimin e burimit të vështirësisë nga krahasimi i drejtpërdrejtë. Nëse nxënësi gabon te problemi i tretë i një vargu të tillë, mësuesi nuk e di nëse gabimi vjen nga struktura, nga numrat apo nga konteksti.

4.6 Kundërshembulli ndaj rregullit të fjalëve kyçe

Një praktikë e përhapur u mëson nxënësve të lidhin fjalë të caktuara me veprime: «më shumë» dhe «gjithsej» me mbledhjen, «mbetën» dhe «më pak» me zbritjen. Rregulli funksionon në shumë probleme të thjeshta, dhe pikërisht kjo e bën atë të rrezikshëm. Ai jep përgjigje të sakta pa kuptim, derisa ndeshet një problem si ky:

«Ana ka 8 libra. Ajo ka 3 më shumë se Bora. Sa libra ka Bora?»

Fjala «më shumë» shfaqet në tekst, por sasia e kërkuar është 8 − 3 = 5. Ky është problem krahasimi me sasi referuese të panjohur (Tabela 3). Nxënësi që ndjek rregullin e fjalëve kyçe jep përgjigjen 11. Analiza e saktë kërkon tre hapa: të emërtohet sasia referuese, pra Bora, me të cilën krahasohet Ana; të vizatohet marrëdhënia, ku shiriti i Anës është 3 njësi më i gjatë se ai i Borës; dhe vetëm pastaj të zgjidhet veprimi. Mësuesi mund të kërkojë që nxënësi ta riformulojë fjalinë nga këndvështrimi tjetër: «Bora ka 3 më pak se Ana». Riformulimi e bën veprimin e dukshëm pa ndryshuar situatën.

4.7 Njësi profesionale: pozicioni i së panjohurës

Shembull matematikor i zgjidhur. Problemi: «Në autobus hipën 7 nxënës dhe tani në autobus janë 23 nxënës. Sa nxënës ishin në fillim?» Situata është bashkim me fillim të panjohur dhe modelohet me □ + 7 = 23. Sipas (3.2), □ = 23 − 7 = 16. Verifikimi: 16 + 7 = 23.

Paraqitja në klasën fillore. Mësuesi vizaton një shirit me etiketën 23, «tani në autobus». Shiriti ndahet në pjesën «ishin në fillim», me pikëpyetje, dhe pjesën «hipën», me 7. Pyetja kryesore është: «Cila është e tëra? Cila pjesë na mungon?» Figura e kthen ngjarjen në kohë në një marrëdhënie pjesë–e tërë.

Pyetje diagnostikuese. «Pse e zgjodhe këtë veprim? Trego në figurë ku janë nxënësit që ishin në fillim».

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Bëra 23 + 7 = 30, sepse hipën nxënës, pra u shtuan».

Analiza didaktike. Nxënësi e ka zgjedhur veprimin sipas foljes «hipën» dhe jo sipas marrëdhënies ndërmjet sasive. Kjo nuk do të thotë domosdoshmërisht se ai nuk e kupton mbledhjen. Më i mundshëm është shpjegimi se problemi me fillim të panjohur nuk mund të modelohet drejtpërdrejt, prandaj nxënësi kap një sinjal sipërfaqësor të tekstit. Hipoteza mund të kontrollohet me një problem me të njëjtën strukturë, por me folje të kundërt.

Alternativë metodike ose kundërshembull. Mësuesi paraqet problemin: «Nga autobusi zbritën 7 nxënës dhe mbetën 16. Sa ishin në fillim?» Nëse nxënësi zbret sërish sipas foljes, 16 − 7 = 9, hipoteza e zgjedhjes sipas foljes forcohet. Pastaj kërkohet që të dy problemet të paraqiten me të njëjtin shirit pjesë–e tërë dhe të krahasohen.

Pyetje reflektuese për studentin. Në tekstin shkollor që përdorni, sa nga problemet me zbritje janë me rezultat të panjohur? Çfarë mund të mësojë një nxënës që ndesh vetëm problemet e këtij tipi, dhe çfarë nuk mund të mësojë?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Heqja, pjesa që mungon, krahasimi dhe plotësimi mund të modelohen me të njëjtin barazim, por kërkojnë veprime të ndryshme mendore.
- Barazimi që modelon situatën dhe veprimi që e zgjidh atë janë dy objekte të ndryshme.
- Folja e tekstit dhe «fjalët kyçe» nuk e përcaktojnë veprimin zgjidhës.
- Variacioni i kontrolluar e bën të mundur identifikimin e burimit të vështirësisë.

5. Përfaqësimet e zbritjes: përparësitë dhe kufizimet

NË KËTË KAPITULL

- Objektet konkrete
- Materialet dhjetore
- Modeli pjesë–e tërë dhe shiritat krahasues
- Boshti numerik
- Shënimi simbolik
- Krahasimi i përfaqësimeve dhe lidhja ndërmjet tyre
- Njësi profesionale: diferenca si largësi në bosht

Një përfaqësim didaktik është i dobishëm vetëm kur bën të dukshme marrëdhënien që synohet të kuptohet. Objektet e shpërndara, shiritat e rreshtuar dhe boshti numerik nuk e paraqesin automatikisht të njëjtin aspekt të zbritjes. Secili prej tyre e bën të dukshëm një aspekt dhe e fsheh një tjetër. Përfaqësimi nuk «flet vetë». Mësuesi duhet të shpjegojë ose, më mirë, të bëjë nxënësin të shpjegojë se çfarë përfaqëson secili element i figurës. Ky seksion i analizon përfaqësimet kryesore sipas tri pyetjeve: çfarë bëjnë të dukshme, çfarë fshehin dhe për cilin kuptim të zbritjes janë më të përshtatshme.

5.1 Objektet konkrete

Objektet konkrete, si kapakët, kubikët ose fasulet, janë përfaqësimi i parë dhe më i drejtpërdrejtë i sasisë. Përparësia e tyre është se lejojnë *modelimin veprues* të situatës: heqja kryhet duke larguar objekte, bashkimi duke i afruar, krahasimi duke i rreshtuar njëri përballë tjetrit. Për fëmijën që ende modelon drejtpërdrejt, ky është mjeti që i lejon të zgjidhë problemet pa ndihmë.

Kufizimet janë të qarta në fushën deri në 100. E para, objektet e veçuara nuk e kanë strukturën dhjetore në vetvete. 47 kapakë janë thjesht 47 kapakë, dhe për t'i numëruar ose hequr nevojiten 47 veprime të veçanta. E dyta, përdorimi i gjatë i objekteve të veçuara nxit numërimin një nga një dhe mund ta vonojë kalimin te strategjitë e bazuara në strukturë. E treta, objektet e shpërndara nuk e tregojnë krahasimin. Që diferenca të bëhet e dukshme, objektet duhen rreshtuar në dy rreshta paralelë me fillim të përbashkët. Ky rreshtim është në vetvete një hap drejt modelit me shirita.

5.2 Materialet dhjetore

Materialet dhjetore e futin strukturën e sistemit pozicional në vetë sasinë. Dallohen dy lloje. Te materialet që *grupohen nga vetë nxënësi*, si shkopinjtë që lidhen me llastik në tufa nga dhjetë, nxënësi e ndërton dhjetëshen dhe mund ta zgjidhë sërish. Te materialet *e paragrupuara*, si shufrat dhe kubikët, dhjetëshja jepet e gatshme dhe nuk mund të ndahet. Ajo vetëm *shkëmbehet* me dhjetë kubikë.

Përparësia e shkopinjve është se veprimi i zgjidhjes së tufës përkon fizikisht me rigrupimin. Përparësia e shufrave është se dhjetëshja mbetet gjithmonë e saktë. Ato janë *proporcionale*, sepse shufra është dhjetë herë më e gjatë se kubiku dhe kjo madhësi mund të verifikohet duke i vendosur pranë njëri-tjetrit. Paratë, për shembull monedhat 10-lekëshe dhe 1-lekëshe, janë material *joproporcional*. Monedha 10-lekëshe nuk është dhjetë herë më e madhe se ajo 1-lekëshe, prandaj vlera e saj duhet njohur dhe nuk mund të shihet. Për këtë arsye, paratë përdoren mirë pasi koncepti i dhjetëshes është formuar, jo për ta formuar atë.

Kufizimi kryesor i materialeve dhjetore është se ato nuk e garantojnë vetë kuptimin. Kërkimi i krahasuar i katër projekteve mësimore për numrat shumëshifrorë arriti në përfundimin se përbërësi vendimtar ishin mundësitë e vazhdueshme që nxënësit të lidhnin fjalët numerore, shifrat e shkruara dhe sasitë e grupuara në dhjetëshe, jo vetë materiali (Fuson et al., 1997). Kur materiali përdoret si procedurë e veçantë, që nuk lidhet me shkrimin, nxënësi mund të mësojë «lojën me shufrat» dhe «lojën me shifrat» si dy veprimtari pa lidhje ndërmjet tyre.

5.3 Modeli pjesë–e tërë dhe shiritat krahasues

Modeli *pjesë–e tërë* paraqet një sasi si shirit të plotë dhe pjesët e saj si segmente të këtij shiriti. Figura 1 paraqet situatën «pjesa që mungon» nga Tabela 2.

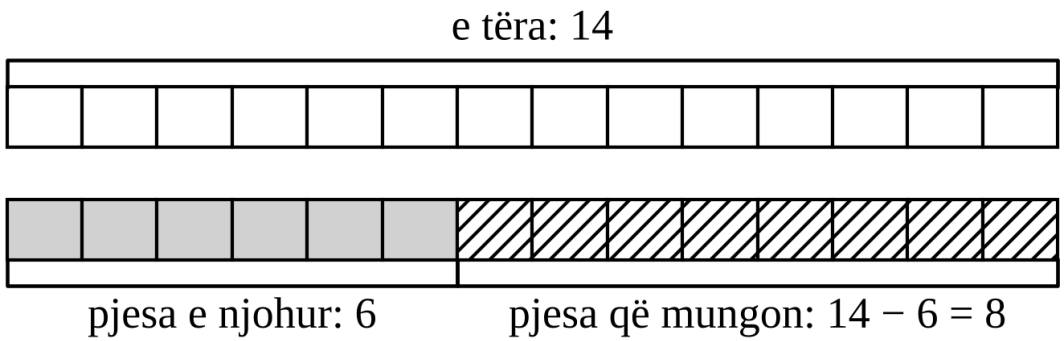


Figura 1. Modeli pjesë–e tërë për 14 = 6 + 8. Shiriti i sipërm paraqet të tërën; shiriti i poshtëm e ndan atë në pjesën e njohur (gri) dhe pjesën që mungon (me vija).

Në Figurën 1, të dy shiritat kanë të njëjtën gjatësi, sepse përfaqësojnë të njëjtën sasi. Shiriti i poshtëm nuk përfaqëson një sasi të re. Ai përfaqëson të njëjtën sasi të parë nga një këndvështrim tjetër, si përbërje e dy pjesëve. Prej këtej lexohen katër barazime: 6 + 8 = 14, 8 + 6 = 14, 14 − 6 = 8 dhe 14 − 8 = 6. Përparësia kryesore e modelit është se e bën të dukshme marrëdhënien e

kundërt ndërmjet mbledhjes dhe zbritjes. Për këtë arsye, ai është përfaqësimi më i përshtatshëm për problemet me fillim ose ndryshim të panjohur (seksioni 4.7).

Për krahasimin nevojitet një model tjetër. Figura 2 paraqet dy sasi të veçanta me dy shirita që nisin në të njëjtën pikë.

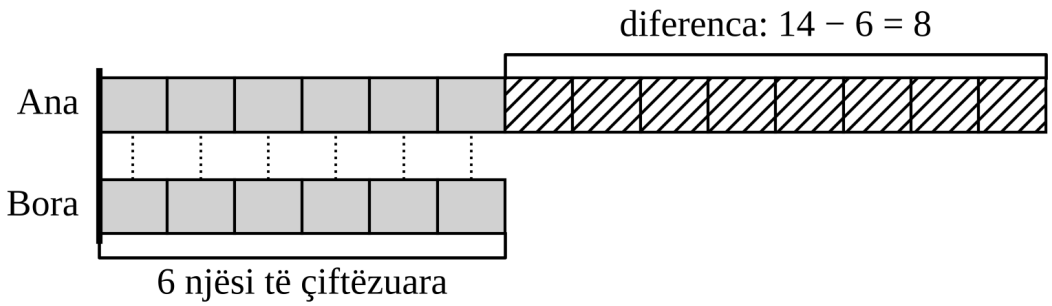


Figura 2. Krahasimi i dy sasive me shirita që nisin në të njëjtën pikë. Vijat me pika tregojnë çiftëzimin e njësive; pjesa me vija përfaqëson diferencën 14 − 6 = 8.

Në Figurën 2, pjesa e përbashkët në gjatësi përfaqëson gjashtë njësitë që mund të çiftëzohen, një nga një, me njësitë e Borës. Pjesa me vija paraqet tetë njësitë që mbeten pa çift. Ky është përfaqësimi pamor i çiftëzimit të përshkruar në seksionin 3.5. Fillimi i përbashkët i shiritave, i shënuar me vijën vertikale, është vendimtar. Shiritat e zhvendosur pa arsye e fshehin krahasimin, sepse diferenca nuk shfaqet më si pjesë e një shiriti. Kur shiritat vizatohen me njësi të ndara, modeli mbetet i lidhur me numërimin. Kur vizatohen pa ndarje, ai bëhet model i përgjithshëm i krahasimit të madhësive dhe mund të përdoret edhe për numra të mëdhenj ose të panjohur.

Kufizimi i modelit me shirita është se kërkon një shkallë të qëndrueshme. Një shirit që përfaqëson 6 dhe vizatohet më i gjatë se ai që përfaqëson 14 e shkatërron vetë marrëdhënien që modeli synon të tregojë. Në klasë, ku shiritat vizatohen me dorë, mësuesi nuk mund të kërkojë proporcionalitet të saktë. Megjithatë, ai duhet të kërkojë që renditja e gjatësive të përputhet me renditjen e sasive.

5.4 Boshti numerik

Boshti numerik e paraqet numrin si *pozicion*, ndërsa diferencën si *largësi* ndërmjet dy pozicioneve. Ky kalim nga numri si sasi te numri si pozicion nuk është i thjeshtë për fëmijën. Në boshtin numerik numërohen *intervalet njësi*, jo pikat. Për shembull, nga 6 në 9 ka tri hapa njësi, megjithëse shihen katër numra: 6, 7, 8 dhe 9. Fëmija që numëron pikat e fillimit dhe të mbarimit gjen 4 dhe gabon me një njësi. Ky gabim analizohet në seksionin 11.7.

Për zbritjen deri në 100, një përdorim i rëndësishëm është *boshti numerik i zbrazët*. Ai është një vijë pa shenja të paracaktuara, ku nxënësi shënon vetëm numrat që i duhen dhe kërcimet që kryen. Ky përfaqësim u bë i njohur sidomos në arsimin fillor holandez dhe lidhet me strategjitë sekuenciale të llogaritjes me gojë, ku numri i dytë shtohet ose zbritet pjesë-pjesë duke u nisur

nga numri i parë (Beishuizen, 1993). Figurat 3 dhe 4 paraqesin dy mënyra të ndryshme të zgjidhjes së 52 − 38 në bosht. Në këtë leksion, boshtet vizatohen në shkallë të saktë, që studenti të verifikojë largësitë. Në klasë, boshti i zbrazët vizatohet me dorë dhe kërkon vetëm renditjen e saktë të numrave.

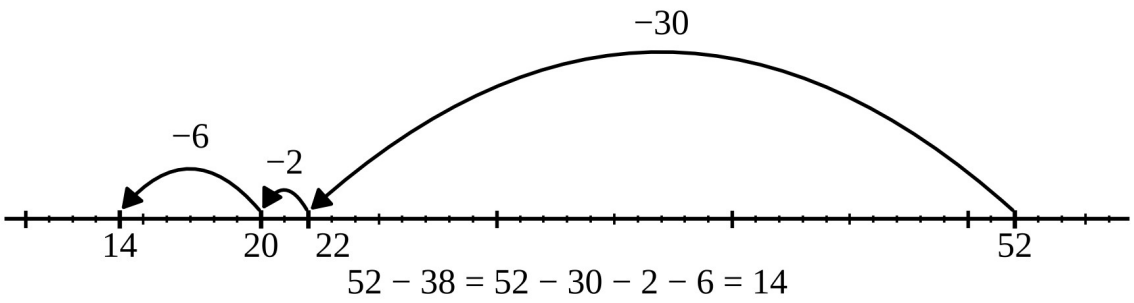


Figura 3. Zbritja 52 − 38 si heqje në bosht: nga 52 zbriten fillimisht 3 dhjetëshe, pastaj 8 njësi në dy hapa, përmes dhjetëshes 20.

Në Figurën 3, kërcimet shkojnë nga e djathta në të majtë, sepse modelohet heqja. Zbritësi 38 zbërthehet në 30 + 2 + 6. Zbërthimi i 8-shit në 2 + 6 nuk është i rastësishëm: 2 e çon numrin 22 te dhjetëshja e plotë 20, pas së cilës zbritja e 6-shit bëhet e lehtë. Barazimi që i përgjigjet figurës është 52 − 38 = 52 − 30 − 2 − 6 = 14. Ai justifikohet me zbatimin e përsëritur të vetisë 2.

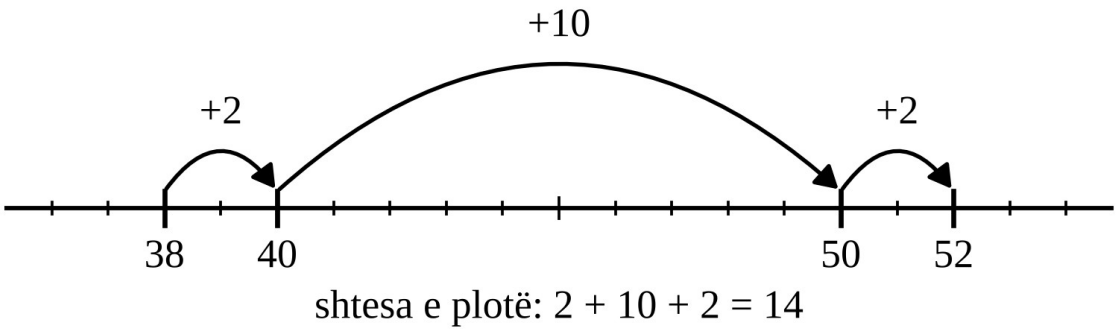


Figura 4. Zbritja 52 − 38 si plotësim: nga 38 deri në 52 me hapa 2, 10 dhe 2. Diferenca është shuma e hapave, 14.

Në Figurën 4, kërcimet shkojnë nga e majta në të djathtë, sepse diferenca gjendet si shtesë. Rezultati nuk lexohet në një pikë të boshtit, si në Figurën 3. Ai fitohet si *shuma e hapave*: 2 + 10 + 2 = 14. Dallimi është thelbësor për mësuesin. Te heqja, përgjigjja është pozicioni ku mbërrin nxënësi. Te plotësimi, përgjigjja është gjatësia e rrugës së përshkuar. Nxënësi që përdor plotësimin dhe jep si përgjigje 52, pra pikën e mbërritjes, nuk e ka kuptuar se çfarë përfaqëson diferenca në këtë model. Plotësimi mbështetet në përkufizimin 3.1: 38 + 14 = 52.

Kufizimi i boshtit numerik është se ai është *model matjeje*. Ai kërkon që numri të kuptohet si gjatësi nga zeroja, gjë që është më abstrakte se numri si kardinal i një bashkësie. Për nxënësit që ende nuk e kanë këtë kuptim, boshti numerik mund të bëhet thjesht një varg numrash për t'u numëruar, dhe atëherë humbet përparësinë e tij.

5.5 Shënimi simbolik

Shënimi simbolik, si 52 − 38 = 14, është përfaqësimi më i ngjeshur dhe më i përgjithshëm. Ai nuk varet nga konteksti dhe lejon transformime që nuk mund të kryhen lehtë me objekte, si 52 − 38 = 54 − 40. Kufizimi i tij është se e fsheh strukturën. Simboli 52 nuk e tregon vetvetiu se numri përbëhet nga 5 dhjetëshe dhe 2 njësi. Shenja − nuk e tregon nëse situata është heqje apo krahasim. Shenja = mund të lexohet gabimisht si «tani shkruaj përgjigjen», në vend që të lexohet si marrëdhënie barazvlerësie ndërmjet dy shprehjeve (Knuth et al., 2006). Për këtë arsye, simboli duhet të lidhet vazhdimisht me përfaqësimet e tjera, sidomos në fazën e formimit të konceptit.

5.6 Krahasimi i përfaqësimeve dhe lidhja ndërmjet tyre

Tabela 4 përmbledh analizën e mësipërme. Ajo nuk e zëvendëson argumentimin e seksioneve 5.1–5.5, por e organizon atë për krahasim.

Tabela 4. *Përfaqësimet e zbritjes: çfarë bëjnë të dukshme dhe çfarë fshehin*

Përfaqësimi	Bën të dukshme	Fsheh ose kufizon	Më i përshtatshëm për
Objektet e veçuara	Sasinë dhe veprimin fizik të heqjes ose të bashkimit	Strukturën dhjetore; krahasimin, nëse objektet nuk rreshtohen	Formimin fillestar të kuptimeve; numrat deri në 20
Materialet dhjetore	Dhjetëshet dhe njësitë; rigrupimin si shkëmbim	Lidhjen me shkrimin, nëse nuk ndërtohet qëllimisht; renditjen e numrave	Vlerën vendore; zbritjen me rigrupim
Modeli pjesë–e tërë	Marrëdhënien e kundërt mbledhje–zbritje; të tërën dhe pjesët	Ngjarjen në kohë; madhësinë e saktë, kur nuk vizatohet në shkallë	Problemet me ndryshim ose fillim të panjohur
Shiritat krahasues	Diferencën si tepricë pas çiftëzimit	Kërkon fillim të përbashkët dhe shkallë të qëndrueshme	Problemet e krahasimit
Boshti numerik	Renditjen; diferencën si largësi; kërcimet e strategjive	Sasinë si kardinal; kërkon numërimin e intervaleve, jo të pikave	Strategjitë sekuenciale dhe plotësimin
Shënimi simbolik	Përgjithësinë; transformimet ndërmjet shprehjeve	Strukturën dhjetore; kuptimin e situatës; marrëdhënien e barazisë	Përgjithësimin dhe arsyetimin relacional

Asnjë përfaqësim nuk është «më i miri» në përgjithësi. Zgjedhja varet nga koncepti që mësuesi synon të bëjë të dukshëm. Për të shpjeguar «sa më shumë», shiritat krahasues janë më të qartë. Për strategjinë «sa duhet të shtoj», boshti numerik i paraqet hapat në mënyrë më të natyrshme. Për rigrupimin, materialet dhjetore janë të domosdoshme në fazën e formimit.

Në përputhje me interpretimin relacional të vargut konkret–pamor–abstrakt (seksioni 2.4), rëndësia më e madhe i takon *lidhjes* ndërmjet përfaqësimeve. Një detyrë e mirë kërkon që nxënësi ta zgjidhë 52 − 38 me materiale dhjetore, ta paraqesë të njëjtën zgjidhje në boshtin numerik dhe të shpjegojë se cili kërcim i boshtit i përgjigjet cilit veprim me materialet. Kjo

lidhje nuk ndodh vetvetiu. Ajo duhet artikuluar me pyetje të drejtpërdrejta: «Ku e shoh në bosht shufrën që hoqe?»

5.7 Njësi profesionale: diferenca si largësi në bosht

Shembull matematikor i zgjidhur. Largësia ndërmjet pikave 47 dhe 63 në boshtin numerik është 63 − 47. Plotësimi jep 47 + 3 = 50, 50 + 10 = 60, 60 + 3 = 63. Largësia është 3 + 10 + 3 = 16. Verifikimi: 47 + 16 = 63.

Paraqitja në klasën fillore. Mësuesi fillon me një rast të vogël në një bosht me shenja: «Bretkosa është te 6 dhe kërcen te 9. Sa kërcime bën?» Kërcimet vizatohen si harqe dhe numërohen harqet, jo numrat. Pastaj kalohet te boshti i zbrazët me numra më të mëdhenj.

Pyetje diagnostikuese. «Sa kërcime njësi ka nga 6 në 9? Trego me gisht çdo kërcim».

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Katër: gjashtë, shtatë, tetë, nëntë».

Analiza didaktike. Nxënësi po numëron *pikat* dhe jo *intervalet*. Ai e trajton boshtin numerik si varg objektesh për t'u numëruar, si të ishin kubikë të rreshtuar. Kjo tregon se kuptimi i numrit si pozicion dhe i diferencës si largësi ende nuk është formuar. Gabimi nuk lidhet me zbritjen, por me interpretimin e përfaqësimit.

Alternativë metodike. Mësuesi lidh boshtin me shiritat. Vendos tre kubikë njëri pas tjetrit duke filluar nga shenja 6 dhe tregon se kubiku i fundit mbaron te 9. Kështu bëhet e dukshme se tre kubikë, pra tri njësi gjatësie, mbulojnë largësinë nga 6 në 9. Një vizore e zakonshme jep të njëjtën përvojë: objekti që fillon te 6 cm dhe mbaron te 9 cm ka gjatësi 3 cm, jo 4 cm.

Pyetje reflektuese për studentin. Pse ky gabim nuk shfaqet kur nxënësi heq kubikë nga një grumbull, por shfaqet në boshtin numerik? Çfarë na mëson kjo për ndryshimin ndërmjet dy përfaqësimeve?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Çdo përfaqësim bën të dukshëm një aspekt të zbritjes dhe fsheh një tjetër.
- Shiritat krahasues kërkojnë fillim të përbashkët; boshti numerik kërkon numërimin e intervaleve, jo të pikave.
- Te heqja në bosht, përgjigjja është pika e mbërritjes; te plotësimi, ajo është gjatësia e rrugës së përshkuar.
- Vlera didaktike qëndron te lidhja e artikuluar ndërmjet përfaqësimeve, jo te numri i tyre.

6. Sistemi dhjetor pozicional deri në 100

NË KËTË KAPITULL

- Dhjetëshja si njësi e re
- Paraqitja e vetme e numrave dyshifrorë
- Leximi dhe shkrimi i numrave në gjuhën shqipe
- Roli i zeros
- Zbërthimi kanonik dhe jokanonik
- Rigrupimi në zbritje
- Njësi profesionale: rigrupimi me zero te njësitë

Llogaritja me gojë deri në 100 mbështetet tërësisht në strukturën dhjetore të numrave. Pa kuptimin e dhjetëshes si njësi, strategjitë e seksionit 7 reduktohen në numërim një nga një ose në procedura të mësuara përmendsh. Ky seksion trajton formimin e konceptit të dhjetëshes, paraqitjen e numrave dyshifrorë, rolin e zeros dhe rigrupimin.

6.1 Dhjetëshja si njësi e re

Kalimi nga numërimi i njësive te sistemi dhjetor kërkon një hap të rëndësishëm konceptual: dhjetë njësi duhet të shihen njëkohësisht si *dhjetë objekte* dhe si *një objekt*, një dhjetëshe. Ky proces quhet *njësim* ose formim i njësisë së përbërë. Ai nuk është i thjeshtë për fëmijën. Nxënësi që thotë «47 janë 4 shufra dhe 7 kubikë», por nuk mund të përgjigjet nëse ka më shumë kubikë në shufra apo jashtë tyre, ende nuk e ka lidhur shufrën me dhjetë njësitë që ajo përmban.

Fuson et al. (1997) përshkruan disa struktura konceptuale që nxënësit ndërtojnë për numrat dyshifrorë. Në strukturën *njësore*, numri 47 shihet vetëm si një sasi prej 47 objektesh, pa grupime. Në strukturën e *dhjetëshes së plotë dhe njësive*, 47 kuptohet si 40 dhe 7. Në strukturën *sekuenciale të dhjetësheve dhe njësive*, numri arrihet duke numëruar me dhjetëshe dhe pastaj me njësi: 10, 20, 30, 40, 41, …, 47. Në strukturën *e ndarë të dhjetësheve dhe njësive*, dhjetëshet dhe njësitë numërohen veçmas: 4 dhjetëshe dhe 7 njësi. Struktura *e integruar* i lidh të dyja këto mënyra. Rëndësia e këtij dallimi për mësuesin është se strukturat e ndryshme mbështesin strategji të ndryshme llogaritjeje. Struktura sekuenciale mbështet strategjitë në boshtin numerik. Struktura e ndarë mbështet zbërthimin sipas vlerës vendore (seksioni 7).

6.2 Paraqitja e vetme e numrave dyshifrorë

Pohimi 6.1. Çdo numër natyror n me $10 \le n \le 99$ shkruhet në mënyrë të vetme në trajtën

$$n = 10d + u, \quad \text{ku } d \in \{1, 2, \ldots, 9\} \text{ dhe } u \in \{0, 1, \ldots, 9\}. \tag{6.1}$$

Vërtetim. Ekzistenca: le të jetë d numri më i madh natyror për të cilin $10d \le n$. Meqë $10 \le n \le 99$, kemi $1 \le d \le 9$. Le të jetë $u = n - 10d$. Atëherë $u \ge 0$. Nga zgjedhja e d-së, $10(d+1) > n$, pra $u = n - 10d < 10$. Njëvlerësia: supozojmë se $10d + u = 10d' + u'$, me $u, u' \in \{0, \dots, 9\}$. Atëherë $10 \cdot |d - d'| = |u' - u| \le 9$. Meqë shumëfishi i vetëm i 10-shit që nuk e kalon 9-ën është 0, kemi $d = d'$ dhe prej këtej $u = u'$. ∎

Shifra d quhet *shifra e dhjetësheve* dhe u *shifra e njësive*. Vlera që shpreh shifra varet nga vendi i saj. Te 47, shifra 4 përfaqëson 40, ndërsa shifra 7 përfaqëson 7. Te 74, të njëjtat shifra përfaqësojnë 70 dhe 4. Ky është kuptimi i fjalës *pozicional*. Për numrat njëshifrorë mund të përdoret d = 0, pa e shkruar zeron fillestare në paraqitjen e zakonshme. Numri 100 nuk është dyshifror. Ai shënon kalimin te një njësi e rendit të tretë: 100 = 10 dhjetëshe = 1 qindëshe. Kështu përsëritet në një nivel më të lartë i njëjti parim që i bashkoi dhjetë njësi në një dhjetëshe.

6.3 Leximi dhe shkrimi i numrave në gjuhën shqipe

Emërtimet e numrave në gjuhën shqipe nuk e pasqyrojnë në mënyrë të njëtrajtshme strukturën dhjetore. Mësuesi duhet ta dijë këtë, sepse fjala numerore është një nga tri përfaqësimet që nxënësi duhet të lidhë: fjala, shifra dhe sasia.

Për numrat 11–19, fjala ndjek renditjen *njësi–dhjetëshe*: «një-mbë-dhjetë», «dy-mbë-dhjetë», pra «një mbi dhjetë», «dy mbi dhjetë». Shkrimi, nga ana tjetër, ndjek renditjen *dhjetëshe–njësi*: 11, 12. Fëmija dëgjon fillimisht njësitë, por shkruan fillimisht dhjetëshen. Për 20 dhe 40, emërtimet «njëzet» dhe «dyzet» ruajnë gjurmë të një sistemi me bazë njëzet: «dyzet» do të thotë «dy njëzetë» dhe jo «katër dhjetë». Emërtimet e tjera të dhjetësheve, si «tridhjetë», «pesëdhjetë» deri te «nëntëdhjetë», janë dhjetore dhe të tejdukshme. Për numrat 21–99, struktura gojore «dyzet e shtatë» ndjek renditjen e shkrimit dhe lidhet natyrshëm me 40 + 7.

Këto vëzhgime janë gjuhësore. Ato nuk mbështeten në ndonjë studim empirik me nxënës shqipfolës, të cilin autorja ta ketë verifikuar, prandaj paraqiten si hipoteza për vëmendjen e mësuesit. Pasoja metodike që propozohet është kjo: për numrat 11–19, si dhe për 20 dhe 40, struktura dhjetore duhet ndërtuar me grupime dhe shkrim, pa pritur që vetë fjala ta bëjë atë të dukshme. Mësuesi mund të përdorë edhe emërtimin dhjetor si ndihmë të përkohshme, për shembull «4 dhjetëshe» për dyzet. Shkrimi i gabuar 407 për «dyzet e shtatë», i analizuar në seksionin 11.4, lidhet pikërisht me shkrimin e secilës pjesë të fjalës si numër i veçantë.

6.4 Roli i zeros

Në sistemin pozicional, zeroja kryen dy funksione që duhen dalluar. Si *numër*, ajo është kardinali i bashkësisë boshe dhe elementi neutral i mbledhjes. Si *shifër*, ajo shënon mungesën e njësive të një rendi të caktuar dhe ruan vendin e shifrave të tjera. Te 40, zeroja tregon se nuk ka njësi të veçuara. Pa të, shifra 4 do të lexohej si 4 njësi. Te 100, dy zerot tregojnë se nuk ka as dhjetëshe të veçuara, as njësi të veçuara përtej qindëshes.

Për zbritjen, roli i zeros bëhet i rëndësishëm kur i zbritshmi është dhjetëshe e plotë. Në 60 − 24, nuk ka njësi nga të cilat të hiqen 4 njësi. Nxënësi duhet ta kuptojë 60 si 5 dhjetëshe dhe 10 njësi. Gabimi tipik, 60 − 24 = 44, ku nxënësi shkruan «0 − 4 nuk bëhet, pra shkruaj 4», tregon se zeroja është trajtuar si shenjë boshe dhe jo si informacion për përbërjen e numrit.

6.5 Zbërthimi kanonik dhe jokanonik

Barazimi 47 = 4 dhjetëshe + 7 njësi quhet *zbërthim kanonik*, sepse numri i njësive është më i vogël se 10 dhe, sipas pohimit 6.1, ky zbërthim është i vetëm. Barazimi 47 = 3 dhjetëshe + 17 njësi është po aq i saktë, por nuk është kanonik. Në përgjithësi, nëse lejojmë që numri i njësive të jetë çfarëdo numër natyror, numri 47 ka pesë zbërthime në dhjetëshe dhe njësi: (4, 7), (3, 17), (2, 27), (1, 37) dhe (0, 47). Për një numër n, numri i këtyre zbërthimeve është d + 1, ku d është shifra e dhjetësheve, sepse numri i dhjetësheve mund të jetë çdo vlerë nga 0 deri te d.

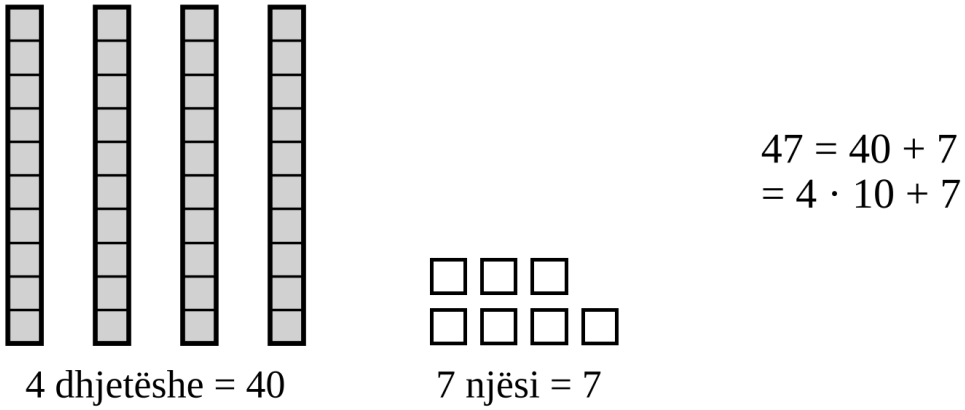


Figura 5. Numri 47 në zbërthimin kanonik: katër dhjetëshe dhe shtatë njësi. Çdo shufër përmban dhjetë njësi të barabarta me kubikët e veçuar.

Figura 5 paraqet zbërthimin kanonik. Çdo shufër është ndarë në dhjetë katrorë të barabartë me kubikët e veçuar. Kjo zgjedhje vizuale është e qëllimshme, sepse e bën të verifikueshme barazinë 1 dhjetëshe = 10 njësi. Një shufër pa ndarje do ta kërkonte këtë barazi si fakt të mbajtur mend.

Dallimi ndërmjet zbërthimit kanonik dhe atij jokanonik përgatit kuptimin e rigrupimit. Kur kalojmë nga 4 dhjetëshe e 7 njësi te 3 dhjetëshe e 17 njësi, ndryshon *organizimi* i njësive, jo *sasia*. Pyetja diagnostikuese «A mund ta ndërtosh 47 me vetëm tri shufra dhjetëshe?» e bën të dukshëm këtë kuptim. Përgjigjja e plotë kërkon 17 kubikë. Nxënësi, apo edhe studenti që luan rolin e mësuesit, që përgjigjet «jo, duhen katër shufra» po e kufizon numrin në një paraqitje të vetme. Lidhja e përbërjes dhjetore të numrave me llogaritjen trajtohet edhe në materialet profesionale për mësimdhënien e numrave 20–100 (NCETM, pa datë-a).

6.6 Rigrupimi në zbritje

Kur shifra e njësive e të zbritshmit është më e vogël se shifra e njësive e zbritësit, zbritja e njësive nuk mund të kryhet drejtpërdrejt në $\mathbb{N}_0$. Rigrupimi e zgjidh këtë vështirësi duke përdorur një zbërthim jokanonik të të zbritshmit. Le të jenë $a = 10d_1 + u_1$ dhe $b = 10d_2 + u_2$ zbërthimet kanonike, me $u_1 < u_2$ dhe $d_1 > d_2$. Atëherë:

$$a = 10(d_1 - 1) + (u_1 + 10), \tag{6.2}$$

prandaj

$$a - b = 10(d_1 - 1 - d_2) + (u_1 + 10 - u_2). \tag{6.3}$$

Të dy kllapat janë numra natyrorë. Kemi $d_1 - 1 - d_2 \geq 0$, sepse $d_1 > d_2$, dhe $u_1 + 10 - u_2 \geq 1$, sepse $u_2 \leq 9$. Prandaj të gjitha veprimet kryhen brenda $\mathbb{N}_0$. Për $52 - 38$ kemi $d_1 = 5$, $u_1 = 2$, $d_2 = 3$ dhe $u_2 = 8$, pra $52 - 38 = 10 \cdot (5 - 1 - 3) + (2 + 10 - 8) = 10 + 4 = 14$. Formula (6.3) i shërben studentit për të kuptuar pse procedura është e vlefshme. Ajo nuk është formulë për nxënësin.

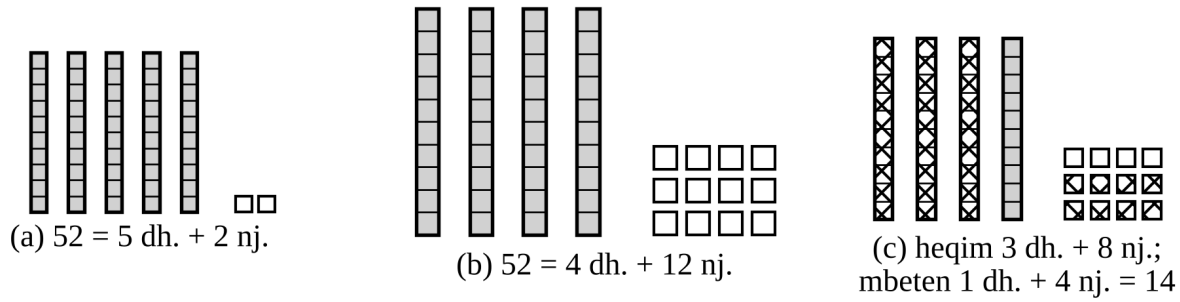


Figura 6. Rigrupimi në $52 - 38$: (a) zbërthimi kanonik; (b) një dhjetëshe shkëmbehet me dhjetë njësi; (c) hiqen 3 dhjetëshe dhe 8 njësi (të shënuara me kryq) dhe mbeten 1 dhjetëshe dhe 4 njësi.

Figura 6 e paraqet rigrupimin në tri faza. Faza (b) është ajo që zakonisht anashkalohet kur rigrupimi mësohet si procedurë shkrimi. Në këtë fazë sasia mbetet 52, ndërsa ndryshon vetëm organizimi i saj. Vetëm pas kësaj faze zbritja e 8 njësive bëhet e mundur. Faza (c) tregon se dhjetëshet dhe njësitë hiqen veç e veç, sipas rendit të tyre.

Terminologjia ka rëndësi. Shprehja e përhapur «marrim hua një dhjetëshe» është e pasaktë, sepse asgjë nuk merret nga jashtë numrit dhe asgjë nuk kthehet më pas. Ajo që ndodh është *zbërthimi i një njësie të rendit më të lartë* në dhjetë njësi të rendit më të ulët. Ma (1999), në studimin krahasues të njohurive të mësuesve kinezë dhe amerikanë për zbritjen me rigrupim, vuri në dukje se mësuesit me kuptim më të thellë e shpjegonin procedurën pikërisht si zbërthim të një njësie më të madhe, ndërsa të tjerët e përshkruanin si «marrje hua». Në këtë leksion përdoret termi *rigrupim*.

6.7 Njësi profesionale: rigrupimi me zero te njësitë

Shembull matematikor i zgjidhur. 60 − 24. I zbritshmi ka zbërthimin kanonik 6 dhjetëshe + 0 njësi. Meqë 0 < 4, përdorim zbërthimin jokanonik 5 dhjetëshe + 10 njësi. Atëherë 60 − 24 = (5 − 2) dhjetëshe + (10 − 4) njësi = 3 dhjetëshe + 6 njësi = 36. Sipas (6.3): $10 \cdot (6 - 1 - 2) + (0 + 10 - 4) = 30 + 6 = 36$. Verifikimi: 24 + 36 = 60.

Paraqitja në klasën fillore. Nxënësi ndërton 60 me gjashtë tufa shkopinjsh. Kur i kërkohet të heqë 24, ai heq dy tufa dhe konstaton se nuk ka shkopinj të veçuar. Mësuesi pyet: «Si mund të marrim 4 shkopinj pa e ndryshuar numrin e shkopinjve që ke?» Nxënësi zgjidh një tufë, numëron dhjetë shkopinj dhe heq katër prej tyre.

Pyetje diagnostikuese. «Sa njësi ka gjithsej në 60? A janë të gjitha njësitë te shifra 0?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Në 60 nuk ka njësi, se është zero».

Analiza didaktike. Nxënësi e ngatërron *shifrën e njësive* me *numrin e njësive në sasi*. Shifra 0 tregon se nuk ka njësi të veçuara në zbërthimin kanonik, por sasia 60 përmban gjithsej 60 njësi. Kjo ngatërresë është burim i drejtpërdrejtë i gabimit 60 − 24 = 44.

Alternativë metodike. Mësuesi kërkon që nxënësi të ndërtojë 60 në dy mënyra: 6 tufa, si dhe 5 tufa me 10 shkopinj të veçuar. Pastaj pyet: «A kemi të njëjtin numër shkopinjsh?» Vetëm pas kësaj kërkohet zbritja. Kontroll transferimi: 80 − 37, ku zeroja shfaqet në një numër tjetër dhe rigrupimi kërkohet përsëri.

Pyetje reflektuese për studentin. Pse rigrupimi me zero te njësitë, si në 60 − 24, konsiderohet më i vështirë se rigrupimi në 62 − 24, megjithëse procedura është e njëjtë? Formuloni një hipotezë dhe një detyrë që do ta kontrollonte atë.

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Dhjetëshja duhet ndërtuar si njësi e re, që shihet njëkohësisht si një dhe si dhjetë.
- Zbërthimi kanonik është i vetëm; zbërthimet jokanonike janë po aq të sakta dhe janë baza e rigrupimit.
- Rigrupimi ndryshon organizimin e sasisë, jo sasinë.
- Emërtimet shqipe të numrave 11–19, si dhe «njëzet» e «dyzet», nuk e bëjnë vetvetiu të tejdukshme strukturën dhjetore.

7. Llogaritja me gojë si transformim i argumentuar

NË KËTË KAPITULL

- Çfarë kuptojmë me llogaritje me gojë
- Zbërthimi sipas vlerës vendore
- Strategjia sekuenciale
- Kalimi përmes dhjetëshes
- Plotësimi ndërmjet dy numrave
- Strategjitë si transformime: përmbledhje
- Fleksibiliteti dhe zgjedhja e strategjisë
- Njësi profesionale: vlerësimi i një strategjie jostandarde

7.1 Çfarë kuptojmë me llogaritje me gojë

Llogaritja me gojë nuk përkufizohet nga mungesa e lapsit dhe e letrës. Ajo mund të shoqërohet me shënime të shkurtra, si kërcimet në një bosht të zbrazët ose barazimet e ndërmjetme, që dokumentojnë mendimin. Tipari dallues i saj është se *vepron mbi numrat si të tërë*, duke i zbërthyer dhe rigrupuar sipas strukturës së tyre. Algoritmi i shkruar në kolonë, përkundrazi, *vepron mbi shifrat* një nga një, sipas një rendi të fiksuar, pavarësisht nga numrat konkretë. Në 52 − 38 me kolonë, nxënësi nuk ka nevojë të dijë se 52 është afër 50-ës ose se 38 është afër 40-ës. Në llogaritjen me gojë, pikërisht këto vëzhgime e përcaktojnë rrugën.

Në këtë leksion, çdo strategji trajtohet si *transformim* i një shprehjeje në një shprehje tjetër, me të njëjtën vlerë dhe më të lehtë për t'u llogaritur. Çdo transformim mbështetet në një veti të veprimeve ose në strukturën dhjetore të numrave. Një strategji vlerësohet sipas tri kritereve: *saktësisë*, pra nëse transformimi ruan vlerën dhe në cilat kushte; *njohurive që kërkon* nga nxënësi; dhe *përshtatshmërisë* për numrat e dhënë. Strategjitë nuk trajtohen si receta që mësohen dhe zbatohen sipas një liste. Arsyeja shpjegohet në seksionin 7.7.

7.2 Zbërthimi sipas vlerës vendore

Në këtë strategji, të dy numrat zbërthehen në dhjetëshe dhe njësi, dhe veprimi kryhet veç e veç për secilin rend. Për mbledhjen:

$$46 + 23 = (40 + 6) + (20 + 3) = (40 + 20) + (6 + 3) = 60 + 9 = 69. \quad (7.1)$$

Kalimi nga shprehja e dytë te e treta nuk është i vetëkuptueshëm. Ai kërkon disa zbatime të vetisë shoqëruese dhe një zbatim të vetisë ndërruese: (40 + 6) + (20 + 3) = 40 + (6 + (20 + 3)) = 40 + ((6 + 20) + 3) = 40 + ((20 + 6) + 3) = (40 + 20) + (6 + 3). Nxënësi nuk ka nevojë t'i shkruajë

këto hapa. Mësuesi, megjithatë, duhet të dijë se pas «rirenditjes» së të mbledhshmëve qëndrojnë pikërisht këto veti.

Për zbritjen, transformimi analog është:

$$(a_1 + a_0) - (b_1 + b_0) = (a_1 - b_1) + (a_0 - b_0), \quad \text{kur } b_1 \le a_1 \text{ dhe } b_0 \le a_0. \tag{7.2}$$

Vërtetim. Mjafton të tregojmë se $(b_1 + b_0) + (a_1 - b_1) + (a_0 - b_0) = a_1 + a_0$. Duke rirenditur të mbledhshmit, marrim $[b_1 + (a_1 - b_1)] + [b_0 + (a_0 - b_0)] = a_1 + a_0$. ∎

Kushti $b_0 \le a_0$ është vendimtar. Për $64 - 23 = (60 - 20) + (4 - 3) = 41$, ai plotësohet. Për $52 - 38$ nuk mund ta përdorim në $\mathbb{N}_0$ zbërthimin $(50 - 30) + (2 - 8)$, sepse $2 - 8$ nuk është i përcaktuar. Një zbërthim i përshtatshëm është jokanonik: $52 - 38 = (40 + 12) - (30 + 8) = 10 + 4 = 14$. Ky është rigrupimi i seksionit 6.6. Beishuizen (1993), në studimin e strategjive të nxënësve holandezë të klasës së dytë, e quajti këtë procedurë *1010*, sepse të dy numrat ndahen në dhjetëshe dhe njësi. Ai vuri në dukje se ajo ishte më e prirur ndaj gabimeve sesa procedura sekuenciale e seksionit 7.3, veçanërisht në zbritjet ku njësitë e zbritësit janë më të mëdha se ato të të zbritshmit.

Një nxënës mund të shpikë edhe një variant tjetër: «50 − 30 = 20. Pastaj kam 2 dhe duhet të heq 8, pra më mungojnë 6. 20 − 6 = 14». Ky arsyetim është matematikisht i saktë në $\mathbb{Z}$, sepse $(50 - 30) + (2 - 8) = 20 + (-6) = 14$. Nxënësi po përdor në mënyrë të nënkuptuar një numër negativ, të cilin e shpreh si «më mungojnë 6». Mësuesi që e njeh vetëm procedurën e rigrupimit mund ta konsiderojë gabim këtë zgjidhje. Mësuesi me njohuri të specializuar e njeh si strategji të vlefshme dhe kërkon që nxënësi ta shpjegojë qartë fjalën «mungojnë». Ky shembull ilustron saktësisht njohurinë që përshkruajnë Ball et al. (2008): aftësinë për të vlerësuar një metodë që mësuesi vetë nuk e përdor.

7.3 Strategjia sekuenciale

Në strategjinë sekuenciale, i zbritshmi mbetet i tërë, ndërsa zbritësi zbërthehet dhe zbritet pjesë-pjesë:

$$52 - 38 = (52 - 30) - 8 = 22 - 8 = 14. \tag{7.3}$$

Transformimi mbështetet në vetinë 2, $a - (b + c) = (a - b) - c$, me kushtin $b + c \le a$. Ky kusht plotësohet gjithmonë kur zbritja fillestare është e përcaktuar, sepse $b + c$ është vetë zbritësi. Prandaj strategjia sekuenciale nuk del kurrë jashtë $\mathbb{N}_0$. Ky është një avantazh matematikor ndaj zbërthimit sipas vlerës vendore. Beishuizen (1993) e quajti këtë procedurë *N10*, sepse njëri numër mbahet i tërë dhe tjetrit i shtohen ose i zbriten dhjetëshe. Ajo përkon natyrshëm me kërcimet në boshtin numerik të zbrazët (Figura 3) dhe me strukturën sekuenciale të dhjetësheve dhe njësive të përshkruar nga Fuson et al. (1997). Kërkesa njohëse e kësaj strategjie është mbajtja në kujtesë e rezultatit të ndërmjetëm, 22, ndërkohë që kryhet hapi i dytë.

7.4 Kalimi përmes dhjetëshes

Kur një veprim kalon nga një dhjetëshe te tjetra, numri i dytë mund të zbërthehet në mënyrë që hapi i parë të arrijë saktësisht te dhjetëshja e plotë:

$$28 + 7 = 28 + (2 + 5) = (28 + 2) + 5 = 30 + 5 = 35. \tag{7.4}$$

$$43 - 7 = 43 - (3 + 4) = (43 - 3) - 4 = 40 - 4 = 36. \tag{7.5}$$

Zbërthimi nuk zgjidhet rastësisht. Te mbledhja, pjesa e parë është largësia deri te dhjetëshja pasardhëse: 28 + 2 = 30. Te zbritja, pjesa e parë është shifra e njësive e të zbritshmit, që e çon atë te dhjetëshja paraardhëse: 43 − 3 = 40. Mbledhja mbështetet në vetinë shoqëruese, ndërsa zbritja në vetinë 2. Parakushtet janë njohja e sigurt e çifteve që japin 10 dhe e zbërthimeve të numrave njëshifrorë, të trajtuara në leksionin 3. Kjo strategji është zgjerim i drejtpërdrejtë i kalimit përmes dhjetës në fushën deri në 20. Rëndësia e saj didaktike qëndron në vazhdimësinë që krijon: ideja është e njëjtë, ndërsa ndryshon vetëm dhjetëshja që arrihet.

7.5 Plotësimi ndërmjet dy numrave

Plotësimi e gjen diferencën duke kërkuar shtesën nga zbritësi te i zbritshmi:

$$81 - 78 = \square \quad \Leftrightarrow \quad 78 + \square = 81, \quad \square = 3. \tag{7.6}$$

Strategjia mbështetet drejtpërdrejt në përkufizimin 3.1. Ajo është veçanërisht efikase kur zbritësi dhe i zbritshmi janë afër njëri-tjetrit. Për 81 − 78, heqja e 78 njësive, apo edhe e 7 dhjetësheve dhe 8 njësive, kërkon më shumë hapa sesa shtesa 78 + 2 = 80, 80 + 1 = 81. Për 52 − 38, plotësimi kalon nëpër dhjetëshe të plota: 38 + 2 = 40, 40 + 10 = 50, 50 + 2 = 52, pra diferenca është 2 + 10 + 2 = 14 (Figura 4).

Plotësimi kërkon që nxënësi ta ketë të formuar kuptimin e zbritjes si «sa duhet shtuar», pra kuptimet e plotësimit dhe të krahasimit nga seksioni 4. Nxënësi që e njeh zbritjen vetëm si heqje nuk e ka këtë strategji në dispozicion. Ky është një nga argumentet më të forta pse modeli i heqjes nuk mjafton.

7.6 Strategjitë si transformime: përmbledhje

Tabela 5 i përmbledh strategjitë e seksioneve 7.2–7.5 dhe kompensimin, që trajtohet në seksionin 8. Për secilën strategji tregohet transformimi, vetia mbi të cilën mbështetet dhe kushti i vlefshmërisë në $\mathbb{N}_0$.

Tabela 5. *Strategjitë e zbritjes me gojë si transformime të argumentuara*

Strategjia	Shembulli	Vetia mbështetëse	Kushti në $\mathbb{N}_0$	Kërkesa kryesore për nxënësin
Zbërthim sipas vlerës vendore (1010)	64 − 23 = (60 − 20) + (4 − 3)	Formula (7.2)	$b_1 \le a_1$ dhe $b_0 \le a_0$; përndryshe ndryshohet zbërthimi	Struktura e ndarë e dhjetësheve dhe njësive
Sekuenciale (N10)	52 − 38 = 52 − 30 − 8	Vetia 2, formula (3.3)	Plotësohet gjithmonë kur $a \ge b$	Mbajtja në kujtesë e rezultatit të ndërmjetëm
Kalim përmes dhjetëshes	43 − 7 = 43 − 3 − 4	Vetia 2	Plotësohet gjithmonë kur $a \ge b$	Zbërthimet e numrave njëshifrorë
Plotësim	81 − 78: 78 + 3 = 81	Përkufizimi 3.1	Plotësohet gjithmonë kur $a \ge b$	Kuptimi i zbritjes si shtesë
Kompensim pas zbritjes	52 − 38 = 52 − 40 + 2	Vetia 3, formula (3.4)	$b + k \le a$	Drejtimi i korrigjimit
Ruajtje e diferencës	52 − 38 = 54 − 40	Pohimi 8.2	$a \ge b$; për rritje $k \ge 0$; për ulje $0 \le k \le b$	Kuptimi i diferencës si largësi

7.7 Fleksibiliteti dhe zgjedhja e strategjisë

Mund të duket e natyrshme që strategjitë e Tabelës 5 t'u mësohen nxënësve si listë, së bashku me rregulla zgjedhjeje: «kur numrat janë afër, përdor plotësimin»; «kur zbritësi përfundon me 9, përdor kompensimin». Threlfall (2002) argumentoi kundër këtij modeli. Sipas tij, fleksibiliteti në llogaritjen me gojë nuk duhet kuptuar si zgjedhje e vetëdijshme dhe racionale nga një listë strategjish. Ai e përshkroi atë si rezultat të ndërveprimit ndërmjet asaj që nxënësi *vëren* te numrat e dhënë dhe asaj që ai *di* për numrat dhe veprimet. Nxënësi që sheh 76 − 69 dhe vëren se 69 është shumë afër 76-ës nuk «zgjedh plotësimin». Rruga e plotësimit i shfaqet si e natyrshme sepse e ka vërejtur këtë afërsi.

Pasoja didaktike është e rëndësishme. Në vend që të mësojë rregulla zgjedhjeje, mësuesi duhet të zhvillojë njohuritë mbi të cilat mbështeten vëzhgimet: afërsinë ndërmjet numrave, largësinë deri te dhjetëshet, zbërthimet e dobishme. Pastaj ai duhet të organizojë diskutime ku krahasohen zgjidhje të ndryshme të së njëjtës detyrë. Shembulli i mëposhtëm e ilustron këtë. Për 76 − 20, zbritja e dy dhjetësheve është e drejtpërdrejtë. Për 76 − 69, plotësimi 69 + 7 = 76 është ekonomik. Për 76 − 29, kompensimi 76 − 30 + 1 = 47 shfrytëzon afërsinë e 29-ës me 30-ën. Asnjë nga këto zgjedhje nuk është «e detyrueshme». Kriteri është përputhja ndërmjet numrave, strategjisë dhe të kuptuarit të nxënësit.

Kjo qasje përputhet me përkufizimin e rrjedhshmërisë procedurale në *Adding It Up* si aftësi për t'i kryer procedurat me fleksibilitet, saktësi dhe efikasitet (National Research Council, 2001). Ajo nuk e përjashton mësimin e strategjive. Ajo e zhvendos theksin nga zbatimi i një strategjie të caktuar te kuptimi i arsyes pse ajo funksionon dhe kur është e dobishme.

7.8 Njësi profesionale: vlerësimi i një strategjie jostandarde

Shembull matematikor i zgjidhur. Një nxënës e zgjidh 63 − 47 kështu: «60 − 40 = 20. 3 − 7: më mungojnë 4. 20 − 4 = 16». Në $\mathbb{Z}$, transformimi është $(60 - 40) + (3 - 7) = 20 + (-4) = 16$, dhe rezultati është i saktë. Verifikimi: $47 + 16 = 63$.

Paraqitja në klasën fillore. Mësuesi e vendos këtë zgjidhje pranë zgjidhjes sekuenciale të një nxënësi tjetër: 63 − 40 = 23, 23 − 7 = 16. Ai kërkon që klasa të krahasojë dy rrugët në boshtin numerik dhe me shufra e kubikë.

Pyetje diagnostikuese. «Çfarë do të thotë "më mungojnë 4"? Ku i gjen këto 4 në shufrat e tua?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Doja të hiqja 7 kubikë, por kisha vetëm 3. Hoqa 3 dhe më mbeti borxh të heq edhe 4 të tjerë. I hoqa nga 20».

Analiza didaktike. Përgjigjja jep një shpjegim matematikisht të vlefshëm për këtë rast. Qëndrueshmëria e të kuptuarit duhet kontrolluar me detyra të tjera. Nxënësi e trajton «borxhin» si sasi që duhet zbritur ende, pra përdor ide të numrit negativ pa simbolikën përkatëse. Shpjegimi i tij me kubikë është i saktë: pasi heq 3 kubikët e veçuar, ai heq 4 të tjerë nga dhjetëshet. Kjo zgjidhje nuk duhet korrigjuar. Ajo duhet bërë e dukshme për klasën si mënyrë e vlefshme.

Alternativë metodike ose kundërshembull. Rreziku i kësaj strategjie shfaqet kur «mungesa» harrohet ose shtohet në vend që të zbritet. Mësuesi e kontrollon këtë me 81 − 56: «80 − 50 = 30, 1 − 6: mungojnë 5». Nxënësi që shkruan 30 + 5 = 35 e ka ndryshuar drejtimin e korrigjimit. Përgjigjja e saktë është 25.

Pyetje reflektuese për studentin. Pse kjo strategji nuk mund të formulohet si vetia (7.2) në $\mathbb{N}_0$, por mund të formulohet në $\mathbb{Z}$? Çfarë do t'u thoshit prindërve që shohin në fletoren e fëmijës «3 − 7» dhe mendojnë se mësuesi ka lejuar një gabim?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Llogaritja me gojë vepron mbi numrat si të tërë, ndërsa algoritmi në kolonë vepron mbi shifrat.
- Strategjia sekuenciale nuk del jashtë $\mathbb{N}_0$ kur $a \geq b$; zbërthimi sipas vlerës vendore kërkon $b_0 \leq a_0$ ose rigrupim.
- Fleksibiliteti lind nga ajo që nxënësi vëren te numrat dhe nga ajo që di, jo nga një listë rregullash zgjedhjeje.
- Një strategji jostandarde vlerësohet sipas vlefshmërisë së saj, jo sipas ngjashmërisë me procedurën e mësuar.

8. Kompensimi dhe ruajtja e diferencës

NË KËTË KAPITULL

- Strategjia A: zbritja e një sasie më të madhe dhe korrigjimi
- Strategjia B: zhvendosja e të dy përbërësve
- Krahasimi i shprehur i dy mekanizmave
- Kufijtë e vlefshmërisë në $\mathbb{N}_0$
- Dialog i simuluar për analizë
- Njësi profesionale: ruajtja e diferencës dhe kufiri i përgjithësimit

Dy procedura që japin të njëjtin rezultat mund të mbështeten në marrëdhënie të ndryshme matematikore dhe të kërkojnë arsyetime të ndryshme nga nxënësi. Strategjitë e pyetjes hyrëse, 52 − 40 + 2 dhe 54 − 40, janë rasti më i qartë i kësaj dukurie. Në praktikën shkollore, të dyja quhen shpesh «kompensim». Ky seksion tregon se ato janë dy mekanizma të ndryshëm. Mësuesi duhet t'i bëjë këto marrëdhënie të shprehura, që nxënësi të mos mësojë vetëm një rregull të formës «shto ose hiq diçka në fund».

8.1 Strategjia A: zbritja e një sasie më të madhe dhe korrigjimi

$$52 - 38 = 52 - 40 + 2 = 12 + 2 = 14. \tag{8.1}$$

Zbritësi 38 zëvendësohet përkohësisht me 40, një numër më i lehtë për t'u zbritur. Duke zbritur 40, janë hequr dy njësi më shumë nga sa kërkohej. Prandaj ato duhet të rikthehen. I zbritshmi mbetet 52 gjatë gjithë procesit. Ndryshon vetëm zbritësi, dhe ky ndryshim korrigjohet *pas* zbritjes, te rezultati i ndërmjetëm.

Pohimi 8.1. Për a, b, k ∈ $\mathbb{N}_0$ me b + k ≤ a vlen

$$a - b = [a - (b + k)] + k. \tag{8.2}$$

Vërtetim. Le të jetë e = a − (b + k). Atëherë (b + k) + e = a, pra b + (e + k) = a. Sipas përkufizimit 3.1, a − b = e + k. ∎

Pohimi 8.1 është rast i veçantë i vetisë 3, kur zbritësi shkruhet si diferencë: b = (b + k) − k. Kushti b + k ≤ a është i domosdoshëm në $\mathbb{N}_0$, sepse rezultati i ndërmjetëm a − (b + k) duhet të jetë i përcaktuar. Figura 7 e paraqet strategjinë në boshtin numerik.

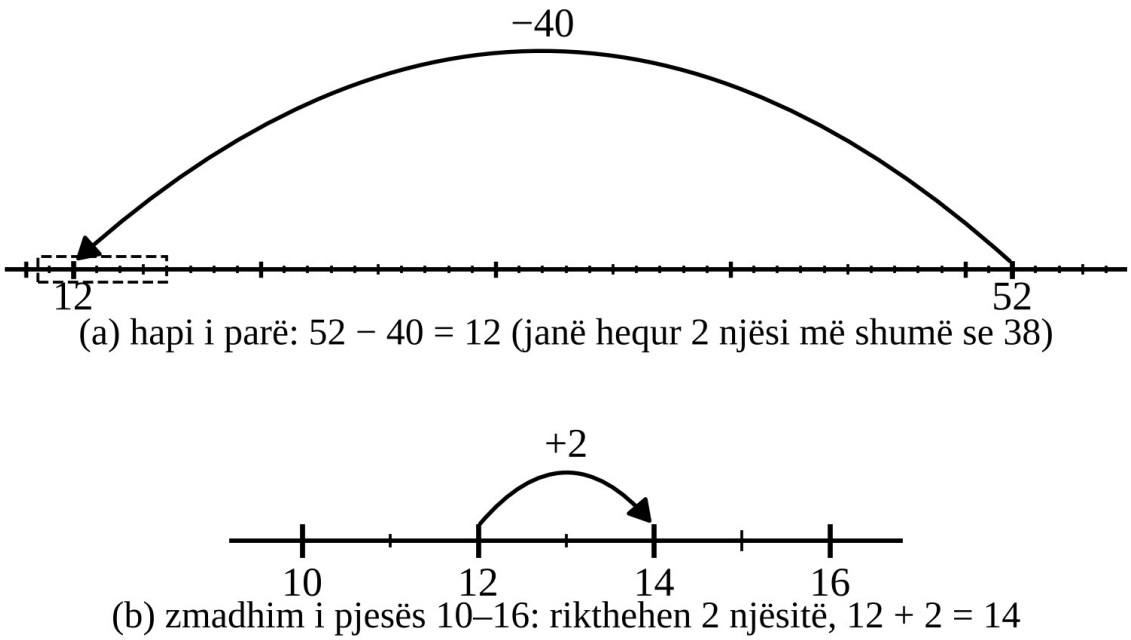


Figura 7. Strategjia A në boshtin numerik: (a) kërcimi −40 e kalon objektivin me dy njësi; (b) zmadhimi i pjesës 10–16 tregon rikthimin +2 nga 12 te 14.

Figura 7 tregon qartë natyrën e korrigjimit. Kërcimi −40 përfundon te 12, pra *para* përgjigjes, sepse u hoq më shumë se ç'duhej. Kërcimi +2 kthehet *pas*, në drejtim të kundërt. Drejtimi i korrigjimit nuk është rregull arbitrar. Ai del nga fakti që zbritësi u rrit. Nëse do ta kishim zvogëluar zbritësin, për shembull 52 − 38 = 52 − 30 − 8, nuk do të kishte korrigjim, por hap shtesë zbritjeje në të njëjtin drejtim. Në kontekst konkret: «Kam 52 lekë dhe duhet të paguaj 38. I jap shitësit 40 lekë dhe ai më kthen 2».

8.2 Strategjia B: zhvendosja e të dy përbërësve

$$52 - 38 = (52 + 2) - (38 + 2) = 54 - 40 = 14. \tag{8.3}$$

Këtu të dy përbërësit rriten me të njëjtën sasi. Nuk llogaritet asnjë rezultat i përkohshëm që pastaj korrigjohet. Problemi fillestar *zëvendësohet* me një problem tjetër, i cili ka të njëjtën përgjigje dhe është më i lehtë për t'u llogaritur. Diferenca e 54 − 40 është drejtpërdrejt përgjigjja përfundimtare.

Pohimi 8.2 (ruajtja e diferencës). Për a, b, k ∈ $\mathbb{N}_0$ me b ≤ a vlen

$$(a + k) - (b + k) = a - b. \tag{8.4}$$

Nëse, përveç kësaj, k ≤ b, vlen gjithashtu

$$(a - k) - (b - k) = a - b. \tag{8.5}$$

Vërtetim. Le të jetë d = a − b, pra b + d = a. Atëherë (b + k) + d = (b + d) + k = a + k. Sipas përkufizimit 3.1, (a + k) − (b + k) = d. Për (8.5), nga k ≤ b ≤ a rrjedh se a − k dhe b − k janë të

përcaktuara. Meqë (b − k) + d + k = b + d = a = (a − k) + k, nga vetia e anulimit kemi (b − k) + d = a − k. Prandaj (a − k) − (b − k) = d. ∎

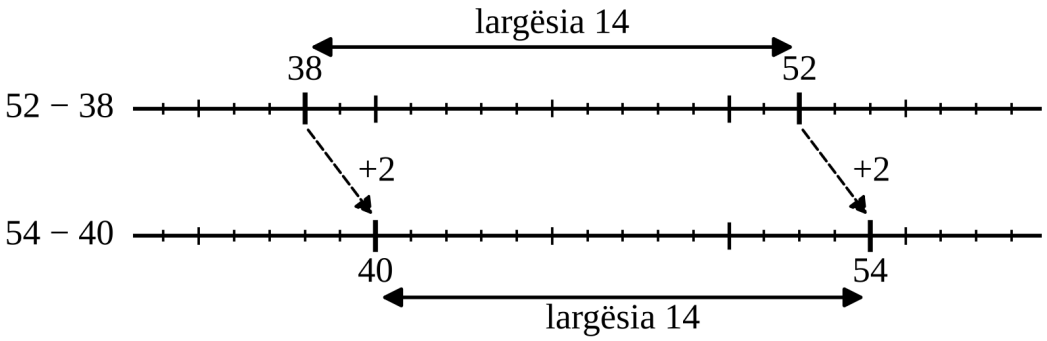


Figura 8. Strategjia B: zhvendosja e të dy skajeve me dy njësi në të njëjtin drejtim ruan largësinë 14. Të dy boshtet kanë të njëjtën shkallë.

Figura 8 e bën të dukshëm mekanizmin. Në boshtin numerik, diferenca është largësi. Kur të dy skajet zhvendosen me të njëjtën sasi dhe në të njëjtin drejtim, largësia ndërmjet tyre nuk ndryshon. Të dy boshtet duhet të kenë të njëjtën shkallë, sepse përndryshe krahasimi i largësive nuk ka kuptim. Një kontekst natyror për nxënësin është mosha: «Ana është 52 vjeç dhe Bora 38. Pas dy vjetësh, Ana do të jetë 54 dhe Bora 40. A do të ndryshojë diferenca e moshave?» Fëmijët e dinë intuitivisht se diferenca e moshave nuk ndryshon me kalimin e kohës. Kjo njohuri e jashtëshkollore mund të përdoret si argument për pohimin 8.2.

8.3 Krahasimi i shprehur i dy mekanizmave

Tabela 6 i krahason dy strategjitë sipas tetë aspekteve. Ajo i përgjigjet drejtpërdrejt pyetjes hyrëse.

Tabela 6. *Krahasimi i strategjisë A dhe strategjisë B për 52 − 38*

Aspekti	Strategjia A: 52 − 40 + 2	Strategjia B: 54 − 40
Çfarë ndryshon	Vetëm zbritësi: 38 → 40	Të dy përbërësit: 52 → 54 dhe 38 → 40
Rezultati i ndërmjetëm	Po: 12, që nuk është përgjigjja	Jo: 14 është menjëherë përgjigjja
Korrigjimi	Pas zbritjes, me drejtim të kundërt: +2	Nuk ka korrigjim
Vetia mbështetëse	Pohimi 8.1: a − b = [a − (b + k)] + k	Pohimi 8.2: (a + k) − (b + k) = a − b
Modeli më i përshtatshëm	Boshti numerik me dy kërcime (Figura 7)	Dy boshte paralele ose mosha (Figura 8)
Kushti në $\mathbb{N}_0$	b + k ≤ a	a ≥ b; asnjë kusht shtesë për k ≥ 0
Gabimi tipik	Korrigjim në drejtim të gabuar: 52 − 40 − 2 = 10	Ndryshim i pabarabartë: 52 − 38 = 55 − 40
Kërkesa njohëse	Mbajtja në kujtesë e rezultatit të ndërmjetëm dhe e korrigjimit	Kuptimi i diferencës si marrëdhënie që ruhet

Dy strategjitë janë të lidhura matematikisht. Nga vetia 4, kur b + k ≤ a, kemi (a + k) − (b + k) = [a − (b + k)] + k. Pra shprehjet (a + k) − (b + k) dhe [a − (b + k)] + k janë të barabarta kur plotësohet kushti b + k ≤ a; ato përfaqësojnë dy organizime të ndryshme të llogaritjes. Megjithatë, nga pikëpamja njohëse dhe didaktike, ato janë të ndryshme. Strategjia A është veprim me korrigjim. Strategjia B është transformim i problemit që mbështetet në një marrëdhënie ruajtjeje. Përgjigjja e plotë e pyetjes hyrëse është kjo: dy nxënësit nuk po përdorin të njëjtën ide, megjithëse idetë e tyre janë të lidhura dhe japin të njëjtin rezultat.

8.4 Kufijtë e vlefshmërisë në $\mathbb{N}_0$

Kushti b + k ≤ a i strategjisë A nuk është formalitet. Le të marrim 47 − 46. Nëse nxënësi përpiqet të zbatojë strategjinë A me 50 si zbritës të përshtatshëm, ai merr 47 − 50 + 4. Hapi 47 − 50 nuk është i përcaktuar në $\mathbb{N}_0$. Në $\mathbb{Z}$ rezultati do të ishte −3 + 4 = 1, i saktë, por kjo kërkon njohuri që nxënësi i klasës së dytë nuk i ka. Përfundimi didaktik është se strategjia A nuk është e përshtatshme për këtë rast. Plotësimi 46 + 1 = 47 është rruga e natyrshme. Kështu, kushti matematikor dhe vlerësimi i përshtatshmërisë së strategjisë përputhen. Afërsia e numrave nuk sjell domosdoshmërisht dalje nga $\mathbb{N}_0$: për 32 − 29, rrumbullakimi në 30 është i lejuar. Kufiri përcaktohet saktësisht nga b + k ≤ a, ndërsa efikasiteti vlerësohet sipas hapave dhe njohurive të nxënësit.

Për një zbritje fillestare me a ≥ b, strategjia B me rritje nuk kërkon kufizim shtesë për k ∈ $\mathbb{N}_0$. Në një detyrë të kufizuar deri në 100 duhet kontrolluar veçmas që numrat e transformuar të mbeten në këtë interval. Strategjia B me ulje kërkon k ≤ b. Për shembull, 52 − 38 = 50 − 36, me k = 2, është i vlefshëm. Ky variant nuk është domosdoshmërisht më i lehtë, prandaj në praktikë zgjidhet zakonisht rritja që e çon zbritësin te dhjetëshja e plotë. Për 32 − 29, të dyja strategjitë janë të vlefshme dhe të përshtatshme: 32 − 30 + 1 = 3, ku 30 ≤ 32, dhe 33 − 30 = 3.

8.5 Dialog i simuluar për analizë

Dialogu i mëposhtëm është simulim didaktik. Ai nuk paraqet të dhëna nga një klasë reale.

Mësuesja: «Te mënyra e parë, pse shton 2 në fund?»

Nxënësi 1: «Sepse hoqa 40, por duhej të hiqja 38. Hoqa 2 më shumë».

Mësuesja: «Po te mënyra e dytë, pse nuk shton përsëri 2?»

Nxënësi 2: «Sepse i rrita të dy numrat me 2 dhe diferenca nuk ndryshoi».

Mësuesja: «Si e di që nuk ndryshoi?»

Nxënësi 2: «Është si me moshat. Nëse unë jam 2 vjet më i madh se motra ime, do të jem gjithmonë 2 vjet më i madh».

Nxënësi 3: «Unë e bëj gjithmonë kështu: shtoj 2 në fund. Është rregulli».

Analiza dallon tri nivele. Nxënësi 1 jep një shpjegim *operacional* të saktë. Ai e di pse korrigjohet dhe në cilin drejtim. Nxënësi 2 jep një shpjegim *relacional* dhe e mbështet me një

model të njohur nga jeta, moshat. Ky është argument me shembull përfaqësues në kuptimin e seksionit 3.6. Nxënësi 3 nuk jep shpjegim. «Rregulli» i tij nuk dallon ndërmjet strategjisë A dhe B. Nëse ai e zbaton te strategjia B dhe shkruan 54 − 40 + 2 = 16, gabimi do të tregojë se ai ka mësuar një veprim pa kuptuar marrëdhënien. Përgjigjja «kështu është rregulli» nuk tregon nëse nxënësi kupton çfarë ruhet. Hapi pasues i mësueses duhet të kërkojë një model, një kontroll me mbledhje ose një shpjegim të lidhjes, për shembull: «Trego me dy shirita pse shton 2».

8.6 Njësi profesionale: ruajtja e diferencës dhe kufiri i përgjithësimit

Shembull matematikor i zgjidhur. Të vërtetohet se 64 − 29 = 65 − 30 dhe të llogaritet vlera. Sipas pohimit 8.2, me a = 64, b = 29 dhe k = 1, kemi (64 + 1) − (29 + 1) = 64 − 29. Prandaj 64 − 29 = 65 − 30 = 35. Verifikimi: 29 + 35 = 64.

Paraqitja në klasën fillore. Mësuesja vizaton dy shirita me fillim të përbashkët, me gjatësi 64 dhe 29, dhe shënon diferencën. Pastaj shton një njësi në fund të secilit shirit dhe pyet: «Çfarë ndodhi me pjesën që nuk ka çift?»

Pyetje diagnostikuese. «A vlen e njëjta gjë për mbledhjen? A është 38 + 27 = 39 + 28?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Po, sepse i rrita të dy me 1, si te zbritja».

Analiza didaktike. Nxënësi ka përgjithësuar ruajtjen e diferencës te shuma. Kjo tregon se e ka mësuar si rregull mbi numrat, «rrit të dy me të njëjtën sasi», dhe jo si veti të marrëdhënies së diferencës. Në fakt, 38 + 27 = 65, ndërsa 39 + 28 = 67. Shuma rritet me 2. Gabimi është i parashikueshëm dhe pikërisht për këtë arsye pyetja diagnostikuese është e dobishme.

Alternativë metodike ose kundërshembull. Mësuesja paraqet të dyja situatat me shirita. Te zbritja, shiritat krahasohen dhe teprica ruhet. Te mbledhja, shiritat vendosen njëri pas tjetrit dhe gjatësia e plotë rritet me dy njësi. Pastaj pyet: «Çfarë duhet të bëjmë që shuma të mos ndryshojë?» Përgjigjja, «nëse njërit i shtojmë 1, tjetrit duhet t'i heqim 1», përgatit seksionin 9.

Pyetje reflektuese për studentin. Pse i njëjti veprim, rritja e të dy numrave me k, ruan njërin rezultat dhe ndryshon tjetrin? Formuloni dallimin me fjalë të përshtatshme për nxënësin dhe me simbole për kolegët tuaj.

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Strategjia A ndryshon vetëm zbritësin dhe korrigjon rezultatin e ndërmjetëm; strategjia B ndryshon të dy përbërësit dhe ruan diferencën.
- Drejtimi i korrigjimit rrjedh nga drejtimi i ndryshimit të zbritësit, jo nga një rregull i mësuar përmendsh.
- Strategjia A kërkon b + k ≤ a; efikasiteti i saj vlerësohet sipas numrave dhe njohurive të nxënësit.
- Diferenca e moshave është model natyror i ruajtjes së diferencës.

9. Varësia e shumës nga të mbledhshmit

NË KËTË KAPITULL

- Ndryshimi i njërit të mbledhshëm
- Ruajtja e shumës
- Ndryshimi i njëkohshëm i të dy të mbledhshmëve
- Variacioni sistematik dhe kalimi nga shembujt te argumentimi
- Njësi profesionale: drejtimi i kompensimit te mbledhja

Seksionet 9 dhe 10 trajtojnë një temë që programi e formulon si «varësia e rezultatit nga përbërësit e veprimit». Për nxënësin, kjo temë nuk ka të bëjë me llogaritjen e një rezultati të ri. Ajo ka të bëjë me *parashikimin* se si ndryshon një rezultat i njohur kur ndryshojnë përbërësit. Ky lloj arsyetimi, që ka në qendër marrëdhëniet ndërmjet shprehjeve dhe jo vlerat e tyre, quhet *arsyetim relacional*. Ai përbën një nga lidhjet më të drejtpërdrejta ndërmjet aritmetikës dhe algjebrës fillestare (Carpenter et al., 2003).

9.1 Ndryshimi i njërit të mbledhshëm

Le të jetë $S = a + b$, ku $a, b \in \mathbb{N}_0$.

Pohimi 9.1. Për çdo $k \in \mathbb{N}_0$ vlen $(a + k) + b = S + k$. Nëse $k \le a$, vlen gjithashtu $(a - k) + b = S - k$.

Vërtetim. Pjesa e parë rrjedh nga vetitë ndërruese dhe shoqëruese: $(a + k) + b = a + (k + b) = a + (b + k) = (a + b) + k$. Për pjesën e dytë, kemi $[(a - k) + b] + k = [(a - k) + k] + b = a + b = S$. Sipas përkufizimit 3.1, $(a - k) + b = S - k$. ∎

Me fjalë: kur rritet vetëm njëri i mbledhshëm me k, shuma rritet me k. Kur zvogëlohet vetëm njëri me k, shuma zvogëlohet me k. Në $\mathbb{N}_0$, kjo kërkon që i mbledhshmi i ri të mbetet jonegativ. Për shembull, nga $36 + 24 = 60$ përftojmë $39 + 24 = 63$ pa e llogaritur sërish shumën. Vetëm sasia e parë rritet me 3, prandaj nuk ka arsye që të ndryshojë diçka tjetër përveç shumës. Pyetja «Çfarë mbeti e pandryshuar?» e ndihmon nxënësin të identifikojë sasinë që mbahet konstante. Ky është *kontrolli i një ndryshoreje*, një aftësi që shkon përtej matematikës.

9.2 Ruajtja e shumës

Pohimi 9.2 (ruajtja e shumës). Për $a, b, k \in \mathbb{N}_0$ me $k \le b$ vlen

$$(a + k) + (b - k) = a + b. \tag{9.1}$$

Vërtetim. (a + k) + (b − k) = a + [k + (b − k)] = a + b, sepse k + (b − k) = b sipas përkufizimit 3.1. ∎

Shembulli 38 + 27 = 40 + 25 = 65 përfaqëson *transferimin* e dy njësive nga i mbledhshmi i dytë te i pari. Sasia e përgjithshme nuk ndryshon, sepse asgjë nuk shtohet nga jashtë dhe asgjë nuk largohet. Njësitë vetëm ndërrojnë vend. Figura 9 e paraqet këtë transferim me një shirit të vetëm.

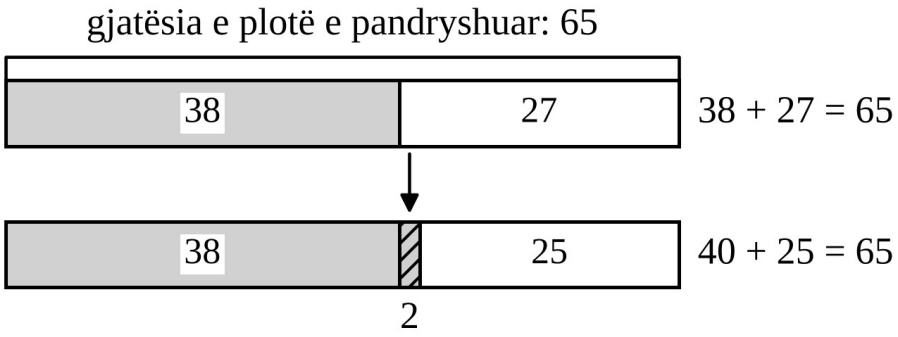


Figura 9. Ruajtja e shumës: 38 + 27 = 40 + 25. Dy njësi (me vija) kalojnë nga pjesa e dytë te e para; kufiri ndërmjet pjesëve zhvendoset, ndërsa gjatësia e plotë mbetet 65.

Në Figurën 9, të dy shiritat kanë të njëjtën gjatësi të plotë. I ndryshëm është vetëm vendi i kufirit ndërmjet dy pjesëve. Ky përfaqësim e bën të dukshme pse ndryshimet duhet të kenë drejtime të kundërta: njëra pjesë rritet pikërisht me aq sa zvogëlohet tjetra. Në klasë, i njëjti transferim mund të paraqitet me dy grupe kubikësh, duke lëvizur fizikisht dy kubikë nga njëri grup te tjetri.

Ruajtja e shumës është baza e strategjisë së mbledhjes me gojë që e çon njërin të mbledhshëm te dhjetëshja e plotë: 49 + 36 = 50 + 35 = 85. Në këtë kuptim, ajo është «motra» e strategjisë B për zbritjen. Dallimi i drejtimit të ndryshimeve analizohet në seksionin 10.3.

9.3 Ndryshimi i njëkohshëm i të dy të mbledhshmëve

Nëse të dy të mbledhshmit rriten me k, shuma rritet me 2k: (a + k) + (b + k) = (a + b) + 2k. Për shembull, 38 + 27 = 65, ndërsa 40 + 29 = 69. Ky kundërshembull është i dobishëm kundër përgjithësimit të gabuar «po t'u shtojmë të dyve të njëjtin numër, rezultati ruhet». Ky përgjithësim lind shpesh pas trajtimit të ruajtjes së diferencës.

Në përgjithësi, nëse i mbledhshmi i parë ndryshon me p dhe i dyti me q, shuma ndryshon me p + q. Në $\mathbb{Z}$, ku p dhe q mund të jenë edhe negativë, vlen gjithmonë (a + p) + (b + q) = S + p + q. Ruajtja e shumës është rasti i veçantë q = −p. Ky formulim i përgjithshëm i shërben studentit për të parë njëkohësisht të gjitha rastet. Për nxënësin mjaftojnë rastet e veçanta, të shprehura me fjalë dhe figura.

9.4 Variacioni sistematik dhe kalimi nga shembujt te argumentimi

Ndryshimi i shumës është temë ideale për zbatimin e teorisë së variacionit, sepse përbërësit mund të ndryshohen në mënyrë plotësisht të kontrolluar. Më poshtë jepen dy vargje me qëllime të ndryshme.

Vargu I: ndryshon vetëm i mbledhshmi i parë. 36 + 24 = 60; 37 + 24 = □; 38 + 24 = □; 39 + 24 = □. I mbledhshmi i dytë mbetet i pandryshuar dhe ky fakt i jep kuptim krahasimit. Nxënësi duhet të vërejë se shuma rritet me 1 sa herë që i mbledhshmi i parë rritet me 1. Pastaj ai duhet ta parashikojë vlerën pa llogaritur.

Vargu II: të dy ndryshojnë në drejtime të kundërta. 25 + 35; 26 + 34; 27 + 33; 28 + 32. Nxënësi përshkruan ndryshimin, «i pari rritet me 1, i dyti zvogëlohet me 1», dhe parashikon çiftin pasues. Pastaj mësuesi pyet: «A mjaftojnë këto katër barazime për të provuar se rregulli vlen për çdo çift?»

Përgjigjja është jo. Shembujt sugjerojnë një përgjithësim, por nuk e vërtetojnë atë. Edhe një numër i madh shembujsh nuk përbën vërtetim, sepse rastet e pakontrolluara mbeten pafundësisht shumë. Argumentimi që e shpjegon *pse* vlen rregulli është i ndryshëm. Për nxënësin, ai mund të marrë formën e transferimit të një kubiku nga një grup te tjetri: «Nëse marr një kubik nga grupi i dytë dhe e vë te i pari, numri i përgjithshëm i kubikëve nuk ndryshon, sido që të jenë grupet». Shprehja «sido që të jenë grupet» e bën këtë argument me shembull përfaqësues të vlefshëm për çdo rast. Për studentin, argumenti është vërtetimi i pohimit 9.2.

Në mësimdhënien fillore përdoren shprehje verbale dhe figura. Formalizimi me a, b dhe k i shërben studentit universitar për të kuptuar strukturën dhe kufizimet. Materialet profesionale për përdorimin e barazvlerësisë dhe të vetisë së kompensimit trajtojnë ndryshimin e të mbledhshmëve dhe ruajtjen e shumës si mjet llogaritjeje (NCETM, pa datë-c). Shembujt, vargjet dhe argumentimet e këtij seksioni janë zhvilluar posaçërisht për këtë leksion.

9.5 Njësi profesionale: drejtimi i kompensimit te mbledhja

> **Shembull matematikor i zgjidhur.** 49 + 36. Sipas pohimit 9.2, me k = 1: (49 + 1) + (36 − 1) = 50 + 35 = 85. Rruga tjetër, sipas pohimit 9.1: 49 + 36 = (50 − 1) + 36 = (50 + 36) − 1 = 86 − 1 = 85.
>
> **Paraqitja në klasën fillore.** Mësuesi paraqet 49 me 4 shufra dhe 9 kubikë, ndërsa 36 me 3 shufra dhe 6 kubikë. Pyet: «Si mund ta bëjmë 49 një dhjetëshe të plotë pa shtuar kubikë nga jashtë?» Nxënësi kalon një kubik nga 36 te 49.
>
> **Pyetje diagnostikuese.** «Ti e bëre 49 në 50. Çfarë duhet të ndodhë me 36, që shuma të mos ndryshojë? Pse?»
>
> **Përgjigje e mundshme e nxënësit.** «49 + 36: e bëj 50 + 36 = 86 dhe pastaj shtoj 1, se e ndryshova 49. Del 87».

Analiza didaktike. Nxënësi ka kuptuar se ndryshimi i njërit të mbledhshëm duhet korrigjuar, por e ka korrigjuar në drejtim të gabuar. Ka dy hipoteza të mundshme. Sipas të parës, ai ka transferuar «rregullin» e strategjisë A të zbritjes, ku korrigjimi bëhet me shtim, pa e analizuar situatën e re. Sipas të dytës, ai e kupton «korrigjimin» thjesht si «e kthej numrin që ndryshova», pa e lidhur me drejtimin e ndryshimit. Dy hipotezat dallohen me pyetjen: «Kur e bëre 49 në 50, e rrite apo e zvogëlove? Si ndikon kjo te shuma?»

Alternativë metodike. Përdoret shiriti i Figurës 9: shtimi i një njësie te 49 e zgjat shiritin e plotë, prandaj shuma 86 është *më e madhe* se shuma e kërkuar dhe duhet zvogëluar. Kontroll transferimi: 58 + 27, ku nxënësi duhet ta shpjegojë drejtimin e korrigjimit para se të llogarisë.

Pyetje reflektuese për studentin. Në 49 + 36 dhe 52 − 38, numri «i vështirë» rritet në të dy rastet deri te dhjetëshja e plotë. Pse korrigjimi ka shenjë të kundërt në dy rastet? Formuloni një shpjegim që nuk përdor fjalët «shto» dhe «hiq».

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Ndryshimi i njërit të mbledhshëm me k e ndryshon shumën me k, në të njëjtin drejtim.
- Shuma ruhet kur të mbledhshmit ndryshojnë me të njëjtën sasi në drejtime të kundërta.
- Rritja e të dy të mbledhshmëve me k e rrit shumën me 2k.
- Vargjet me variacion e sugjerojnë rregullin; argumenti i transferimit të njësive e shpjegon atë.

10. Varësia e diferencës nga i zbritshmi dhe zbritësi

NË KËTË KAPITULL

- Ndryshimi i njërit përbërës
- Ndryshimi i njëkohshëm i të dy përbërësve
- Krahasimi me ndryshimin e shumës
- Arsyetimi relacional dhe kuptimi i barazimit
- Njësi profesionale: barazi apo jo?

Le të jetë $D = a - b$, me $a, b \in \mathbb{N}_0$ dhe $a \geq b$. Ndryshimi i të zbritshmit dhe ndryshimi i zbritësit kanë efekte të ndryshme mbi diferencën. Për të shmangur memorizimin mekanik, mësuesi i analizon fillimisht veçmas dhe vetëm pastaj i kombinon.

10.1 Ndryshimi i njërit përbërës

Tabela 7 përmbledh katër rastet themelore me të njëjtin shembull bazë, $62 - 27 = 35$, dhe me kushtet e vlefshmërisë në $\mathbb{N}_0$.

Tabela 7. *Ndryshimi i diferencës kur ndryshon vetëm njëri përbërës*

Ndryshimi	Efekti mbi D	Shembull	Kushti në $\mathbb{N}_0$ dhe vetia mbështetëse
I zbritshmi rritet me k	D rritet me k	$65 - 27 = 38$	Asnjë kusht; vetia 4
I zbritshmi ulet me k	D ulet me k	$60 - 27 = 33$	$k \leq D$, që të kemi $a - k \geq b$
Zbritësi rritet me k	D ulet me k	$62 - 30 = 32$	$k \leq D$, që të kemi $b + k \leq a$; vetia 2
Zbritësi ulet me k	D rritet me k	$62 - 25 = 37$	$k \leq b$; vetia 3

Pohimi 10.1. Me shënimet e mësipërme:

(i) $(a + k) - b = D + k$, për çdo $k \in \mathbb{N}_0$;
(ii) $(a - k) - b = D - k$, për $k \leq D$;
(iii) $a - (b + k) = D - k$, për $k \leq D$;
(iv) $a - (b - k) = D + k$, për $k \leq b$.

Vërtetim. Pika (i) është vetia 4. Pika (iii) është vetia 2, sepse $a - (b + k) = (a - b) - k$ dhe kushti $b + k \leq a$ është i njëvlershëm me $k \leq D$. Pika (iv) është vetia 3. Për pikën (ii), kushti $k \leq D$ sjell $b + k \leq a$, pra $a - k \geq b$, prandaj $(a - k) - b$ është e përcaktuar. Vlen $b + (D - k) + k = b + D = a = (a - k) + k$. Nga vetia e anulimit, $b + (D - k) = a - k$, pra $(a - k) - b = D - k$. ∎

Tabela dhe pohimi tregojnë një asimetri që duhet bërë e dukshme. Ndryshimi i *të zbritshmit* ndikon mbi diferencën *në të njëjtin drejtim*. Ndryshimi i *zbritësit* ndikon *në drejtim të kundërt*. Kjo asimetri ka një shpjegim të thjeshtë në modelin e krahasimit me shirita. Diferenca është pjesa e shiritit të të zbritshmit që mbetet pa çift. Kur zgjatet shiriti i të zbritshmit, kjo pjesë zgjatet. Kur zgjatet shiriti i zbritësit, ai mbulon një pjesë më të madhe të shiritit të parë, prandaj pjesa pa çift shkurtohet.

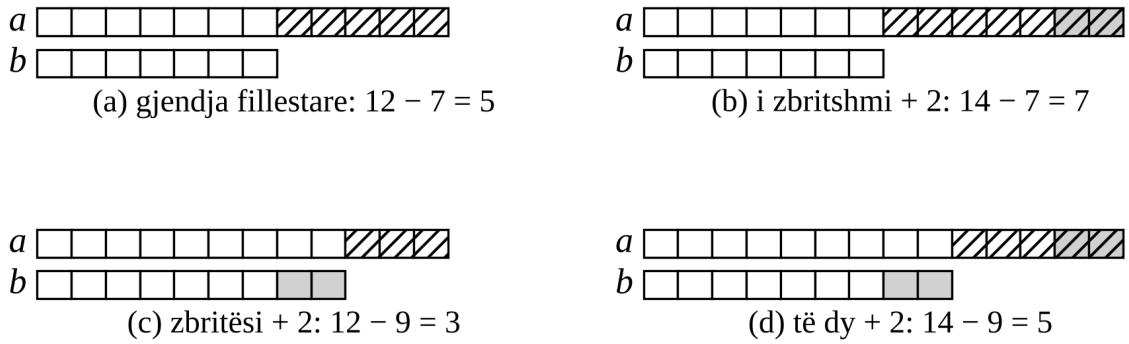


Figura 10. Ndryshimi i diferencës në modelin e krahasimit (njësitë e shtuara janë gri; diferenca është me vija): (a) gjendja fillestare; (b) rritet vetëm i zbritshmi; (c) rritet vetëm zbritësi; (d) rriten të dy me të njëjtën sasi.

Figura 10 i paraqet katër situatat me shembullin 12 − 7 = 5 dhe k = 2. Te (b), dy njësitë e shtuara te shiriti i sipërm i shtohen drejtpërdrejt pjesës pa çift dhe diferenca bëhet 7. Te (c), dy njësitë e shtuara te shiriti i poshtëm mbulojnë dy njësi që më parë ishin pa çift dhe diferenca bëhet 3. Te (d), dy efektet e kundërta anulojnë njëri-tjetrin dhe pjesa pa çift mbetet 5, por zhvendoset djathtas. Kjo është ruajtja e diferencës në një model tjetër nga ai i Figurës 8.

10.2 Ndryshimi i njëkohshëm i të dy përbërësve

Pohimi 10.2. Le të jetë $D = a - b$ me $a \geq b$ dhe le të jenë $p, q \in \mathbb{N}_0$. Nëse $p \geq q$, atëherë

$$(a + p) - (b + q) = D + (p - q). \tag{10.1}$$

Nëse $p < q$, atëherë diferenca $(a + p) - (b + q)$ është e përcaktuar në $\mathbb{N}_0$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $q - p \leq D$, dhe në këtë rast është e barabartë me $D - (q - p)$.

Vërtetim. Për $p \geq q$ kemi $(b + q) + [D + (p - q)] = (b + D) + [q + (p - q)] = a + p$, prandaj vlen (10.1). Për $p < q$, shkruajmë $b + q = b + p + (q - p)$. Atëherë $(a + p) - (b + q) = (a + p) - [(b + p) + (q - p)]$. Sipas pohimit 8.2, $(a + p) - (b + p) = D$. Sipas vetisë 2, shprehja është e përcaktuar atëherë dhe vetëm atëherë kur $q - p \leq D$, dhe vlera e saj është $D - (q - p)$. ∎

Në $\mathbb{Z}$, të dy rastet bashkohen në një formulë të vetme: $(a + p) - (b + q) = D + p - q$, për çdo $p, q \in \mathbb{Z}$. Kur $p = q$, diferenca ruhet. Kur $p > q$, ajo rritet me $p - q$. Kur $p < q$, ajo ulet me $q - p$. Ky formulim i përgjithshëm është për analizën e studentit universitar.

Zbatim: nga 63 − 28 = 35, parashikoni 66 − 30 pa e llogaritur nga fillimi. I zbritshmi rritet me p = 3 dhe zbritësi me q = 2. Prandaj diferenca rritet me 1 dhe rezultati është 36. Verifikimi: 30 + 36 = 66. Një shembull tjetër me ulje të njëkohshme: 73 − 48 = 70 − 45 = 25, ku p = q = 3 në drejtimin e uljes. Kushti k ≤ b plotësohet, sepse 3 ≤ 48.

10.3 Krahasimi me ndryshimin e shumës

Tabela 8 i vendos pranë njëri-tjetrit efektet e ndryshimeve mbi shumën dhe mbi diferencën.

Tabela 8. *Efekti i ndryshimeve të përbërësve mbi shumën dhe diferencën*

Ndryshimi i përbërësve	Shuma a + b	Diferenca a − b
I pari rritet me k	rritet me k	rritet me k
I dyti rritet me k	rritet me k	ulet me k
Të dy rriten me k	rritet me 2k	ruhet
I pari rritet me k, i dyti ulet me k	ruhet	rritet me 2k

Për shumën, rritja e njërit përbërës kompensohet me uljen e tjetrit. Për diferencën, ruajtja kërkon ndryshim të barabartë *në të njëjtin drejtim*. Burimi i këtij dallimi nuk është te numrat, por te *roli* i përbërësve. Te mbledhja, të dy të mbledhshmit kanë rol simetrik, sepse mbledhja është ndërruese, dhe secili kontribuon në të njëjtën mënyrë te shuma. Te zbritja, i zbritshmi dhe zbritësi kanë role të kundërta: njëri kontribuon pozitivisht, tjetri negativisht. Në $\mathbb{Z}$ kjo shprehet me a − b = a + (−b). Rritja e zbritësit është, në fakt, zvogëlim i të mbledhshmit −b. Kështu, ruajtja e diferencës është ruajtja e shumës a + (−b): i pari rritet me k, ndërsa i dyti, −b, zvogëlohet me k.

Studentët duhet ta shpjegojnë këtë dallim me një model, jo vetëm ta riprodhojnë si formulë. Modelet përkatëse janë shiriti i vetëm i ndarë në dy pjesë për shumën (Figura 9) dhe dy shiritat krahasues për diferencën (Figura 10).

10.4 Arsyetimi relacional dhe kuptimi i barazimit

Detyrat e këtij seksioni dhe të seksionit 9 kanë një tipar të përbashkët: ato mund të zgjidhen pa llogaritur asnjë shumë ose diferencë. Barazimi 74 − 38 = □ − 40 zgjidhet duke vërejtur se zbritësi u rrit me 2, prandaj edhe i zbritshmi duhet të rritet me 2: □ = 76. Ky është arsyetim relacional. Carpenter et al. (2003) propozuan përdorimin sistematik të fjalive numerike të vërteta ose të rreme, si «57 − 28 = 60 − 30», për ta nxitur këtë lloj arsyetimi në arsimin fillor dhe për ta lidhur aritmetikën me algjebrën.

Arsyetimi relacional kërkon një kuptim të caktuar të shenjës së barazimit. Shenja duhet kuptuar si marrëdhënie barazvlerësie ndërmjet dy shprehjeve dhe jo si urdhër për të shkruar rezultatin. Knuth et al. (2006) gjetën te nxënësit e klasave 6–8 se kuptimi relacional i shenjës së barazimit lidhej me suksesin në zgjidhjen e ekuacioneve. Ky rezultat ka të bëjë me nxënës më të

rritur se ata të arsimit fillor. Ai nuk vërteton drejtpërdrejt efektin e mësimdhënies në klasat 1–2, por tregon pse kuptimi i barazimit që ndërtohet herët ka rëndësi për vazhdimësinë e të nxënit. Kjo është arsyeja pse leksioni kërkon që barazimet si 52 − 38 = 54 − 40 të shkruhen dhe të diskutohen si të tilla. Shkrimi «52 − 38 = 14 = 54 − 40» është matematikisht i saktë, sepse të tri shprehjet kanë vlerën 14. Për të theksuar transformimin mund të parapëlqehet «52 − 38 = 54 − 40 = 14». Ndërsa vargu «52 − 40 = 12 + 2 = 14» është i pasaktë, sepse 52 − 40 = 12 dhe jo 14. Shkrimi i saktë i kompensimit është «52 − 38 = 52 − 40 + 2 = 12 + 2 = 14».

10.5 Njësi profesionale: barazi apo jo?

Shembull matematikor i zgjidhur. A është 57 − 28 = 60 − 30? Nga 57 te 60, i zbritshmi rritet me p = 3. Nga 28 te 30, zbritësi rritet me q = 2. Sipas pohimit 10.2, diferenca rritet me p − q = 1. Prandaj barazimi është i rremë: 57 − 28 = 29, ndërsa 60 − 30 = 30. Një barazim i vërtetë me zbritës 30 është 57 − 28 = 59 − 30.

Paraqitja në klasën fillore. Mësuesi shkruan në tabelë tri fjali numerike dhe kërkon që nxënësit të vendosin «e vërtetë» ose «e rreme» pa llogaritur: 52 − 38 = 54 − 40; 57 − 28 = 60 − 30; 45 + 29 = 44 + 30.

Pyetje diagnostikuese. «Çfarë ndryshoi nga ana e majtë te ana e djathtë? A ndryshuan të dy numrat njësoj?»

Përgjigje e mundshme e nxënësit. «Është e vërtetë, sepse edhe këtu e bëmë zbritësin një dhjetëshe të plotë, si te shembulli i parë».

Analiza didaktike. Përgjigjja sugjeron se nxënësi po përdor si kriter faktin që zbritësi bëhet dhjetëshe e plotë. Ky kriter nuk garanton ruajtjen e diferencës. Duhet kontrolluar nëse nxënësi shqyrton madhësinë e ndryshimit të secilit përbërës. Përgjigjja e vetme nuk provon se si është formuar ky interpretim ose si ka qenë mësimdhënia e mëparshme.

Alternativë metodike ose kundërshembull. Mësuesi paraqet dy fjali ku vetëm njëra ruan diferencën, megjithëse në të dyja zbritësi bëhet dhjetëshe e plotë: 52 − 38 = 54 − 40, që është e vërtetë, dhe 51 − 38 = 50 − 40, që është e rreme. Pastaj shton një fjali ku numrat nuk bëhen dhjetëshe të plota, por diferenca ruhet: 52 − 38 = 53 − 39. Kontrasti e veçon aspektin kritik.

Pyetje reflektuese për studentin. Si do ta ndërtonit një varg prej katër fjalish numerike që e ndan aspektin «sasia e ndryshimit» nga aspekti «dhjetëshja e plotë»? Cili model variacioni nga seksioni 2.5 po përdorni?

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- I zbritshmi ndikon mbi diferencën në të njëjtin drejtim; zbritësi ndikon në drejtim të kundërt.
- $(a + p) - (b + q) = D + p - q$, me kushte vlefshmërie të përcaktuara saktë në $\mathbb{N}_0$.
- Ruajtja e diferencës mund të lexohet si ruajtje e shumës $a + (-b)$.
- Arsyetimi relacional kërkon që shenja e barazimit të lexohet si marrëdhënie barazvlerësie.

11. Analiza e gabimeve dhe ndërhyrja didaktike

NË KËTË KAPITULL

- Nga etiketimi te hipoteza
- Rasti A: zbritja e shifrës më të vogël nga më e madhja
- Rasti B: kompensimi në drejtim të gabuar
- Rasti C: vlera vendore e paqartë
- Rasti D: shenja e barazimit si sinjal për përgjigjen
- Rasti E: zgjedhja e veprimit sipas fjalës kyçe
- Rasti F: numërimi i skajeve në plotësim
- Përmbledhje e rasteve

11.1 Nga etiketimi te hipoteza

Një përgjigje e gabuar është evidencë, jo diagnozë. E njëjta përgjigje mund të vijë nga arsye të ndryshme, dhe i njëjti keqkuptim mund të prodhojë përgjigje të ndryshme në detyra të ndryshme. Prandaj mësuesi nuk mund ta përcaktojë shkakun e një gabimi nga një përgjigje e vetme. Ai formulon një ose disa *hipoteza*, bën pyetje që i dallojnë ato nga njëra-tjetra dhe përdor një detyrë tjetër që mund ta mbështesë ose ta kundërshtojë hipotezën.

Kërkimi mbi gabimet procedurale në aritmetikë ka treguar se shumë gabime nuk janë të rastësishme. Ato janë zbatim i qëndrueshëm i një procedure të gabuar, të cilën Brown dhe Burton (1978) e quajtën *defekt procedural* (ang. *bug*). Një nga defektet që ata përshkruan është zbritja e shifrës më të vogël nga më e madhja në çdo kolonë, pavarësisht se cila shifër i përket të zbritshmit. Karakteri sistematik i këtyre gabimeve ka një pasojë të rëndësishme: ato mund të *parashikohen* dhe për këtë arsye mund të *diagnostikohen* me detyra të përzgjedhura.

Çdo rast më poshtë analizohet në katër faza. Në fazën e parë, *evidenca e vëzhguar*, përshkruhet saktësisht çfarë shkroi ose tha nxënësi, pa interpretim. Në fazën e dytë, *hipotezat e mundshme*, formulohen të paktën dy shpjegime alternative. Në fazën e tretë, *pyetjet diagnostikuese*, jepen pyetje ose detyra që i dallojnë hipotezat. Në fazën e katërt, *ndërhyrja dhe kontrolli i transferimit*, propozohet një ndërhyrje dhe një detyrë e re që tregon nëse ndryshimi u ruajt jashtë rastit të trajtuar. Të gjitha rastet janë të simuluara.

11.2 Rasti A: zbritja e shifrës më të vogël nga më e madhja

Evidenca e vëzhguar. Nxënësi shkruan 52 − 38 = 26 dhe shpjegon: «5 − 3 = 2; 8 − 2 = 6». Në kolonën e njësive, ai ka ndërruar rendin e përbërësve.

Hipotezat e mundshme. *H1:* Nxënësi zbaton në mënyrë sistematike defektin «zbrit shifrën më të vogël nga më e madhja». Ky defekt mund të ketë lindur nga përvoja me detyra pa rigrupim, ku

shifra e sipërme ishte gjithmonë më e madhe. *H2:* Nxënësi beson se zbritja është ndërruese, se «8 − 2 dhe 2 − 8 janë e njëjta gjë». *H3:* Nxënësi e di se nevojitet rigrupim, por nuk di si ta kryejë dhe zgjedh një rrugë që jep një rezultat.

Një analizë matematikore e ndihmon mësuesin të njohë këtë gabim. Me shënimet e seksionit 6.6, përgjigjja e saktë është $10(d_1 - d_2) - (u_2 - u_1)$, ndërsa defekti jep $10(d_1 - d_2) + (u_2 - u_1)$. Përgjigjja e gabuar e kalon atë të saktën gjithmonë me $2(u_2 - u_1)$. Te 52 − 38, kjo është $2 \cdot 6 = 12$, dhe vërtet 26 − 14 = 12. Kontrolli me mbledhje e zbulon menjëherë: 38 + 26 = 64 ≠ 52.

Pyetjet diagnostikuese. (1) «Çfarë sasie përfaqëson 5 te 52? Po 2-shi?» (2) «Ndërtoje 52 me shufra dhe kubikë. A mund të heqësh 8 kubikë?» (3) Jepen dy detyra: 47 − 13, pa rigrupim, dhe 41 − 17, me rigrupim. Nëse nxënësi zgjidh saktë të parën dhe jep 36 te e dyta, H1 forcohet. (4) «A është 8 − 2 e njëjtë me 2 − 8? Trego me kubikë». Përgjigjja «po» mbështet H2.

Ndërhyrja dhe kontrolli i transferimit. Nxënësi paraqet 52 me materiale dhjetore dhe përpiqet të heqë 3 dhjetëshe dhe 8 njësi. Kur konstaton se ka vetëm 2 njësi, ai shkëmben një dhjetëshe me 10 njësi, duke emërtuar çdo hap: «52 janë 4 dhjetëshe dhe 12 njësi». Pastaj heq 3 dhjetëshe dhe 8 njësi dhe mbeten 1 dhjetëshe dhe 4 njësi (Figura 6). Kontrolli me mbledhje, 38 + 14 = 52, bëhet pjesë e rutinës. Kontroll transferimi: 61 − 27 dhe 70 − 26, me kërkesën për të shpjeguar rigrupimin. Përgjigjja e saktë 34 te detyra e parë nuk mjafton vetëm. Kërkohet edhe shpjegimi se pse u shkëmbye një dhjetëshe. Detyra e dytë kontrollon nëse kuptimi transferohet në rastin me zero.

11.3 Rasti B: kompensimi në drejtim të gabuar

Evidenca e vëzhguar. Nxënësi shkruan 43 − 19 = 43 − 20 − 1 = 22.

Hipotezat e mundshme. *H1:* Nxënësi e di se 19 «është afër 20-ës» dhe se «duhet bërë diçka me 1-shin», por nuk e lidh drejtimin e korrigjimit me faktin që zbritësi u rrit. *H2:* Nxënësi e lexon 19 si «20 dhe 1» dhe zbret të dyja pjesët. Ai ka llogaritur, pra, 43 − (20 + 1) = 43 − 21, në vend të 43 − (20 − 1). *H3:* Nxënësi ngatërron kompensimin me strategjinë sekuenciale, ku të gjitha pjesët e zbritësit zbriten.

Matematikisht, transformimi i saktë është 43 − 19 = 43 − (20 − 1) = (43 − 20) + 1 = 24, sipas vetisë 3. Përgjigjja e nxënësit është 2 më e vogël, sepse në vend që të rikthejë njësinë e hequr tepër, ai heq edhe një njësi tjetër.

Pyetjet diagnostikuese. (1) «Kur zëvendësove 19 me 20, a hoqe më shumë apo më pak se ç'duhej?» (2) «Shkruaje 19 duke përdorur 20». Përgjigjja «20 + 1» mbështet H2. (3) «Ke 43 lekë dhe duhet të paguash 19. I jep shitësit 20. A të kthen ai para apo i jep ti edhe 1 lek?»

Ndërhyrja dhe kontrolli i transferimit. Ndërhyrja përdor boshtin numerik, sipas modelit të Figurës 7. Kërcimi −20 nga 43 mbërrin te 23. Nxënësi vëren se ka kaluar përtej 24-ës, sepse hoqi një më shumë. Kërcimi +1 e kthen atë te përgjigjja. Konteksti i parave përdoret si mbështetje verbale. Kontroll transferimi: 56 − 29, ku kompensimi është me 1. Shtohet edhe 37 + 19, ku

korrigjimi ka drejtim të kundërt, 37 + 20 − 1 = 56. Kjo detyrë tregon nëse nxënësi e ka kuptuar marrëdhënien apo ka mësuar përmendsh rregullin «te zbritja shto».

11.4 Rasti C: vlera vendore e paqartë

Evidenca e vëzhguar. Pas diktimit «dyzet e shtatë», nxënësi shkruan 407.

Hipotezat e mundshme. *H1:* Nxënësi e shkruan secilën pjesë të fjalës si numër më vete, «dyzet» si 40 dhe «shtatë» si 7, dhe i vendos njërin pas tjetrit. Nuk e kupton se shifra 7 duhet të zërë vendin e zeros te 40. *H2:* Nxënësi nuk e ka të qartë se vendi i shifrës përcakton vlerën e saj dhe e trajton shkrimin e numrit si varg simbolesh. *H3:* Nxënësi e kupton vlerën vendore me materiale, por nuk e ka lidhur me shkrimin.

Pyetjet diagnostikuese. (1) «Lexoje numrin që shkrove». Nëse nxënësi lexon «katërqind e shtatë», ai e njeh numrin treshifror dhe gabimi është në kalimin nga fjala te shkrimi. (2) «Ndërto 47 me shufra dhe kubikë. Ku janë shufrat në shkrimin tënd? Po kubikët?» Përgjigjja e saktë me materiale dhe gabimi në shkrim mbështesin H3. (3) «Shkruaj shtatëdhjetë e katër. Pastaj shkruaj shtatëdhjetë». Shkrimi 704 dhe 70 mbështet H1.

Ndërhyrja dhe kontrolli i transferimit. Përdoret tabela e vendeve me dy kolona, dhjetëshe dhe njësi. Përdoren edhe kartelat e mbivendosura: kartela 40 dhe kartela 7, me gjerësi që i përgjigjet numrit të shifrave. Kur kartela 7 vendoset mbi zeron e kartelës 40, fitohet 47. Ky veprim fizik e bën të dukshëm se njësitë zënë vendin e zeros dhe jo një vend të ri. Çdo shkrim lidhet me sasinë konkrete. Kontroll transferimi: diktimi i «gjashtëdhjetë e tre», «nëntëdhjetë», «njëmbëdhjetë» dhe «njëqind», si dhe pyetja «Cili numër është më i madh, 407 apo 47? Sa dhjetëshe ka secili?»

11.5 Rasti D: shenja e barazimit si sinjal për përgjigjen

Evidenca e vëzhguar. Te 8 + 4 = □ + 5, nxënësi shkruan 12. Një nxënës tjetër shkruan 17.

Hipotezat e mundshme. *H1:* Nxënësi i parë e lexon shenjën «=» si urdhër, «shkruaj përgjigjen e asaj që ke majtas», dhe e injoron «+ 5». *H2:* Nxënësi i dytë i mbledh të gjithë numrat që sheh, 8 + 4 + 5 = 17, sepse e lidh praninë e shenjës «+» me mbledhjen e gjithçkaje. *H3:* Të dy nuk kanë ndeshur më parë barazime ku veprimi ndodhet në të dyja anët dhe zbatojnë formën e vetme që njohin.

Pyetjet diagnostikuese. (1) «Sa vlen ana e majtë? Sa vlen ana e djathtë nëse në kuti vendosim 12?» Ana e majtë vlen 12, e djathta 17, prandaj ato nuk janë të barabarta. (2) «A është e vërtetë fjalia 12 = 12? Po 7 + 5 = 5 + 7?» Refuzimi i fjalive të tilla si «të çuditshme» ose «të gabuara» mbështet H1 dhe H3.

Ndërhyrja dhe kontrolli i transferimit. Përdoret modeli i peshores. Ana e majtë dhe ana e djathtë duhet të kenë të njëjtën «peshë». Nxënësi vendos 8 dhe 4 kubikë majtas, 5 kubikë djathtas dhe kërkon sa kubikë duhen shtuar djathtas që peshorja të baraspeshohet. Përgjigjja

është □ = 7. Pastaj përdoren fjali të vërteta dhe të rreme me veprime në të dy anët (seksioni 10.4). Kontroll transferimi: 15 − 6 = 4 + □, ku përgjigjja është 5 dhe veprimet janë të ndryshme në dy anët, dhe 23 + 9 = 22 + □, ku përgjigjja 10 mund të gjendet në mënyrë relacionale pa llogaritur shumën.

11.6 Rasti E: zgjedhja e veprimit sipas fjalës kyçe

Evidenca e vëzhguar. Për problemin «Ana ka 8 libra. Ajo ka 3 më shumë se Bora. Sa libra ka Bora?», nxënësi shkruan 8 + 3 = 11.

Hipotezat e mundshme. *H1:* Nxënësi zgjedh veprimin sipas fjalës «më shumë», pa analizuar marrëdhënien. *H2:* Nxënësi e lexon fjalinë krahasuese si sikur sasia «3 më shumë» t'i përkiste Borës. Kjo është vështirësi në kuptimin e fjalisë krahasuese, jo në zgjedhjen e veprimit. *H3:* Nxënësi e kupton se Ana ka më shumë, por nuk di ta përfaqësojë marrëdhënien dhe kap numrat e tekstit.

Pyetjet diagnostikuese. (1) «Kush ka më shumë libra, Ana apo Bora?» Përgjigjja «Bora» mbështet H2. (2) «A mund të ketë Bora 11 libra, nëse Ana ka 3 më shumë se ajo?» Pyetja e kthen nxënësin te kuptimi i situatës. (3) «Vizato një shirit për Anën dhe një për Borën».

Ndërhyrja dhe kontrolli i transferimit. Nxënësi vizaton dy shirita krahasues (Figura 2): shiriti i Anës është 3 njësi më i gjatë se shiriti i Borës. Pastaj e riformulon fjalinë nga këndvështrimi i Borës: «Bora ka 3 më pak se Ana». Kontroll transferimi: «Drini ka 15 lapsa. Ai ka 6 më pak se Arta. Sa lapsa ka Arta?» Fjala kyçe «më pak» sugjeron zbritje, ndërsa zgjidhja kërkon mbledhje, 15 + 6 = 21. Detyra tregon nëse nxënësi ka kapërcyer strategjinë e fjalëve kyçe në të dy drejtimet.

11.7 Rasti F: numërimi i skajeve në plotësim

Evidenca e vëzhguar. Për 52 − 38 me numërim përpara, nxënësi numëron «38, 39, 40, …, 52» duke ngritur një gisht për çdo numër dhe jep përgjigjen 15.

Hipotezat e mundshme. *H1:* Nxënësi numëron numrat dhe jo hapat. Ai e përfshin edhe numrin fillestar 38, sikur të ishte një hap. Ky është i njëjti gabim me numërimin e pikave në boshtin numerik (seksioni 5.7). *H2:* Nxënësi e ka mësuar «numërimin përpara» si procedurë, pa kuptuar se po numëron sa njësi i shtohen 38-ës.

Pyetjet diagnostikuese. (1) «Kur thua "38", sa i ke shtuar 38-ës?» (2) «Sa është 9 − 6 me numërim përpara? Trego me gishta». Nëse nxënësi numëron «6, 7, 8, 9» dhe jep 4, H1 merr mbështetje edhe në fushën deri në 10. (3) «Kontrolloje: sa bën 38 + 15?»

Ndërhyrja dhe kontrolli i transferimit. Hapat vizatohen si harqe në boshtin numerik dhe numërohen harqet, jo numrat. Formulimi verbal ndryshon nga «38, 39, …» në «38 … plus një, 39; plus dy, 40; …». Për numra më të mëdhenj, numërimi një nga një zëvendësohet me kërcime

në dhjetëshe (Figura 4), gjë që e zvogëlon edhe rrezikun e gabimit. Kontroll transferimi: 71 − 66 me numërim përpara dhe 83 − 47 me kërcime, me kontroll të detyrueshëm me mbledhje.

11.8 Përmbledhje e rasteve

Tabela 9 përmbledh rastet. Ajo nuk e zëvendëson analizën në katër faza, por shërben si mjet orientimi.

Tabela 9. *Përmbledhje e rasteve të gabimeve*

Rasti	Evidenca	Hipoteza kryesore	Detyra për kontrollin e transferimit
A	52 − 38 = 26	Defekti «më e vogla nga më e madhja»	61 − 27 dhe 70 − 26, me shpjegim të rigrupimit
B	43 − 20 − 1 = 22	Drejtimi i korrigjimit nuk lidhet me rritjen e zbritësit	56 − 29 dhe 37 + 19
C	«dyzet e shtatë» → 407	Shkrim i pjesëve të fjalës si numra të veçantë	Diktim i 63, 90, 11 dhe 100; krahasim 407 me 47
D	8 + 4 = □ + 5 → 12 ose 17	Leximi operacional i shenjës «=»	15 − 6 = 4 + □ dhe 23 + 9 = 22 + □
E	Bora ka 8 + 3 = 11	Zgjedhja e veprimit sipas fjalës kyçe	Problem krahasimi me «më pak», që zgjidhet me mbledhje
F	52 − 38 = 15 me numërim	Numërimi i numrave në vend të hapave	71 − 66 dhe 83 − 47, me kontroll me mbledhje

Në raportin e studentit për një rast gabimi duhet të ndahen qartë katër elementet: çfarë u vëzhgua, çfarë hipoteze u ngrit, çfarë u ndërmor dhe çfarë prove do të kërkohet më pas. Etiketimi «nxënësi nuk kupton zbritjen» nuk është analizë e mjaftueshme. Ai nuk tregon *çfarë* nuk kupton nxënësi, *si* mund të verifikohet kjo dhe *çfarë* duhet bërë. Po aq e pamjaftueshme është ndërhyrja pa kontroll transferimi. Nxënësi që zgjidh saktë detyrën e trajtuar menjëherë pas ndërhyrjes mund të jetë duke imituar mësuesin dhe jo duke zbatuar një kuptim të ri.

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Një përgjigje e gabuar është evidencë, jo diagnozë.
- Shumë gabime procedurale janë sistematike, prandaj mund të parashikohen dhe të diagnostikohen.
- Analiza e plotë ka katër faza: evidenca, hipotezat, pyetjet dalluese dhe ndërhyrja me kontroll transferimi.
- Dy hipoteza që japin të njëjtën përgjigje dallohen vetëm nga shpjegimi i nxënësit ose nga detyra të tjera.

12. Projektimi i sekuencës mësimore dhe mikromësimdhënia

NË KËTË KAPITULL

- Modeli i projektimit
- Një sekuencë e projektuar: ruajtja e diferencës
- Mikromësimdhënia si cikël profesional

12.1 Modeli i projektimit

Projektimi i një sekuence mësimore kuptohet këtu si një varg vendimesh të argumentuara. Ai nuk është plotësim i një formulari. Modeli i propozuar përbëhet nga gjashtë vendime. Secili prej tyre lidhet me një nga perspektivat teorike të seksionit 2.

Vendimi 1: synimi. Synimi formulohet si sjellje e vëzhgueshme e nxënësit dhe jo si veprimtari e mësuesit. Formulimi «Nxënësi shpjegon me shirita pse 32 − 18 = 34 − 20» është i vëzhgueshëm. Formulimi «Mësuesi shpjegon ruajtjen e diferencës» nuk është. *Vendimi 2: parakushtet.* Përcaktohen njohuritë e nevojshme dhe mënyra e kontrollit të tyre në fillim të orës. *Vendimi 3: detyra nxitëse.* Përzgjidhet një detyrë që nxjerr në pah mendimin fillestar të nxënësve, sipas CGI-së, pa e paraprirë me metodën e synuar. *Vendimi 4: përfaqësimi.* Zgjidhet modeli që e bën të dukshëm aspektin kritik dhe parashikohet lidhja e tij me simbolet. *Vendimi 5: vargu i detyrave.* Hartohet një varg me variacion të kontrolluar, që e ndan aspektin kritik nga aspektet e tjera. *Vendimi 6: evidenca.* Përcaktohet paraprakisht cila përgjigje do të dëshmonte të kuptuarit dhe cila do të tregonte nevojën për ndërhyrje. Përcaktohen edhe pyetjet që do ta nxjerrin këtë evidencë.

12.2 Një sekuencë e projektuar: ruajtja e diferencës

Shembulli i mëposhtëm është projekt i propozuar për mikromësimdhënie, me kohëzgjatje rreth 15 minuta. Synimi është që nxënësi të shpjegojë ruajtjen e diferencës kur të dy numrat rriten me të njëjtën sasi. Parakushtet janë kuptimi i diferencës si krahasim (seksioni 4) dhe njohja e dhjetësheve e njësive (seksioni 6).

Hapi 1: nxjerrja e mendimit fillestar (rreth 3 minuta). Jepet 32 − 18 dhe kërkohet një zgjidhje me shpjegim. Metoda e synuar nuk prezantohet menjëherë. Mësuesi regjistron nëse nxënësi numëron mbrapsht, plotëson nga 18 në 32, rigrupon ose kompenson. Qëllimi është të kuptohet baza mbi të cilën mund të ndërtohet diskutimi. Nëse ndonjë nxënës kompenson spontanisht, zgjidhja e tij ruhet për hapin 4.

Hapi 2: krahasimi i dy situatave (rreth 4 minuta). Paraqiten dy shirita krahasues me gjatësi 32 dhe 18 njësi, me fillim të përbashkët. Shtohen dy njësi në fund të secilit, duke marrë 34 dhe 20. Mësuesi pyet: «Çfarë ndryshoi te secili shirit? Çfarë ndodhi me pjesën që mbetet pa çift?» Nxënësi duhet ta lidhë figurën me barazimin 32 − 18 = 34 − 20. Konteksti i moshave mund të shërbejë si mbështetje verbale.

Hapi 3: kontrasti i kontrolluar (rreth 3 minuta). Paraqitet 34 − 18. Këtu ndryshon vetëm i zbritshmi. Kërkohet të krahasohet me rastin fillestar. Pastaj paraqitet 32 − 20, ku ndryshon vetëm zbritësi. Këto raste pengojnë përgjithësimin e gabuar se çdo ndryshim i numrave e ruan diferencën. Në terma të teorisë së variacionit, ky është modeli i kontrastit.

Hapi 4: shprehja dhe zbatimi (rreth 3 minuta). Nxënësi formulon rregullin me fjalët e veta dhe e përdor për 61 − 29 = 62 − 30 = 32. Mësuesi kërkon edhe arsyen e zgjedhjes së një njësie: ajo e çon zbritësin te dhjetëshja e afërt. Përdorimi i një numri tjetër të përbashkët, për shembull 61 − 29 = 66 − 34, do ta ruante diferencën, por nuk do ta lehtësonte llogaritjen. Ky dallim ndërmjet *vlefshmërisë* dhe *dobisë* së një transformimi është vetë objekt mësimi.

Hapi 5: vlerësimi i shkurtër (rreth 2 minuta). Detyra përmbyllëse: «A është 57 − 28 = 60 − 30? Shpjego». Përgjigjja e pritshme: jo, sepse numri i parë rritet me 3, i dyti me 2, prandaj diferenca rritet me 1. Për ta ruajtur diferencën, mund të shkruajmë 57 − 28 = 59 − 30 = 29. Kriteri i suksesit nuk është vetëm përgjigjja «jo». Kërkohet shpjegimi që përmend ndryshimet e pabarabarta.

12.3 Mikromësimdhënia si cikël profesional

Mikromësimdhënia është një situatë e thjeshtuar mësimdhënieje, me kohë të shkurtër dhe me një synim të vetëm. Në këtë leksion ajo nuk trajtohet si demonstrim i aftësive të ligjërimit. Ajo trajtohet si cikël i plotë profesional me katër faza: projektimi, realizimi, vëzhgimi dhe reflektimi.

Faza e projektimit. Grupet me tre studentë zgjedhin një nga konceptet e seksioneve 4–10 dhe përgatisin një projekt sipas gjashtë vendimeve të seksionit 12.1. Projekti përmban synimin, parakushtet, detyrën nxitëse, modelin vizual, vargun e detyrave, dy pyetje diagnostikuese dhe detyrën përmbyllëse. Për secilën pyetje parashikohen të paktën dy përgjigje të mundshme të nxënësit dhe reagimi i mësuesit ndaj secilës.

Faza e realizimit. Rolet ndahen ndërmjet mësuesit, nxënësit dhe vëzhguesit. Realizimi zgjat 12 deri në 15 minuta. Studenti në rolin e nxënësit merr nga pedagogu i lëndës një *kartelë roli* të mbyllur. Kartela përshkruan një profil mendimi, për shembull «kompenson në drejtim të gabuar» ose «numëron skajet në bosht». Studenti në rolin e mësuesit nuk e njeh këtë profil. Ky element e kthen mikromësimdhënien në ushtrim diagnostikimi. Mësuesi duhet ta zbulojë profilin përmes pyetjeve dhe ta trajtojë atë gjatë realizimit.

Faza e vëzhgimit. Vëzhguesi plotëson protokollin e Tabelës 10. Ai regjistron faktet: pyetjet e bëra, përgjigjet e marra dhe reagimet e mësuesit. Vlerësimet e përgjithshme si «shpjegoi mirë»

nuk regjistrohen. Vëzhguesi duhet të kujdeset që të mos e barazojë qartësinë e ligjërimit të mësuesit me të nxënit e nxënësit. Një shpjegim i qartë dhe i rrjedhshëm që nuk merr parasysh profilin e nxënësit nuk e ka arritur synimin.

Tabela 10. *Protokolli i vëzhgimit për mikromësimdhënien*

Momenti	Çfarë regjistron vëzhguesi	Pyetja analitike
Nxjerrja e mendimit	Detyra fillestare; përgjigjja e parë e nxënësit	A u la nxënësi të shprehte mendimin para shpjegimit?
Pyetjet e mësuesit	Çdo pyetje, e shënuar si e mbyllur, sqaruese ose diagnostikuese	Sa pyetje dallonin dy mënyra të të menduarit?
Përgjigjet e nxënësit	Përgjigjet fjalë për fjalë, sa më saktë	Cilat përgjigje u përdorën nga mësuesi dhe cilat u anashkaluan?
Përfaqësimet	Modelet e përdorura dhe momentet e lidhjes me simbolin	A u artikulua lidhja ndërmjet modelit dhe barazimit?
Diagnoza	Momenti kur mësuesi formuloi një hipotezë, nëse e formuloi	A u kontrollua hipoteza me një detyrë tjetër?
Evidenca përmbyllëse	Detyra përmbyllëse dhe përgjigjja e saj	A jep kjo evidencë prova për synimin e formuluar?

Faza e reflektimit. Pas realizimit, grupi zhvillon një bisedë reflektuese prej 10 minutash. Biseda ndjek këtë renditje: fillimisht mësuesi përshkruan çfarë mendoi se ishte profili i nxënësit dhe në bazë të cilave evidenca; pastaj nxënësi zbulon kartelën e rolit; vëzhguesi paraqet të dhënat e protokollit; dhe, në fund, grupi zgjedh *një* pyetje ose *një* model që do ta ndryshonte dhe argumenton pse. Kufizimi te një ndryshim i vetëm e detyron grupin të identifikojë ndryshimin me ndikimin më të madh. Rolet ndërrohen në tri cikle, që secili student të kalojë nëpër të tri rolet.

IDETË KRYESORE TË KAPITULLIT

- Projektimi është një varg vendimesh të argumentuara, nga synimi i vëzhgueshëm te evidenca e të nxënit.
- Mikromësimdhënia me kartela roli e kthen demonstrimin në ushtrim diagnostikimi.
- Qartësia e ligjërimit të mësuesit nuk është provë e të nxënit të nxënësit.

13. Detyra të diferencuara për studentët

NË KËTË KAPITULL

- Niveli I: kuptimi dhe argumentimi
- Niveli II: analiza dhe krahasimi
- Niveli III: vërtetimi dhe projektimi

Detyrat janë organizuar në tri nivele. Niveli I kërkon kuptimin dhe argumentimin e koncepteve themelore. Niveli II kërkon analizë, krahasim strategjish dhe identifikim gabimesh. Niveli III kërkon vërtetim matematikor dhe projektim didaktik. Çdo student zgjidh të paktën katër detyra të nivelit I dhe II dhe një detyrë të nivelit III. Detyrat punohen fillimisht individualisht, pastaj zgjidhjet krahasohen në çift. Për çdo detyrë jepet arsyetimi matematikor dhe, kur kërkohet, shpjegimi që do të përdorej me nxënësin. Zgjidhjet e plota ndodhen në seksionin 14.

Niveli I: kuptimi dhe argumentimi

Detyra 1. Kuptimet e zbritjes. Hartoni tri situata të ndryshme që përfaqësohen nga $17 - 9 = 8$: një heqje, një krahasim dhe një pjesë që mungon. Për secilën identifikoni të tërën, pjesët ose sasitë që krahasohen. Shpjegoni pse i njëjti barazim nuk nënkupton të njëjtën situatë dhe cili model vizual i përshtatet secilës.

Detyra 2. E panjohura në pozicione të ndryshme. «Pas dhurimit të 7 librave, në raft mbetën 16». Klasifikojeni problemin sipas Tabelës 3. Shkruani barazimin që përshkruan ngjarjen dhe veprimin që gjen numrin fillestar. Shpjegoni pse fjala «dhurim» nuk na detyron të përdorim zbritjen për zgjidhjen.

Detyra 3. Paraqitja dhe rigrupimi. Paraqitni 60 me dhjetëshe dhe njësi në dy mënyra. Përdorni njërën prej tyre për të shpjeguar $60 - 24$. Sqaroni rolin e zeros në shkrimin 60 dhe pse rigrupimi nuk e ndryshon sasinë.

Niveli II: analiza dhe krahasimi

Detyra 4. Përzgjedhja e strategjisë. Zgjidhni $48 + 27$, $72 - 68$ dhe $83 - 29$. Për secilin veprim paraqitni një strategji të përshtatshme, vetinë që e justifikon dhe një pyetje që do t'i bënit nxënësit. Për njërin veprim jepni edhe një mënyrë të dytë dhe krahasojini.

Detyra 5. Analiza e një pohimi. Një student thotë: «Nëse të dy numrave u shtojmë 5, shuma dhe diferenca mbeten të pandryshuara». Shqyrtoni veçmas secilën pjesë të pohimit, jepni shembull ose kundërshembull dhe formuloni rregullin e saktë me kushtet përkatëse.

Detyra 6. Barazia dhe ndryshimi. Plotësoni 37 + 26 = 40 + □ dhe 74 − 38 = □ − 40. Argumentoni pa i llogaritur të dyja anët nga fillimi. Shpjegoni pse në njërin rast ndryshimet kanë drejtime të kundërta, ndërsa në tjetrin të njëjtin drejtim.

Detyra 7. Gabimi si burim informacioni. Një nxënës shkruan 71 − 46 = 35. Propozoni dy shpjegime të mundshme të gabimit, dy pyetje diagnostikuese që i dallojnë ato dhe një ndërhyrje me kontroll transferimi. Sqaroni pse hipoteza nuk mund të trajtohet si fakt vetëm në bazë të përgjigjes.

Detyra 8. Vlerësimi i një strategjie jostandarde. Një nxënës zgjidh 82 − 45 kështu: «80 − 40 = 40; 2 − 5: më mungojnë 3; 40 − 3 = 37». Një ditë më vonë, ai zgjidh 91 − 36 dhe shkruan 65. (a) Vlerësoni zgjidhjen e parë nga pikëpamja matematikore. (b) Analizoni zgjidhjen e dytë sipas katër fazave të seksionit 11. Kushtojini vëmendje faktit që dy hipoteza të ndryshme mund të japin të njëjtën përgjigje.

Niveli III: vërtetimi dhe projektimi

Detyra 9. Vërtetim dhe kufij vlefshmërie. (a) Vërtetoni se për $a \geq b$ dhe $k \leq b$ vlen $(a - k) - (b - k) = a - b$. Jepni një shembull ku $k > b$ dhe ana e majtë nuk është e përcaktuar në $\mathbb{N}_0$. (b) Vërtetoni se, kur $u_1 < u_2$, përgjigjja e defektit «shifra më e vogël nga më e madhja» e kalon përgjigjen e saktë me $2(u_2 - u_1)$. Shpjegoni si mund ta përdorë mësuesi këtë rezultat.

Detyra 10. Projektimi i një vargu me variacion. Me numrat 35, 27 dhe 8, hartoni katër probleme krahasimi që ndryshojnë *vetëm* në pozicionin e së panjohurës dhe në formulimin «më shumë / më pak». Parashikoni cilat probleme do të jenë më të vështira dhe pse. Shpjegoni cili model variacioni nga seksioni 2.5 po përdoret.

Detyra 11. Projektimi profesional. Hartoni një veprimtari 10-minutëshe për zbritjen si krahasim. Përcaktoni synimin si sjellje të vëzhgueshme, parakushtet, modelin vizual, dy pyetje kryesore dhe një detyrë përmbyllëse që jep provë për të kuptuarit.

Detyra 12. Emërtimet e numrave dhe diagnoza. Hartoni një diktim me pesë numra që lejon të dallohen dy hipoteza: (H1) nxënësi i shkruan numrat 11–19 sipas renditjes së fjalës; (H2) nxënësi nuk e ka të qartë vlerën vendore në përgjithësi. Për secilin numër parashikoni përgjigje të mundshme sipas secilës hipotezë dhe sqaroni cilat nuk mund të përcaktohen në mënyrë unike. Shtoni një pyetje me model konkret për të dalluar gabimin e shkrimit nga vështirësia e vlerës vendore.

14. Zgjidhje dhe udhëzime të argumentuara

Zgjidhjet e mëposhtme paraqesin një përgjigje të plotë dhe të argumentuar. Ato nuk janë të vetmet përgjigje të pranueshme. Për detyrat e projektimit, pranohen projekte të tjera kur synimi, modeli dhe vlerësimi janë të lidhur ndërmjet tyre.

Detyra 1

Heqje: «Kishte 17 fletore. Dhuroi 9. Sa i mbetën?» Sasia fillestare 17 ndryshon në kohë. Kërkohet gjendja përfundimtare. Modeli i përshtatshëm janë objektet ose kërcimet mbrapa në bosht. *Krahasim:* «Ana ka 17 fletore dhe Bora 9. Sa më shumë ka Ana?» Dy sasi ekzistojnë njëkohësisht dhe asnjëra nuk ndryshon. Kërkohet teprica pas çiftëzimit. Modeli i përshtatshëm janë shiritat krahasues. *Pjesë që mungon:* «Nga 17 fletore, 9 janë me vija dhe të tjerat me katrorë. Sa janë me katrorë?» Sasia e tërë është 17, njëra pjesë është 9. Modeli i përshtatshëm është modeli pjesë–e tërë. Përgjigjja është 8 në çdo rast, por ajo përfaqëson përkatësisht mbetjen pas një ndryshimi, diferencën ndërmjet dy sasive dhe një pjesë të së tërës. Barazimi abstrakton nga këto dallime. Pikërisht për këtë arsye, kuptimi i tij kërkon që nxënësi të ketë përjetuar të gjitha situatat.

Detyra 2

Problemi është *ndarje me fillim të panjohur*. Ngjarja përshkruhet nga barazimi $x - 7 = 16$. Sipas përkufizimit 3.1, $x - 7 = 16$ do të thotë $7 + 16 = x$, prandaj $x = 23$. Fjala «dhurim» përshkruan *ngjarjen*, pra largimin e librave. Ajo nuk përshkruan *veprimin zgjidhës*, që gjen sasinë fillestare. Duke qenë se e panjohura është e tëra dhe 7 e 16 janë pjesët, veprimi zgjidhës është mbledhja. Me nxënësin, shpjegimi mund të mbështetet në një shirit: «Librat që ishin në fillim janë të gjithë librat: ata që u dhuruan dhe ata që mbetën».

Detyra 3

$60 = 6$ dhjetëshe $+ 0$ njësi $= 5$ dhjetëshe $+ 10$ njësi. Për $60 - 24$ përdoret zbërthimi i dytë. Pas heqjes së 2 dhjetësheve dhe 4 njësive mbeten 3 dhjetëshe dhe 6 njësi, pra 36. Verifikimi: $24 + 36 = 60$. Në shkrimin 60, zeroja tregon se nuk ka njësi të veçuara në zbërthimin kanonik. Ajo nuk tregon se sasia nuk ka njësi, sepse 60 përmban gjithsej 60 njësi. Rigrupimi zëvendëson një dhjetëshe me dhjetë njësi. Meqë 1 dhjetëshe = 10 njësi, sasia mbetet e njëjtë dhe ndryshon vetëm organizimi i saj (seksioni 6.5).

Detyra 4

48 + 27. Strategjia e kalimit përmes dhjetëshes: $48 + 27 = 48 + (2 + 25) = 50 + 25 = 75$. Ajo justifikohet me vetinë shoqëruese. Pyetja për nxënësin: «Pse e ndave 27 në 2 dhe 25?» Mënyra e

dytë është sekuenciale: 48 + 20 + 7 = 68 + 7 = 75. Krahasimi: mënyra e parë shfrytëzon afërsinë e 48-ës me 50-ën, ndërsa mënyra e dytë nuk varet nga kjo afërsi, por kërkon një kalim të dytë përmes dhjetëshes, 68 + 7. Mënyra e parë mund të shihet edhe si ruajtje e shumës: 48 + 27 = 50 + 25.

72 − 68. Numrat janë afër njëri-tjetrit, prandaj plotësimi është ekonomik: 68 + 2 = 70, 70 + 2 = 72. Diferenca është 4. Kjo justifikohet me përkufizimin 3.1. Pyetja: «Çfarë mat shtesa 4? Ku e sheh në bosht?»

83 − 29. Zbritësi është afër dhjetëshes 30. Strategjia A jep 83 − 30 + 1 = 54 dhe justifikohet me pohimin 8.1, me kushtin $30 \le 83$. Strategjia B jep 84 − 30 = 54 dhe justifikohet me pohimin 8.2. Pyetja për strategjinë A: «Pse rikthehet 1?» Pyetja për strategjinë B: «Pse nuk rikthehet asgjë?»

Detyra 5

Pohimi është i saktë vetëm për diferencën. Për shumën kemi (a + 5) + (b + 5) = (a + b) + 10, pra shuma rritet me 10. Kundërshembull: 30 + 20 = 50, ndërsa 35 + 25 = 60. Për diferencën, sipas pohimit 8.2, kemi (a + 5) − (b + 5) = a − b, me kusht që $a \ge b$. Shembull: 30 − 20 = 10 dhe 35 − 25 = 10. Rregulli i saktë: «Kur të dy numrat rriten me të njëjtën sasi, diferenca ruhet, ndërsa shuma rritet me dyfishin e asaj sasie. Shuma ruhet kur njëri rritet dhe tjetri zvogëlohet me të njëjtën sasi».

Detyra 6

Te 37 + 26 = 40 + □, i mbledhshmi i parë rritet me 3, nga 37 në 40. Që shuma të ruhet, i mbledhshmi i dytë duhet të zvogëlohet me 3: □ = 26 − 3 = 23. Kjo justifikohet me pohimin 9.2. Te 74 − 38 = □ − 40, zbritësi rritet me 2. Që diferenca të ruhet, edhe i zbritshmi duhet të rritet me 2: □ = 76. Kjo justifikohet me pohimin 8.2. Dallimi i drejtimeve vjen nga rolet e përbërësve (seksioni 10.3). Te mbledhja, të dy të mbledhshmit kontribuojnë në të njëjtën mënyrë te shuma. Te zbritja, rritja e zbritësit e zvogëlon diferencën, prandaj duhet balancuar me rritje, jo me ulje, të të zbritshmit.

Detyra 7

Përgjigjja e saktë është 71 − 46 = 25. Përgjigjja 35 e kalon atë me 10. *Hipoteza 1:* defekti «shifra më e vogël nga më e madhja»: 7 − 4 = 3 dhe 6 − 1 = 5. Kjo hipotezë përputhet me rezultatin e detyrës 9(b), sepse $2(u_2 - u_1) = 2(6 - 1) = 10$. *Hipoteza 2:* nxënësi llogarit me gojë sipas zbërthimit në vlerë vendore (strategjia 1010): 70 − 40 = 30, dhe, meqë 1 − 6 nuk kryhet në $\mathbb{N}_0$, llogarit 6 − 1 = 5 dhe e shton: 30 + 5 = 35. Në këtë rast gabimi nuk vjen nga algoritmi në kolonë, por nga kufiri i strategjisë 1010 kur $b_0 > a_0$ (seksioni 7.2), dhe ndërhyrja e përshtatshme është strategjia sekuenciale. Dy hipotezat japin të njëjtin rezultat, prandaj përgjigjja vetëm nuk mjafton për t'i dalluar.

Pyetjet diagnostikuese: «Si e gjete 5-ën? Cilin numër zbrite nga cili?» dhe «Si mund ta paraqesësh 71 me vetëm gjashtë dhjetëshe?» Ndërhyrja: 71 paraqitet si 6 dhjetëshe dhe 11 njësi.

Heqja e 4 dhjetësheve dhe 6 njësive jep 2 dhjetëshe dhe 5 njësi, pra 25. Kontrolli: 46 + 25 = 71. Kontroll transferimi: 82 − 57. Kjo detyrë është zgjedhur me qëllim, sepse defekti do të jepte përsëri 35. Përgjigjja e saktë është 25 dhe duhet shoqëruar me shpjegim. Hipoteza nuk është fakt, sepse e njëjta përgjigje, siç u tregua, mund të vijë nga procedura të ndryshme. Vetëm shpjegimi i nxënësit dhe sjellja e tij në detyra të tjera mund ta mbështesin ose ta hedhin poshtë atë.

Detyra 8

(a) Zgjidhja e parë është e saktë: 82 − 45 = 37, sepse 45 + 37 = 82. Në $\mathbb{Z}$, ajo i përgjigjet transformimit (80 − 40) + (2 − 5) = 40 + (−3) = 37. Nxënësi e shpreh numrin negativ me fjalën «më mungojnë». Kjo është strategji e vlefshme dhe duhet njohur si e tillë (seksioni 7.8).

(b) *Evidenca:* 91 − 36 = 65; përgjigjja e saktë është 55. *Hipotezat:* H1, nxënësi e ka shtuar mungesën në vend që ta zbresë: 90 − 30 = 60, 1 − 6 «mungojnë 5», 60 + 5 = 65. H2, nxënësi ka zbatuar defektin «shifra më e vogël nga më e madhja»: 9 − 3 = 6, 6 − 1 = 5, pra 65. Të dyja hipotezat japin 65. *Pyetjet diagnostikuese:* «Trego si e zgjidhe, hap pas hapi». «Çfarë do të thotë "më mungojnë 5"? Duhet t'i shtosh apo t'i heqësh?» Nëse nxënësi përmend «mungesën», H1 forcohet. Nëse thotë «6 − 1 = 5», forcohet H2. *Ndërhyrja:* për H1, mungesa paraqitet me materiale si borxh që duhet paguar: pasi hiqet 1 njësia e veçuar, mbetet për t'u hequr edhe 5 nga 60. Për H2, ndërhyrja është ajo e rastit A. *Kontrolli i transferimit:* 73 − 48, me kontroll të detyrueshëm me mbledhje.

Detyra 9

(a) Le të jetë d = a − b, pra b + d = a. Nga k ≤ b ≤ a rrjedh se a − k dhe b − k janë të përcaktuara. Kemi [(b − k) + d] + k = b + d = a = (a − k) + k. Nga vetia e anulimit, (b − k) + d = a − k, prandaj (a − k) − (b − k) = d. Shembull me k > b: a = 9, b = 4 dhe k = 5. Atëherë b − k = 4 − 5 nuk është e përcaktuar në $\mathbb{N}_0$, megjithëse 9 − 4 = 5 është e përcaktuar dhe a − k = 4 ekziston.

(b) Le të jenë $a = 10d_1 + u_1$ dhe $b = 10d_2 + u_2$, me $u_1 < u_2$ dhe $d_1 > d_2$. Sipas (6.3), përgjigjja e saktë është $10(d_1 - 1 - d_2) + (u_1 + 10 - u_2) = 10(d_1 - d_2) - (u_2 - u_1)$. Defekti zbret në çdo kolonë shifrën më të vogël nga më e madhja dhe jep $10(d_1 - d_2) + (u_2 - u_1)$. Diferenca ndërmjet tyre është $2(u_2 - u_1) > 0$. Mësuesi mund ta përdorë këtë rezultat në dy mënyra. Së pari, kur përgjigjja e gabuar e kalon atë të saktën me një numër çift të barabartë me dyfishin e diferencës së njësive, kjo është një tregues i fortë i defektit. Së dyti, ai mund të ndërtojë detyra ku defekti jep përgjigje qartësisht të pamundura, për shembull 50 − 19 = 49. Nxënësi mund ta vërejë vetë këtë pamundësi duke krahasuar 49 me 50.

Detyra 10

Me numrat 35, 27 dhe 8:

(a) «Arta ka 35 karta, Drini ka 27. Sa karta më shumë ka Arta?» Diferenca e panjohur: 35 − 27 = 8.

(b) «Drini ka 27 karta. Arta ka 8 më shumë se Drini. Sa ka Arta?» Sasia e krahasuar e panjohur: 27 + 8 = 35.

(c) «Arta ka 35 karta. Ajo ka 8 më shumë se Drini. Sa ka Drini?» Sasia referuese e panjohur: 35 − 8 = 27.

(d) «Drini ka 27 karta. Ai ka 8 më pak se Arta. Sa ka Arta?» Sasia e krahasuar e panjohur, me formulim «më pak»: 27 + 8 = 35.

Konteksti dhe numrat mbeten të njëjtë. Ndryshojnë vetëm pozicioni i së panjohurës dhe formulimi i marrëdhënies. Problemet (c) dhe (d) pritet të jenë më të vështira, sepse fjala e marrëdhënies, «më shumë» ose «më pak», sugjeron veprimin e kundërt me atë zgjidhës. Ky është modeli i *ndarjes*, sepse aspekti «pozicioni i së panjohurës» veçohet duke i mbajtur të tjerët konstantë. Krahasimi ndërmjet (b) dhe (d), ku e panjohura është e njëjtë dhe ndryshon vetëm formulimi, është shembull i *kontrastit*.

Detyra 11

Një zgjidhje e mundshme. *Synimi:* «Nxënësi shpjegon me dy shirita se diferenca ndërmjet 15 dhe 9 është numri i njësive pa çift». *Parakushtet:* numërimi deri në 20 dhe zbritja deri në 20. *Modeli:* dy shirita me 15 dhe 9 njësi, me fillim të përbashkët. *Pyetjet kryesore:* «Cila pjesë e shiritave çiftëzohet?» dhe «Çfarë përfaqëson pjesa që mbetet pa çift?» *Detyra përmbyllëse:* ndryshon konteksti dhe vetë njësia, sepse krahasohen dy gjatësi, 18 cm dhe 11 cm. Nxënësi duhet të vizatojë shiritat, të gjejë diferencën, 7 cm, dhe të shpjegojë pse kjo është zbritje edhe pse asgjë nuk hiqet. Detyra jep provë për të kuptuarit, sepse kërkon transferim te një kontekst matjeje dhe një shpjegim, jo vetëm një numër.

Detyra 12

Një diktim i mundshëm: 14, 41, 17, 40, 74. Sipas H1, nxënësi do të shkruante 41 për «katërmbëdhjetë», sepse fjala fillon me «katër», dhe 71 për «shtatëmbëdhjetë». Ndërkohë, ai do t'i shkruante saktë 41, 40 dhe 74, sepse në këto emërtime renditja gojore përputhet me atë të shkrimit. Sipas H2, gabimet pritet të shfaqen edhe jashtë numrave 11–19, për shembull 401 për «dyzet e një» ose 704 për «shtatëdhjetë e katër». H2 është një hipotezë e gjerë dhe nuk parashikon një shkrim të vetëm për çdo numër; këto janë përgjigje të mundshme, që duhet të shqyrtohen bashkë me shpjegimin dhe modelimin e nxënësit. Çifti 14/41 është veçanërisht diagnostikues. Nxënësi që i shkruan të dyja si 41 sillet në përputhje me H1. Nxënësi që i shkruan saktë ndoshta nuk ka asnjërën vështirësi. Numri 40 kontrollon nëse emërtimi «dyzet» ka krijuar ndonjë vështirësi në shkrim. Interpretimi duhet të jetë i kujdesshëm, sepse këto parashikime janë hipoteza didaktike dhe jo rezultate empirike të verifikuara për nxënësit shqipfolës (seksioni 6.3).

15. Vlerësimi i formimit profesional

NË KËTË KAPITULL

- Rubrika e vlerësimit
- Detyra përmbyllëse individuale
- Detyrë për studim të pavarur

15.1 Rubrika e vlerësimit

Rubrika e Tabelës 11 vlerëson një zgjidhje të argumentuar, një analizë gabimi ose një mikromësimdhënie. Ajo është instrument mësimor i hartuar për këtë leksion dhe nuk pretendohet si shkallë kërkimore e validuar. Secili kriter lidhet me një ose më shumë rezultate të të nxënit të seksionit 1.1.

Tabela 11. *Rubrika e vlerësimit (0–3 pikë për kriter)*

Kriteri (RN)	0 pikë	1 pikë	2 pikë	3 pikë
Saktësia matematikore (RN1, RN2, RN7, RN8)	Gabim thelbësor në rezultat ose në vërtetim	Rezultat i saktë; argumentim i paplotë	Argumentim i saktë, pa kushte vlefshmërie	Argumentim i saktë, me kushte vlefshmërie të formuluara
Lidhja e përfaqësimeve (RN4, RN5)	Figura nuk përputhet me situatën ose me barazimin	Figurë e saktë, pa lidhje të shpjeguar me simbolin	Lidhje e shpjeguar ndërmjet një figure dhe simbolit	Dy përfaqësime të lidhura, me analizë të kufizimeve
Interpretimi i mendimit të nxënësit (RN3, RN9)	Etiketim pa analizë	Një hipotezë, pa verifikim	Dy hipoteza dhe pyetje diagnostikuese	Hipoteza të dalluara me pyetje dhe detyrë kontrolli
Vendimi didaktik (RN6, RN10)	Ndërhyrje e palidhur me hipotezën	Ndërhyrje e përshtatshme, pa provë të efektit	Ndërhyrje me detyrë përmbyllëse	Ndërhyrje me kontroll transferimi të argumentuar
Argumentimi teorik (të gjitha)	Pa referencë teorike ose me referencë të pasaktë	Teori e përmendur si etiketë	Teori e lidhur me një vendim konkret	Teori e përdorur për të shpjeguar mekanizmin e një vendimi

Kur zbatohen të pesë kriteret, shuma maksimale është 15 pikë. Për detyrat e ngushta, si një vërtetim i vetëm, pedagogu përcakton paraprakisht kriteret që zbatohen dhe maksimumin përkatës; kriteret që detyra nuk i kërkon nuk vlerësohen me zero. Pikët duhen shoqëruar me koment për secilin kriter, që vlerësimi të ketë funksion formues dhe jo vetëm përmbledhës. Një gabim thelbësor matematikor jep 0 pikë te kriteri i parë. Ai duhet korrigjuar para se materiali të përdoret në mësimdhënie, edhe nëse pjesa vizuale ose komunikimi janë të mirë. Ky rregull

shpreh një parim profesional: një shpjegim i bukur i një pohimi të gabuar është më i dëmshëm se mungesa e shpjegimit.

15.2 Detyra përmbyllëse individuale

«Një nxënës e zgjidh 64 − 29 si 64 − 30 + 1. Një tjetër shkruan 65 − 30. Shpjegoni të dyja strategjitë, krijoni një paraqitje vizuale për njërën prej tyre dhe formuloni një pyetje që dallon kuptimin nga zbatimi mekanik».

Elementet e përgjigjes së pritshme. Të dyja strategjitë japin 35. Në strategjinë e parë, zbritësi rritet përkohësisht me 1 dhe korrigjohet heqja e një njësie më shumë, sipas pohimit 8.1. Në strategjinë e dytë, të dy përbërësit rriten me 1 dhe diferenca ruhet, sipas pohimit 8.2. Paraqitja vizuale mund të jetë boshti me dy kërcime për strategjinë e parë, si në Figurën 7, ose dy boshtet paralele për të dytën, si në Figurën 8. Një pyetje dalluese është: «A mund të shkruajmë 64 − 29 = 66 − 30? Pse?» Përgjigjja e saktë është jo, sepse ndryshimet nuk janë të barabarta. I zbritshmi rritet me 2 dhe zbritësi me 1, prandaj ana e djathtë është 36 dhe jo 35. Nxënësi që zbaton mekanikisht «mjafton ta bësh zbritësin dhjetëshe të plotë» mund të përgjigjet «po»; shpjegimi i tij duhet kërkuar para se të nxirret përfundimi.

15.3 Detyrë për studim të pavarur

Zgjidhni një koncept nga leksioni dhe shkruani një analizë prej 500–700 fjalësh. Analiza duhet të përfshijë bazën matematikore, me një pohim të vërtetuar dhe kushtet e tij; një situatë problemore të klasifikuar sipas strukturës; dy përfaqësime të lidhura; një gabim të mundshëm, të analizuar në katër faza; dhe mënyrën si do të kontrollohet të kuptuarit pas ndërhyrjes. Referojuni të paktën një burimi të bibliografisë dhe dalloni qartë idetë e burimit nga shembujt tuaj. Analiza vlerësohet me rubrikën e Tabelës 11.

Për reflektim, studenti duhet t'i përgjigjet pyetjes: «Cilin vendim mësimor mund ta argumentoj tani më mirë sesa para këtij leksioni dhe çfarë evidence do të kërkoja nga nxënësi për ta konfirmuar efektin e tij?» Përgjigjja duhet të përmbajë një shembull konkret nga puna e kryer.

16. Përfundime konceptuale dhe profesionale

Leksioni u nis me një pyetje në dukje të thjeshtë: a po përdorin të njëjtën ide dy nxënës që shkruajnë 52 − 40 + 2 dhe 54 − 40? Përgjigjja, e ndërtuar në seksionin 8, është se dy strategjitë mbështeten në marrëdhënie të ndryshme. E para është veprim me korrigjim, ndërsa e dyta është transformim i problemit që ruan diferencën. Ato janë të lidhura matematikisht nga vetia 4, por kërkojnë arsyetime të ndryshme. Kjo përgjigje përmbledh mesazhin kryesor të leksionit: në matematikën elementare, rezultati i saktë nuk tregon vetvetiu cila marrëdhënie është kuptuar.

Në planin matematikor, leksioni tregoi se zbritja në $\mathbb{N}_0$ është veprim i pjesshëm, i përkufizuar si i kundërti i mbledhjes. Ekzistenca e diferencës përkon me kushtin e renditjes, ndërsa njëvlerësia e saj rrjedh nga vetia e anulimit. Të gjitha strategjitë e llogaritjes me gojë janë transformime që mbështeten në pak veti të vërtetuara, kryesisht vetitë 2, 3 dhe 4 dhe pohimet 8.2 dhe 9.2. Secila prej tyre ka kushte vlefshmërie, të cilat në arsimin fillor shfaqen si kufij të strategjisë dhe jo si formula. Mësuesi që i njeh këto kushte mund ta parashikojë kur një strategji do ta çojë nxënësin jashtë numrave që ai njeh.

Në planin didaktik, leksioni tregoi se kuptimi i zbritjes ndërtohet nga katër situata me strukturë të ndryshme: heqja, pjesa që mungon, krahasimi dhe plotësimi. Asnjëra prej tyre nuk mjafton vetëm. Pozicioni i së panjohurës dhe madhësia e numrave mund të ndryshojnë në mënyra të ndryshme kërkesën njohëse; ndikimi i tyre duhet analizuar në raport me detyrën dhe njohuritë e nxënësit. Përfaqësimet nuk janë të barasvlershme. Secila bën të dukshëm një aspekt dhe fsheh një tjetër, ndërsa të kuptuarit dëshmohet nga lidhja ndërmjet tyre. Sistemi dhjetor, përfshirë veçoritë e emërtimeve shqipe të numrave, kërkon ndërtimin e dhjetëshes si njësi të re dhe nuk mund të supozohet si i dhënë.

Në planin profesional, leksioni propozoi një mënyrë pune që përsëritet në çdo seksion. Ajo nis me analizën matematikore të konceptit, vazhdon me parashikimin e mendimit të nxënësit dhe përmbyllet me një vendim mësimor që mund të kontrollohet me evidencë. Analiza e gabimeve në katër faza dhe mikromësimdhënia me kartela roli janë dy forma të kësaj mënyre pune. Të dyja synojnë që mësuesi të mos mjaftohet me etiketimin «nxënësi nuk kupton» dhe të mos e ngatërrojë qartësinë e shpjegimit të vet me të nxënit e nxënësit.

Së fundi, leksioni u përpoq të dallojë qartë ndërmjet asaj që vërtetohet, asaj që mbështetet në kërkim dhe asaj që propozohet si interpretim pedagogjik. Ky dallim nuk është vetëm kërkesë e integritetit akademik. Ai është pjesë e formimit të mësuesit, i cili gjatë karrierës do të ndeshë shumë rekomandime metodike dhe do të duhet të pyesë për secilën: mbi çfarë mbështetet dhe si mund ta verifikoj në klasën time?

LEKSIONI 4

Bibliografia

Shënim mbi përdorimin e burimeve

Bibliografia ndjek stilin APA, botimi i 7-të. Të dhënat bibliografike dhe DOI-të u verifikuan në tetor 2026 nëpërmjet regjistrit Crossref, faqeve të botuesve dhe faqeve zyrtare të burimeve. Detajet e verifikimit jepen në raportin e auditimit që shoqëron leksionin. Burimet NCETM janë materiale profesionale të konsultuara drejtpërdrejt në faqet e institucionit. Për monografitë me pagesë (Bruner, 1966; Carpenter et al., 2003, 2014; Ma, 1999; Marton, 2015), u verifikuan të dhënat bibliografike. Nuk pretendohet konsultim i plotë i tekstit të tyre gjatë hartimit të këtij leksioni. Ato citohen për ide të njohura dhe të përmbledhura gjerësisht në literaturë. Figurat, problemet, dialogët, rastet e gabimeve, sekuenca mësimore, protokolli i vëzhgimit dhe rubrika janë hartuar posaçërisht për këtë leksion. Materialet britanike duhen përshtatur me gjuhën dhe programin vendor. Vendosja e një teme në një vit shkollor të sistemit të tyre nuk përcakton automatikisht renditjen në programin që përdorim.

Literatura e cituar

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(4), 294–323. https://doi.org/10.2307/749464

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 5*(1), 7–74. https://doi.org/10.1080/0969595980050102

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21*(1), 5–31. https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5

Brown, J. S., & Burton, R. R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science, 2*(2), 155–192. https://doi.org/10.1207/s15516709cog0202_4

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Belknap Press of Harvard University Press.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (2014). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction* (2nd ed.). Heinemann.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), 130–162. https://doi.org/10.2307/749759

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 297–312.

Kullberg, A., Runesson Kempe, U., & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics? *ZDM Mathematics Education, 49*(4), 559–569. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0858-4

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781410602589

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315816876

National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics. (pa datë-a). *Composition of numbers: 20–100* [Materiale për zhvillimin profesional, Spine 1: Number, addition and subtraction, Topic 1.9]. https://www.ncetm.org.uk/classroom-resources/primm-109-composition-of-numbers-20-100/

National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics. (pa datë-b). *Subtraction as difference* [Materiale për zhvillimin profesional, Spine 1: Number, addition and subtraction, Topic 1.12]. https://www.ncetm.org.uk/classroom-resources/primm-112-subtraction-as-difference/

National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics. (pa datë-c). *Using equivalence and the compensation property to calculate* [Materiale për zhvillimin profesional, Spine 1: Number, addition and subtraction, Topic 1.29]. https://www.ncetm.org.uk/classroom-resources/primm-129-using-equivalence-and-the-compensation-property-to-calculate/

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* (J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell, Eds.). National Academy Press. https://doi.org/10.17226/9822

Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review, 27*(4), 587–597. https://doi.org/10.1007/s10648-015-9302-x

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics, 50*(1), 29–47. https://doi.org/10.1023/A:1020572803437

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development, 52*(2), 83–94. https://doi.org/10.1159/000202727