METODIKA E MATEMATIKËS III

Leksioni 3

Veprimet deri në 20 dhe hyrja në shumëzim

Numrat nga 10 deri në 20 dhe konsolidimi deri në 100

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Material universitar për formimin e mësuesve

Mësimi në gjuhën shqipe në Podgoricë

4 orë akademike · 180 minuta

PËRMBLEDHJE

Leksioni trajton lidhjen ndërmjet strukturës dhjetore të numrave, strategjive të mbledhjes dhe të zbritjes deri në 20 dhe kuptimit fillestar të shumëzimit. Krahas argumentimit matematikor, ai përmban paraqitje pamore, analiza të përgjigjeve të nxënësve dhe ushtrime të zgjidhura.

Përmbajtja

1 Qëllimi dhe organizimi i leksionit....3
2 Parakushtet dhe diagnostikimi fillestar....5
3 Numrat nga 10 deri në 20 dhe njësia e përbërë....7
4 Kornizat e dhjetës dhe kalimi ndërmjet paraqitjeve....9
5 Mbledhja deri në 20 dhe kuptimi i shumës....11
6 Strategjia e plotësimit të dhjetës....13
7 Dyfishimet dhe faktet e afërta....14
8 Zbritja deri në 20 dhe interpretimet e saj....16
9 Zbritja përmes dhjetës dhe plotësimi përpara....18
10 Barazimi dhe marrëdhëniet ndërmjet veprimeve....19
11 Problemet me tekst dhe vendi i së panjohurës....20
12 Konsolidimi i numrave deri në 100....21
13 Modelet deri në 100 dhe kufijtë e tyre....21
14 Nga mbledhja te grupet e barabarta....22
15 Përkufizimi i shumëzimit në numrat natyrorë....23
16 Numërimi me hapa dhe koordinimi i dy sasive....25
17 Rreshtat, kolonat dhe modeli drejtkëndor....26
18 Vetitë e shumëzimit dhe argumentimi për mësuesin....27
19 Shumëzimi me zero dhe me një....29
20 Përzgjedhja e problemeve për hyrjen në shumëzim....30
21 Baza kërkimore dhe kufijtë e zbatimit....30
22 Raste profesionale dhe ndërhyrje të argumentuara....31
23 Model ore për mbledhjen përmes dhjetës....32
24 Model ore për hyrjen në shumëzim....33
25 Diferencimi dhe vlerësimi i arsyetimit....34
26 Ushtrime integruese me zgjidhje....35
27 Vlerësim përmbyllës dhe rubrika analitike....37
28 Përfundime didaktike....40
29 Literatura....40

1 Qëllimi dhe organizimi i leksionit

Leksioni 3 mbulon dy temat e radhës të programit: (a) numrat nga 10 deri në 20, mbledhjen dhe zbritjen deri në 20 dhe konsolidimin e numrave deri në 100; (b) hyrjen në veprimin e shumëzimit. Koncepti që i bashkon është njësia: dhjetë njëshe formojnë një dhjetëshe, ndërsa një grup me numër të caktuar objektesh mund të trajtohet si njësi që përsëritet. Prandaj mësuesi duhet të dallojë numërimin e objekteve nga numërimi i grupeve dhe të jetë në gjendje të shpjegojë kalimin nga njëri te tjetri.

Materiali u drejtohet studentëve të mësuesisë. Argumentet e përgjithshme matematikore synojnë formimin e studentit; për nxënësin e shkollës fillore ato shndërrohen në veprime me objekte, vizatime dhe shpjegime të përshtatshme për moshën. Duhet mbajtur parasysh se një rezultat numerik i saktë, i marrë veçmas, nuk dëshmon kuptimin e strukturës së veprimit.

Në përfundim të leksionit studenti duhet të jetë në gjendje:

RN 1 – të shpjegojë numrat 11–20, dhe më tej deri në 100, si dhjetëshe dhe njëshe, duke dalluar numrin, shifrën dhe vlerën vendore;

RN 2 – të argumentojë strategjitë e mbledhjes dhe të zbritjes deri në 20 (plotësimi i dhjetës, dyfishimet, kompensimi) dhe kushtet e tyre në $\mathbb{N}_0$;

RN 3 – të analizojë shenjën e barazimit si marrëdhënie dhe vlefshmërinë e vargjeve të barazimeve;

RN 4 – të interpretojë shumëzimin përmes grupeve të barabarta sipas marrëveshjes m × n dhe ta dallojë atë nga mbledhja;

RN 5 – të zgjedhë dhe të krahasojë paraqitje (kornizë e dhjetës, vijë numerike, shirit, rregullim drejtkëndor) dhe t’i përdorë për të argumentuar vetitë e veprimeve;

RN 6 – të diagnostikojë gabimet me hipoteza dhe detyra dalluese dhe të planifikojë ndërhyrjen dhe transferimin.

Tabela 2 i lidh rezultatet me seksionet, aktivitetet në auditor, dëshminë që kërkohet dhe vlerësimin përmbyllës; kriteret K1–K5 janë ato të rubrikës në seksionin 27.

Tabela 2. *Matrica rezultat i të nxënit → seksion → aktivitet → dëshmi → vlerësim*

RN	Seksioni	Aktiviteti në auditor	Dëshmia	Vlerësimi
RN 1	3–4 (12–13: studim i pavarur)	Tufa e zgjidhur dhe e rilidhur; Ushtrimet 1, 4	Kalimi ndërmjet «një dhjetëshe e gjashtë njëshe» dhe «gjashtëmbëdhjetë»; detyra dalluese 13/31	Detyra 1 · K1, K2

RN	Seksioni	Aktiviteti në auditor	Dëshmia	Vlerësimi
RN 2	5–9	Plotësimi i dhjetës, dyfishimet, kompensimi; Ushtrimet 7, 8, 9, 11, 12	Barazime të argumentuara; ruajtja e shumës dhe e ndryshesës	Detyrat 2, 3 · K1, K2, K3
RN 3	10	Fjali të hapura dhe vargje barazimesh; Ushtrimet 13, 14	Zgjidhje pa llogaritje të plotë; vlerësimi i vargjeve	Detyra 6 · K3, K4
RN 4	14–16, 19	Grupe të barabarta, numërim me hapa, 0 dhe 1; Ushtrimet 18, 20, 21, 25	Emërtimi i rolit të secilit faktor	Detyra 4 · K1, K2
RN 5	4, 9, 17–18	Leximi sipas rreshtave dhe kolonave; ndarja e rregullimit; Ushtrimet 22, 23	Përputhja figurë–simbol; kushtet e argumentit pamor	Detyra 4 · K2; Detyra 3 · K2
RN 6	22, 25	Rastet C dhe D; Ushtrimi 29	Dy hipoteza dhe një detyrë që i dallon	Detyrat 5, 6 · K4, K5

Leksioni zhvillohet në katër orë akademike (180 minuta), pa përfshirë pushimet. Tabela 1 jep ndarjen minutë për minutë. Seksionet 12–13, 20–21, 23–24, 25.1, 26 dhe 27 janë studim i pavarur; pjesët e shënuara «Thellim universitar» lexohen para orës.

Tabela 1. *Bërthama e auditorit: 4 × 45 minuta*

Ora	Minutat	Përmbajtja	Seksioni / ushtrimi
I	0–10	Diagnostikimi: 14 objekte, katër detyrat e nxënësit	§2
I	10–28	11–20 si dhjetëshe dhe njëshe; njësia e përbërë; hipotezat për 13/31	§3, Ushtrimi 1
I	28–37	Kornizat e dhjetës; kapaciteti dhe sasia	§4, Ushtrimi 4
I	37–45	Mbledhja si bashkim; kushti i veçimit	§5, Ushtrimi 5
II	0–14	Plotësimi i dhjetës; gabimi 9 + 6 = 10 + 6	§6, Ushtrimi 7
II	14–22	Dyfishimet dhe faktet e afërta	§7, Ushtrimi 8

Ora	Minuta	Përmbajtja	Seksioni / ushtrimi
II	22–32	Zbritja: heqje, krahasim, plotësim	§8, Ushtrimi 11
II	32–45	Zbritja përmes dhjetës; dy trajtat e kompensimit	§7.1, §9, Ushtrimet 9, 12
III	0–11	Barazimi si marrëdhënie; vargjet e barazimeve	§10, Ushtrimet 13, 14
III	11–22	Problemet me tekst; vendi i së panjohurës	§11, Ushtrimi 15
III	22–45	Grupet e barabarta; marrëveshja m × n; bashkërendimi i dy sasive	§14–15, Ushtrimet 18, 20
IV	0–8	Numërimi me hapa; kërcimet në vijën numerike	§16, Ushtrimi 21
IV	8–20	Rregullimi drejtkëndor; ndërrimi dhe shpërndarja	§17–18, Ushtrimet 22, 23
IV	20–26	Shumëzimi me 0 dhe me 1	§19, Ushtrimi 25
IV	26–37	Raste profesionale në dyshe (C dhe D)	§22
IV	37–42	Detyra e daljes: Ushtrimi 29 dhe një pyetje për barazimin	§25
IV	42–45	Sinteza: njësia si ide përshkuese	§28

Si lexohet ky material. Nën titullin e çdo seksioni shënohet statusi i tij: «Bërthamë e auditorit», me orën dhe minutat, ose «Studim i pavarur». Kutitë janë katër llojesh. «Ide kyçe» përmban përfundimin që studenti duhet ta zotërojë patjetër. «Gabim tipik» përshkruan një përgjigje të nxënësit me hipotezat e mundshme, jo një diagnozë të prerë. «Dëshmia që kërkohet» tregon çfarë e dëshmon kuptimin. «Thellim universitar» përmban përkufizime, vërtetime dhe veti të përgjithshme për studentin, që lexohen para orës dhe nuk i paraqiten drejtpërdrejt nxënësit fillor.

Ushtrimet shënohen «auditor», «studim paraprak» ose «studim i pavarur» dhe përbëjnë njëkohësisht një bankë për përgatitje. Në auditor përparësi kanë interpretimi didaktik, krahasimi i strategjive dhe diagnoza.

2 Parakushtet dhe diagnostikimi fillestar

Parakushtet për numrat 11–20 janë korrespondenca një për një, rendi i qëndrueshëm i fjalëve numërore dhe kuptimi kardinal i numërimit. Për strategjitë përmes dhjetës nevojiten edhe

zbërthimet e numrit 10, si 10 = 7 + 3. Njohja e vargut numëror përmendsh dallohet nga kuptimi i njësisë së përbërë.

Në fillim të orës paraqiten 14 objekte të shpërndara dhe pyetet: Si mund të numërohen? Si mund të organizohen që sasia të dallohet më qartë? Një student mund të propozojë numërimin një nga një, një tjetër një grup prej dhjetë dhe katër objekte të veçuara. Të dyja mënyrat japin 14, por e dyta e bën të dukshme strukturën dhjetore dhe përgatit shkrimin pozicional.

Diagnoza e nxënësit mund të mbështetet në katër detyra të shkurtra: ndërto 13; plotëso 7 + □ = 10; gjej 9 + 4 dhe shpjego si e gjete; paraqit tri grupe me nga dy objekte. Detyra e fundit verifikon një parakusht të shumëzimit, jo zotërimin e tij. Krahas përgjigjes regjistrohen veprimi, shpjegimi dhe mënyra e kontrollit.

Kur nxënësi gjen 9 + 4 duke numëruar të gjitha objektet, rruga e tij pranohet si e vlefshme. Mësuesi pyet nëse mund të nisë nga 9 ose të plotësojë dhjetën. Mbështetja zgjidhet sipas asaj që nxënësi bën realisht. Nëse ai nuk e ruan sasinë gjatë riorganizimit, përpara kërkesës për llogaritje mendore punohet me korrespondencën dhe me sasinë.

Ushtrim 1 (auditor)

Një nxënës numëron me radhë deri në 20, por për 13 shkopinj shkruan 31. Formuloni hipoteza për gabimin dhe një detyrë që i dallon.

Zgjidhje. Mund të formulohen tri hipoteza. (1) Ndikimi i mundshëm i gjuhës: në shqip, si në malazezisht («trinaest»), emrat e numrave 11–19 nisin nga njëshet («tre-mbë-dhjetë»), ndërsa shkrimi nis nga dhjetëshet; për 21–99 rendi i fjalës përputhet me rendin e shkrimit («njëzet e një»). Në gjuhët me këtë përmbysje janë vërejtur më shumë gabime në shkrimin e numrave 11–19, megjithëse ato mbeten të pakta (Clayton et al., 2020); për shqipen kjo mbetet hipotezë që verifikohet te nxënësi konkret. (2) Mungesa e kuptimit të vlerës vendore. (3) Ngatërrim i rendit të shifrave, i pavarur nga gjuha. Detyra e parë dalluese kërkon që nxënësi të ndërtojë 13 dhe 31 me tufa dhjetëshe dhe shkopinj të veçuar dhe të shpjegojë secilën shifër: nëse për 31 paraqet vetëm tre dhe një objekte, nevojitet punë me dhjetëshen si njësi (hipoteza 2). Nëse i ndërton saktë, por i shkruan të përmbysur, problemi lidhet me kodimin, ndoshta nën ndikimin e fjalës. Për ta ndarë hipotezën 1 nga 3, nxënësit i diktohen 13, 17, 24, 31, 42 dhe 71: nëse përmbys vetëm numrat 11–19, ku rendi i fjalës nuk përputhet me shkrimin, hipoteza gjuhësore forcohet; nëse përmbys edhe 24 ose 42, më e mundshme është hipoteza 3.

3 Numrat nga 10 deri në 20 dhe njësia e përbërë

3.1 Përkufizimi i sistemit pozicional dhjetor

THELLIM UNIVERSITAR · STUDIM PARAPRAK

Në formulimet e përgjithshme të leksionit përdoret $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Sistemi pozicional dhjetor e paraqet çdo numër natyror me anë të shifrave 0–9, ku vlera e secilës shifër varet nga vendi i saj. Për $n > 0$ paraqitja ka trajtën

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0,$$

ku $a_k \neq 0$ dhe $0 \leq a_i \leq 9$; numri zero shkruhet me shifrën 0. Vendet numërohen nga e djathta, duke filluar nga fuqia zero.

Për numrat deri në 100 përkufizimi konkretizohet në njëshe, dhjetëshe dhe, për 100, qindëshe. Për 16 kemi $a_1 = 1$ dhe $a_0 = 6$: shifra 1 zë vendin e dhjetësheve, me vlerë vendore 10, prandaj vlen $1 \times 10 = 10$; shifra 6 zë vendin e njësheve, me vlerë vendore 1, prandaj vlen $6 \times 1 = 6$. Numri, shifra dhe vlera vendore janë koncepte të dallueshme: shifra është shenjë e sistemit të shkrimit, kurse numri është objekti matematikor që përfaqësohet me anë të saj.

Vërtetim. Sipas teoremës së pjesëtimit me mbetje, për çdo $n \in \mathbb{N}_0$ ekzistojnë në mënyrë të vetme q dhe r të tillë që

$$n = 10q + r, \quad 0 \leq r < 10.$$

Ekzistenca dhe veçantia e paraqitjes vërtetohen me induksion të plotë sipas n. Për $0 < n < 10$ paraqitja është vetë shifra n. Për $n \geq 10$ kemi $0 < q < n$, prandaj sipas hipotezës q ka paraqitje të vetme; shtimi i shifrës r në të djathtë jep paraqitjen e $n = 10q + r$. Veçantia: nga çdo paraqitje $n = a_k 10^k + \ldots + a_1 10 + a_0$ del

$$n = 10(a_k 10^{k-1} + \ldots + a_1) + a_0, \quad 0 \leq a_0 \leq 9;$$

prandaj $a_0 = r$ dhe pjesa tjetër është paraqitje e q, e cila është e vetme. Ky argument i shërben studentit; nxënësi fillor nuk punon me pjesëtimin me mbetje.

3.2 Interpretimi didaktik i njësisë së përbërë

IDE KYÇE

Njësi e përbërë quhet një grup me numër të caktuar njësish fillestare, i cili trajtohet si njësi e vetme gjatë numërimit. Dhjetëshja është njësi e përbërë prej dhjetë njësish. Në shumëzim edhe një grup prej katër objektesh mund të bëhet njësi numërimi, pa qenë dhjetëshe; prandaj koncepti i njësisë së përbërë është më i gjerë se baza dhjetore.

DËSHMIA QË KËRKOHET

Kushti didaktik është që nxënësi ta ruajë lidhjen ndërmjet grupit dhe objekteve që ai përmban. Për një tufë me dhjetë shkopinj dhe gjashtë shkopinj të lirë, ai duhet të mund të thotë si «një dhjetëshe dhe gjashtë njëshe», ashtu edhe «gjashtëmbëdhjetë shkopinj». Kalimi nga njëri lexim te tjetri është dëshmi më e fortë kuptimi se emërtimi i tufës si dhjetëshe. Detyra është propozim i këtij materiali dhe lidhet me kërkesën për kuptim konceptual sipas National Research Council [NRC] (2001).

Shembull. Mësuesi zgjidh tufën e dhjetëshes, i vendos shkopinjtë veçmas dhe pyet nëse ndryshoi numri i tyre dhe pse; më pas i lidh sërish në tufë. Përgjigjja e pritur është se ndryshoi organizimi, ndërsa asnjë shkop nuk u shtua apo u hoq. Veprimi me material lidhet me shkrimin 10 + 6 = 16, sepse lidhja fizike e shkopinjve nuk mjafton për ndërtimin e kuptimit simbolik (Uttal et al., 1997).

GABIM TIPIK · HIPOTEZA, JO DIAGNOZË E PRERË

Për një tufë dhe gjashtë shkopinj, përgjigjja «shtatë» mund të tregojë se nxënësi numëron pjesët e dukshme, ose se e kupton pyetjen si «sa grupe dhe sa objekte të lira ka». Detyra dalluese e përcakton njësinë: «Sa shkopinj ka gjithsej, duke përfshirë edhe ata brenda tufës?» Nëse përgjigjja mbetet «shtatë», tufa zgjidhet, shkopinjtë rinumërohen dhe rikthehet lidhja ndërmjet dy niveleve të njësisë. Transferimi kontrollohet me dy tufa dhe tri njëshe, duke kërkuar shpjegimin e numrit 23.

Ushtrim 2. Veçantia e paraqitjes dhjetore (studim paraprak)

Vërtetoni se për një numër dyshifror paraqitja

$$n = 10d + u, \quad 1 \le d \le 9, \quad 0 \le u \le 9,$$

është e vetme. Dalloni këtë paraqitje nga rigrupimi me më shumë se nëntë njëshe.

Zgjidhje. Le të jetë $10d + u = 10d' + u'$. Atëherë

$$10(d - d') = u' - u.$$

Ana e djathtë ndodhet ndërmjet -9 dhe 9, ku i vetmi shumëfish i 10 është zero; prandaj $d = d'$ dhe $u = u'$. Shkrimi 23 = 10 + 13 është i saktë, por 13 nuk është shifër e njësheve: kemi të bëjmë me rigrupim, jo me paraqitjen dhjetore me dy shifra.

3.3 Zbatim në përmbajtjen e leksionit

Për numrat 11–19 paraqitja është $n = 10 + u$, ku $u = 1, \ldots, 9$. Numri 10 është një dhjetëshe dhe zero njëshe, ndërsa 20 përbëhet nga dy dhjetëshe dhe zero njëshe. Termi «dhjetëshe» emërton një grup prej dhjetë njësish, jo thjesht shifrën 1 që shkruhet në të majtë.

Ndërtimi didaktik mund të nisë me dhjetë shkopinj të numëruar. Nxënësit i lidhin në një tufë dhe verifikojnë se numri i shkopinjve nuk ndryshoi; tani tufa mund të numërohet si një dhjetëshe. Për 16 vendoset një tufë dhe gjashtë shkopinj. Pyetjet «Sa shkopinj ka brenda tufës? Sa janë jashtë saj? Sa janë gjithsej?» pengojnë që tufa të numërohet si një objekt i vetëm në sasinë totale.

Njësim quhet trajtimi i një grupi si njësi e re numërimi dhe veprimi. Një nxënës mund të numërojë deri në 16 dhe sërish të ketë nevojë ta zgjidhë tufën për të kontrolluar totalin. Mbështetja tërhiqet gradualisht, kur ai e lidh dhjetëshen me dhjetë njëshe dhe e përdor këtë lidhje në situata të reja.

Për 17 kërkohen tri paraqitje të lidhura: një dhjetëshe dhe shtatë njëshe; 10 + 7; shkrimi 17. Nxënësi tregon në material ku ndodhet 10 dhe ku 7. Shifra 1 ka vlerën 10 për shkak të vendit që zë, kurse shifra 7 ka vlerën 7; në numrin 71 të njëjtat shifra marrin vlera të tjera.

Ushtrim 3 (studim i pavarur)

Shpjegoni pse shkrimi 18 nuk përfaqëson një objekt dhe tetë objekte. Jepni një paraqitje tjetër të numrit 18.

Zgjidhje. Në shkrimin 18 shifra 1 numëron dhjetëshet, prandaj vlera është $1 \times 10 + 8 = 18$; në material një tufë përmban dhjetë objekte. Paraqitje të tjera janë 18 njëshe të palidhura ose 9 + 9. Të gjitha shprehin të njëjtën sasi, por vetëm paraqitja «një dhjetëshe dhe tetë njëshe» e bën të dukshëm sistemin pozicional; paraqitjet e tjera nuk kanë pse të lexohen si shkrim pozicional. Nxënësi që vendos një shkop për shifrën 1 e lexon shifrën si numër objektesh, jo si numër dhjetëshesh; detyra dalluese është të ndërtojë 18 dhe 81 dhe t’i krahasojë.

4 Kornizat e dhjetës dhe kalimi ndërmjet paraqitjeve

Korniza e dhjetës është paraqitje me dhjetë vende të organizuara, zakonisht në dy rreshta me nga pesë. Për 14 përdoren dy korniza: njëra e plotë dhe tjetra me katër vende të zëna. Ky organizim e mbështet perceptimin e strukturës 10 + 4, edhe pse jo çdo nxënës e njeh sasinë menjëherë pa numëruar.

Në prezantimin fillestar objektet vendosen gjithmonë në të njëjtën mënyrë. Më pas paraqitja ndryshohet, për të verifikuar nëse nxënësi mbështetet te sasia apo te një figurë e mbajtur mend; p.sh. 14 paraqitet edhe si dy grupe me nga shtatë. Mësuesi kërkon lidhjen me dhjetën dhe e pranon paraqitjen alternative si të vlefshme.

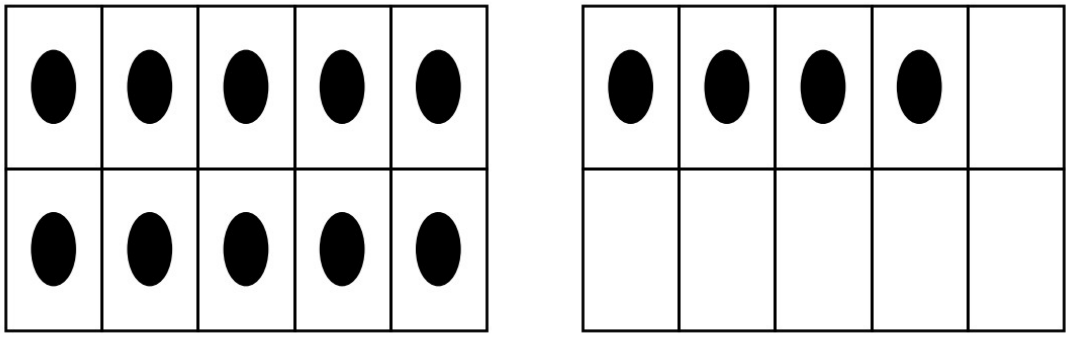


Figura 1. *Katërmbëdhjetë si një dhjetëshe dhe katër njëshe. Vendet e zbrazëta në kornizën e dytë nuk numërohen.*

IDE KYÇE

Paraqitjet konkrete, pamore dhe simbolike nuk përbëjnë shkallë të njëdrejtimshme: nxënësi mund të rikthehet te materiali kur has një problem të ri. Mësuesi i bën të qarta lidhjet: çfarë përfaqëson objekti, çfarë përfaqëson një vend i zënë dhe çfarë përfaqëson simboli numerik. Materialet janë paraqitje simbolike të ideve dhe kuptimi i tyre nuk lind vetvetiu nga manipulimi (Uttal et al., 1997).

Ushtrim 4 (auditor)

Nxënësi sheh një kornizë të plotë dhe pesë vende të zëna në të dytën dhe thotë «20». Formuloni dy hipoteza dhe një detyrë që i dallon. Si ndërhyhet?

Zgjidhje. Hipoteza e parë: nxënësi numëron të gjitha vendet, pra kapacitetin e kornizave. Hipoteza e dytë: secila kornizë lexohet si një dhjetëshe, edhe kur nuk është e plotë. Detyra dalluese është një kornizë e vetme me tri objekte: përgjigjja «10» mbështet hipotezën e dytë, ndërsa numërimi i qelizave të zbrazëta mbështet të parën. Në të dyja rastet dallohet kapaciteti nga sasia e paraqitur: dy kornizat kanë vend për 20 objekte, por vetëm 15 vende janë të zëna. Nxënësi prek ose zhvendos vetëm objektet e pranishme dhe i lidh ato me 10 + 5 = 15. Më pas jepen raste me 12 dhe me 20 objekte. Nëse ai i dallon vendet e zëna nga vendet e mundshme, ndërhyrja ka ndryshuar interpretimin e paraqitjes.

5 Mbledhja deri në 20 dhe kuptimi i shumës

5.1 Përkufizimi dhe fusha e mbledhjes

Thellim universitar · studim paraprak

Mbledhja është veprim binar në $\mathbb{N}_0$, që çdo çifti të renditur (a, b) i shoqëron një numër të vetëm a + b ∈ $\mathbb{N}_0$. Përkufizimi rekursiv jepet me

$$a + 0 = a, \quad a + (b + 1) = (a + b) + 1;$$

këtu b + 1 shënon pasardhësin e b, i cili njihet para mbledhjes, prandaj përkufizimi nuk është rrethor. Në modelin kardinal, nëse A dhe B janë bashkësi të fundme të veçuara, me |A| = a dhe |B| = b, atëherë

$$a + b = |A \cup B|.$$

Rezultati nuk varet nga zgjedhja e bashkësive, sepse bashkësitë me numër të njëjtë elementesh vihen në korrespondencë një për një. Të dy përkufizimet përputhen në $\mathbb{N}_0$: për B = ∅ kemi A ∪ B = A, ndërsa shtimi i një elementi të ri në B e rrit bashkimin me një, që i përgjigjet hapit a + (b + 1) = (a + b) + 1. Kushti A ∩ B = ∅ është pjesë përbërëse e modelit dhe duhet shprehur.

Kufiri 20 është kufizim i detyrave mësimore, jo i përkufizimit të mbledhjes. Bashkësia {0, …, 20} nuk është e mbyllur ndaj mbledhjes, sepse 15 + 10 = 25. Në këtë njësi zgjidhen detyra me të mbledhshëm jonegativë dhe me shumë jo më të madhe se 20; kështu fusha matematikore dallohet nga kufiri i programit.

Vërtetim i vetive. Ndërrimi i vendeve të A dhe B nuk e ndryshon bashkimin, prandaj a + b = b + a. Për tri bashkësi dy nga dy të veçuara, mënyra e grupimit të bashkimeve nuk ndryshon elementet e përfshira, prandaj (a + b) + c = a + (b + c). Bashkimi me bashkësinë boshe e ruan sasinë: a + 0 = a. Këto argumente vlejnë për çdo numër natyror, jo vetëm për shembujt numerikë (krh. Manes, 2018).

5.2 Interpretimi didaktik dhe provat e të nxënit

Parakushtet janë kuptimi kardinal dhe ruajtja e secilit grup gjatë bashkimit. Mësuesi e lidh modelin me objektet, me vizatimin dhe me simbolin, duke pyetur cilin grup përfaqëson secili i mbledhshëm dhe çfarë numëron shuma. Në problemet e ndryshimit dallohet sasia fillestare nga sasia e shtuar. Situatat e bashkimit dhe të shtimit kërkojnë veprime fizike të ndryshme, megjithëse shprehen me të njëjtin barazim.

Shembull. Tetë kube në një tavolinë dhe pesë kube në një tjetër bashkohen, pa u numëruar asnjë dy herë. Mësuesi shkruan 8 + 5 = 13 dhe kërkon të identifikohet secila sasi; pastaj vendos të parën pesëshen dhe pyet nëse ndryshoi totali. Përgjigjja e argumentuar përmend se numërohen të njëjtat objekte. Ky është një rast pamor i vetisë së ndërrimit dhe nuk tregon ende se nxënësi e ka përgjithësuar vetinë.

GABIM TIPIK · HIPOTEZA, JO DIAGNOZË E PRERË

Numërimi «8, 9, 10, 11, 12» për pesë njësi të shtuara mund të tregojë se numri fillestar u numërua si hap; një shpjegim tjetër është humbja e gjurmës së hapave të numëruar. Detyra dalluese është 8 + 1, me një objekt të shtuar dhe një zhvendosje në vijën numerike. Nëse përgjigjja mbetet 8, punohet dallimi ndërmjet pozicionit dhe ndryshimit. Pas ndërhyrjes kontrolli bëhet me 6 + 3, duke shënuar tri njësi të shtuara dhe tri hapa.

Ushtrim 5. Kushti i veçimit në modelin e mbledhjes (auditor)

Një grup përbëhet nga pesë nxënës që luajnë shah, një tjetër nga katër nxënës që luajnë basketboll; dy nxënës bëjnë pjesë në të dy grupet. Pse 5 + 4 nuk jep numrin e nxënësve të ndryshëm?

Zgjidhje. Shuma nëntë i numëron dy herë dy nxënësit e përbashkët; numri i nxënësve të ndryshëm është 5 + 4 − 2 = 7. Kushti i grupeve të veçuara, mbi të cilin mbështetet përkufizimi i mbledhjes si kardinalitet i bashkimit, nuk plotësohet. Në prezantimin fillestar përdoren grupe të veçuara; ky kundërshembull i shërben formimit të mësuesit dhe lidhet me leksionin për bashkësitë.

5.3 Zbatim në përmbajtjen e leksionit

IDE KYÇE

Për sasi të fundme të veçuara, mbledhja jep numrin e elementeve të bashkimit të tyre; në problemet e ndryshimit ajo shpreh shtimin e një sasie te një sasi fillestare. Në të dyja rastet 8 + 5 = 13, por marrëdhëniet ndërmjet sasive janë të ndryshme. Njohja e strukturës së problemit i paraprin zgjedhjes së veprimit.

Në numërimin e të gjitha objekteve nxënësi ndërton tetë dhe pesë dhe pastaj rinumëron bashkimin. Në numërimin përpara ruan 8 dhe numëron pesë hapa: 9, 10, 11, 12, 13; numri 8 nuk është hapi i parë. Në strategjitë e mbështetura te faktet e njohura ai përdor marrëdhënie të njohura, si plotësimin e dhjetës. Këto janë mënyra arsyetimi që ndryshojnë me kohën dhe nuk përbëjnë etiketa për nxënësin.

Kontrolli duhet të lidhet me kuptimin: 13 është më i madh se 8 dhe ndryshesa është 5. Numërimi përpara është i dobishëm kur sasia e shtuar është e vogël, por nuk duhet të bëhet strategjia e vetme; për 9 + 8 zbërthimi 8 = 1 + 7 është më i qartë.

Ushtrim 6 (studim i pavarur)

Paraqitni 8 + 5 me numërim përpara dhe me plotësim të dhjetës. Shpjegoni çfarë ruhet.

Zgjidhje. Numërimi përpara nis te 8 dhe kryen pesë hapa deri te 13. Plotësimi i dhjetës përdor 5 = 2 + 3:

$$8 + 5 = 8 + 2 + 3 = 10 + 3 = 13.$$

Ruhet sasia e shtuar, sepse dy dhe tre së bashku japin pesë; riorganizimi nuk krijon dhe nuk heq objekte. Me material, dy objekte nga grupi me pesë vendosen pranë tetëshes dhe tre mbeten; të gjitha përfshihen në total.

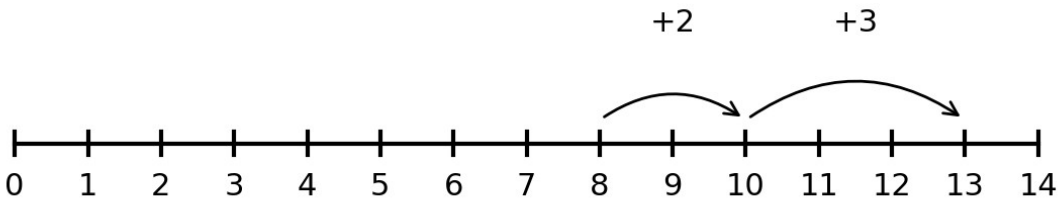


Figura 2. *Mbledhja 8 + 5 në vijën numerike përmes dhjetës. Kërcimi prej pesë njësish zbërthehet në dy dhe tre.*

6 Strategjia e plotësimit të dhjetës

Le të jenë a, b $\in \mathbb{N}_0$, me a < 10 dhe a + b > 10, dhe le të jetë c = 10 − a. Atëherë b > c dhe b = c + d për ndonjë d $\in \mathbb{N}_0$, prandaj

$$a + b = a + (c + d) = (a + c) + d = 10 + d.$$

Argumenti mbështetet në zbërthimin e sasisë dhe në vetinë e shoqërimit. Për nxënësin ai realizohet me zhvendosje objektesh dhe me shpjegimin e pjesëve.

Për 9 + 6 nevojitet një objekt që 9 të bëhet 10, dhe nga 6 mbeten pesë:

$$9 + 6 = 10 + 5 = 15.$$

Mësuesi pyet: «Sa i duhen nëntës për t'u bërë dhjetë? Sa mbeten nga gjashta?» Pyetja e dytë është thelbësore, sepse pa të nxënësi mund ta përdorë të njëjtën njësi dy herë.

> **GABIM TIPIK · HIPOTEZA, JO DIAGNOZË E PRERË**
> Gabimi 9 + 6 = 10 + 6 = 16 tregon se u ndryshua njëri i mbledhshëm pa u ndryshuar tjetri. Për ta kundërshtuar, ndërtohen dy grupet dhe shënohet objekti që zhvendoset; pas zhvendosjes grupi i dytë ka pesë objekte, jo gjashtë. Barazimi 9 + 6 = 10 + 5 shpreh ruajtjen e shumës gjatë rishpërndarjes.

Ushtrim 7 (auditor)

Argumentoni 7 + 8 me plotësim të dhjetës dhe jepni një rrugë tjetër.

Zgjidhje. Zbërthimi 8 = 3 + 5 jep

$$7 + 8 = (7 + 3) + 5 = 15.$$

Rruga tjetër mbështetet te dyfishimi:

$$7 + 8 = 7 + 7 + 1 = 14 + 1 = 15.$$

E para përdor lidhjet me dhjetën, e dyta dyfishin e shtatës. Të dyja pranohen kur barazimet argumentohen. Strategjia zgjidhet sipas fakteve që zotëron nxënësi.

6.1 Kushtet e strategjisë dhe ruajtja e shumës

Për detyrat e kësaj njësie merret $0 \le a < 10$, $b \ge 10 - a$ dhe $a + b \le 20$. Zbërthimi $b = (10 - a) + r$, me $r \ge 0$, jep $a + b = 10 + r$; kur $a + b = 10$, $r = 0$, ndërsa kur shuma e kalon dhjetën, $r > 0$. Për $b < 10 - a$ dhjeta nuk mund të plotësohet vetëm me b dhe strategjia nuk zbatohet në këtë trajtë.

Në paraqitje, një sasi zhvendoset nga njëri grup te tjetri. Për $t \le b$ vlen

$$a + b = (a + t) + (b - t)$$

njëri i mbledhshëm rritet me t dhe tjetri zvogëlohet me aq. Ruajtja e shumës është baza matematikore e kompensimit.

Shembull. Për 8 + 6 plotësimi i dhjetës jep 10 + 4, ndërsa dyfishimi jep 7 + 7, kur një objekt kalon nga tetëshja te gjashta. Të dyja rrugët kërkojnë ruajtjen e totalit. Për 10 + 6 plotësimi i dhjetës nuk nevojitet, sepse njëri i mbledhshëm është tashmë dhjetë. Nga studenti kërkohet që zgjedhjen ta argumentojë sipas marrëdhënieve ndërmjet numrave dhe njohurive të nxënësit.

> **GABIM TIPIK · HIPOTEZA, JO DIAGNOZË E PRERË**
> Për 8 + 6 = 10 + 6 shqyrtohen dy hipoteza: nxënësi ka humbur gjurmën e objekteve të zhvendosura, ose e lexon barazimin si varg udhëzimesh. Në detyrën dalluese shënohen dy objektet e zhvendosura dhe pyetet sa mbeten nga gjashta. Nëse përgjigjet «katër», por e ruan shkrimin 10 + 6, punohet përputhja ndërmjet veprimit dhe simbolit; nëse përgjigjet «gjashtë», punohet ruajtja e sasisë gjatë rigrupimit. Transferimi kontrollohet me 7 + 5.

7 Dyfishimet dhe faktet e afërta

Dyfishi i numrit a është shuma a + a. Faktet 6 + 6 = 12 dhe 8 + 8 = 16 shërbejnë si mbështetje për shuma të afërta:

$$6 + 7 = 6 + 6 + 1 = 13, \quad 8 + 7 = 8 + 8 - 1 = 15.$$

Nxënësi duhet të tregojë cili i mbledhshëm ndryshoi dhe me sa.

DËSHMIA QË KËRKOHET

Njohja e një fakti ndërtohet nga përvoja dhe shpjegimi dhe konsolidohet me përsëritje të shkurtra e të shpeshta. Rikujtimi i shpejtë i fakteve e lehtëson llogaritjen, por shpejtësia nuk është tregues i kuptimit: nxënësi mund të jetë i shpejtë dhe megjithatë të zgjedhë veprimin e gabuar në një problem me tekst. Rikujtimi i fakteve dhe strategjitë e mendimit nuk janë rrugë kundërshtuese, por plotësojnë njëri-tjetrin; ushtrimi me kohë të kufizuar futet vetëm pasi nxënësi ka treguar saktësi (McNeil et al., 2025).

IDE KYÇE

Në krahasimin e 7 + 7 me 7 + 8, njëri grup mbetet i njëjtë dhe tjetri rritet me një, prandaj shuma rritet me një. Kjo marrëdhënie duhet të dalë nga paraqitja dhe nga shpjegimi, jo nga një rregull i mësuar përmendsh si «shto një sa herë që numrat janë të afërt».

Ushtrim 8 (auditor)

Një nxënës e zgjidh 6 + 8 si 6 + 6 + 1 = 13. Analizoni arsyetimin dhe propozoni ndërhyrjen.

Zgjidhje. Nxënësi ka përdorur idenë e dyfishit të afërt, por ndryshesa ndërmjet 8 dhe 6 është dy; barazimi i saktë është

$$6 + 8 = 6 + 6 + 2 = 14.$$

Nxënësi ndërton grupet me gjashtë dhe tetë objekte dhe dallon dy objektet shtesë. Krahasimi i 6 + 7, 6 + 8 dhe 6 + 9 verifikon nëse ai e kupton ndryshimin, në vend që të zbatojë një rregull të përgjithësuar gabimisht.

7.1 Kompensimi dhe dyfishimi si marrëdhënie matematikore

THELLIM UNIVERSITAR · STUDIM PARAPRAK

Në $\mathbb{N}_0$ dyfishi i a është a + a = 2 × a; në detyrat e mbledhjes deri në 20 kërkohet $2a \le 20$. Për një shumë të afërt vlen

$$a + (a + k) = 2a + k \quad \text{ose} \quad (a + k) + a = 2(a + k) - k, \quad k \ge 0.$$

Në të dyja rrugët ndryshimi k përcaktohet nga të dhënat dhe nuk është domosdoshmërisht një.

Kompensimi në zbritje ka dy trajta që duhen dalluar. Le të jenë $a \ge b \ge 0$ dhe $t \ge 0$. Nëse ndryshon vetëm zbritësi, ndryshon rezultati dhe duhet korrigjuar:

$$a - b = (a - (b + t)) + t, \quad b + t \le a.$$

Nëse të dy termat ndryshojnë me të njëjtën sasi, ndryshesa ruhet:

$$a - b = (a + t) - (b + t).$$

Në trajtën e dytë, numri c që plotëson b + c = a plotëson edhe (b + t) + c = a + t.

Për 16 − 9, heqja e dhjetës dhe rikthimi i një njësie jep 16 − 10 + 1 = 7. Për 13 − 8, rritja e të dy termave me dy jep 15 − 10 = 5. Rrugët mbështeten në marrëdhënie të ndryshme: në të parën korrigjohet një heqje e tepërt, në të dytën ruhet ndryshesa. Për nxënësin ato paraqiten me heqje dhe rikthim, ose me dy gjatësi që rriten njësoj; trajtimi i përgjithshëm u drejtohet studentëve.

GABIM TIPIK · HIPOTEZA, JO DIAGNOZË E PRERË

Shkrimi 16 − 9 = 16 − 10 − 1 mund të tregojë se drejtimi i korrigjimit është mësuar përmendsh pa u kuptuar, ose se shenja e hapit të dytë është përsëritur nga hapi i parë. Detyra dalluese kërkon të krahasohet sa objekte hiqen kur hiqet nëntë dhe kur hiqet dhjetë. Nëse nxënësi e dallon se dhjeta heq një më shumë, por prapë heq edhe një, punohet lidhja ndërmjet shpjegimit dhe simbolit. Transferimi kontrollohet me 15 − 9 dhe 14 − 8.

Ushtrim 9. Krahasimi i strategjive të kompensimit (auditor)

Argumentoni 13 − 8 si 15 − 10 dhe si 13 − 10 + 2. Shpjegoni pse dy barazimet mbështeten në marrëdhënie të ndryshme.

Zgjidhje. Në 15 − 10 të dy termat janë rritur me dy dhe largësia ndërmjet tyre ruhet. Në 13 − 10 + 2 janë hequr dy njësi më shumë se tetë dhe më pas janë rikthyer. Të dyja rrugët japin 5, me kontroll 8 + 5 = 13. Zgjedhja didaktike mbështetet te paraqitja që nxënësi mund ta shpjegojë.

8 Zbritja deri në 20 dhe interpretimet e saj

8.1 Përkufizimi i kushtëzuar dhe veçantia e ndryshesës

Thellim universitar · studim paraprak

Në $\mathbb{N}_0$ zbritja përkufizohet për çiftet (a, b) me a ≥ b; është pra veprim i pjesshëm në $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, sepse jo çdo çift numrash natyrorë ka ndryshesë natyrore. Për çdo çift të lejuar ekziston një $c \in \mathbb{N}_0$ i vetëm i tillë që b + c = a. Në bashkësinë e numrave të plotë zbritja përkufizohet për çdo çift, por kjo shtrirje del jashtë objektivave të këtij leksioni për nxënësit.

Vërtetim. Në modelin kardinal merret bashkësia A me a elemente dhe nënbashkësia $B \subseteq A$ me b elemente. Bashkësitë B dhe A \ B janë të veçuara dhe bashkimi i tyre është A, prandaj |B| + |A \ B| = |A|; ndryshesa numëron pjesën e mbetur. Veçantia rrjedh nga ligji i thjeshtimit të mbledhjes: nga b + c = b + c′ del c = c′.

Zbritja nuk ka vetinë e ndërrimit. Të dyja shprehjet a − b dhe b − a janë njëkohësisht të përcaktuara në $\mathbb{N}_0$ vetëm kur a = b; për a > b, a − b është i përcaktuar, ndërsa b − a nuk është. Në bashkësinë $\mathbb{Z}$ të numrave të plotë, ku të dyja ekzistojnë gjithmonë, a − b = b − a vetëm për a = b, sepse b − a = −(a − b). Zbritja nuk ka as vetinë e shoqërimit:

$$(12 - 5) - 2 = 5, \quad 12 - (5 - 2) = 9,$$

ku të dyja anët janë të përcaktuara në $\mathbb{N}_0$. Një kundërshembull i tillë mjafton për të rrëzuar një pohim të përgjithshëm.

8.2 Interpretimi didaktik dhe diagnoza e veprimit

Parakushti është që nxënësi ta lidhë tërësinë me pjesët e saj. Heqja konkrete është vetëm një nga modelet; problemi «sa duhen te tetë për të arritur trembëdhjetë» zgjidhet natyrshëm me plotësim. Kufizimi te heqja si strategji e vetme do ta pengonte përdorimin e marrëdhënies së anasjelltë ndërmjet mbledhjes dhe zbritjes.

Shembull. Për 13 − 8 mësuesi paraqet një shirit për tërësinë 13 dhe veçon pjesën 8. Pyet çfarë përfaqëson pjesa e mbetur dhe cila mbledhje e rindërton tërësinë. Përgjigjja 8 + 5 = 13 lidhet me pjesët e shiritit dhe jo me një kontroll të mësuar përmendsh; ky trajtim mbështetet te lidhja ndërmjet koncepteve dhe procedurave sipas NRC (2001).

Gabim tipik · hipoteza, jo diagnozë e prerë

Nxënësi që thotë «zbrit gjithmonë më të voglin nga më i madhi» ka mësuar ndoshta një rregull për të marrë rezultat natyror, por ka humbur rendin e të dhënave në problem. Detyra dalluese: «Kishte pesë dhe duhet të japë shtatë; a i mjaftojnë?» Brenda fushës numerike të nxënësit përgjigjja është se nuk i mjaftojnë dhe i mungojnë dy, pa i ndërruar vendet e të dhënave. Transferimi kontrollohet me një situatë të re me tetë dhe dhjetë.

Ushtrim 10. Dallimi ndërmjet vetisë dhe shembullit (studim paraprak)

Një student pohon se zbritja është shoqëruese, sepse $(10 - 3) - 0 = 10 - (3 - 0)$. Vlerësoni argumentin.

Zgjidhje. Barazimi është i vërtetë për këtë rast, por nuk vërteton një veti të përgjithshme. Kundërshembulli $(12 - 5) - 2 = 5$ dhe $12 - (5 - 2) = 9$ e rrëzon përgjithësimin. Dallimi është thelbësor për mësuesin: një rast i vërtetë nuk vërteton një pohim për të gjithë numrat, ndërsa një kundërshembull i vetëm mjafton për ta rrëzuar.

8.3 Zbatim në përmbajtjen e leksionit

Për numrat natyrorë $a \geq b$, ndryshesa $a - b$ është numri c që plotëson $b + c = a$; përkufizimi e lidh zbritjen me mbledhjen. Për $a < b$ rezultati nuk është numër natyror dhe del jashtë fushës numerike të nxënësit; ky kufizim duhet të jetë i qartë në detyrat e propozuara.

> **IDE KYÇE**
>
> Zbritja ka tri interpretime kryesore. Heqje: nga 15 objekte hiqen 7 dhe mbeten 8. Krahasim: një grup ka 15 objekte dhe tjetri 7, prandaj i pari ka 8 më shumë. Plotësim: sa duhen shtuar te 7 për të arritur 15? Interpretimet janë matematikisht të lidhura, por kërkojnë paraqitje të ndryshme të situatës.

Në heqje, pjesa e hequr ndahet nga pjesa e mbetur; në krahasim, dy grupet përputhen një për një dhe numërohen objektet pa çift; në plotësim, numërohet largësia nga 7 te 15. Mësuesi zgjedh modelin që përputhet me marrëdhënien e problemit dhe më pas diskuton lidhjet ndërmjet modeleve.

Ushtrim 11 (auditor)

Shkruani tri situata për $14 - 6$ dhe zgjidhini.

Zgjidhje. Heqje: kishte 14 lapsa, dha 6 dhe i mbetën 8. Krahasim: Arta ka 14 lapsa dhe Beni 6; Arta ka 8 lapsa më shumë. Plotësim: Beni ka 6 lapsa dhe i duhen 14; duhet të marrë edhe 8. Në të tria situatat $6 + 8 = 14$ kontrollon ndryshesën, por në të parën kërkohet mbetja, në të dytën ndryshesa dhe në të tretën sasia që mungon; përgjigjja emërtohet në përputhje me këtë kuptim. Modelet përkatëse janë heqja me objekte, përputhja një për një dhe kërcimet në vijën numerike nga 6 te 14.

9 Zbritja përmes dhjetës dhe plotësimi përpara

Për $15 - 7$ mund të përdoret heqja përmes dhjetës: $7 = 5 + 2$, $15 - 5 = 10$ dhe $10 - 2 = 8$. Hiqen fillimisht pesë, pastaj dy, gjithsej shtatë. Në modelin me dhjetëshe, pasi hiqen pesë njëshet e lira, dhjetëshja zbërthehet për të hequr edhe dy.

Një strategji tjetër është plotësimi përpara: nga 7 te 10 duhen 3 dhe nga 10 te 15 duhen 5, prandaj ndryshesa është 3 + 5 = 8. Numërohen njësitë e largësisë, jo pozicioni fillestar. Kjo strategji është veçanërisht e natyrshme në problemet ku kërkohet sasia që mungon.

Të dy rrugët japin të njëjtën ndryshesë, sepse 7 + 8 = 15. Vija numerike e bën të dukshme këtë lidhje, me kusht që njësitë të jenë të barabarta. Vija numerike e hapur mund të paraqesë kërcime strategjike pa shënuar çdo njësi, kur madhësia e secilit kërcim shkruhet qartë; në këtë rast përfundimet nuk nxirren nga gjatësia e vizatimit.

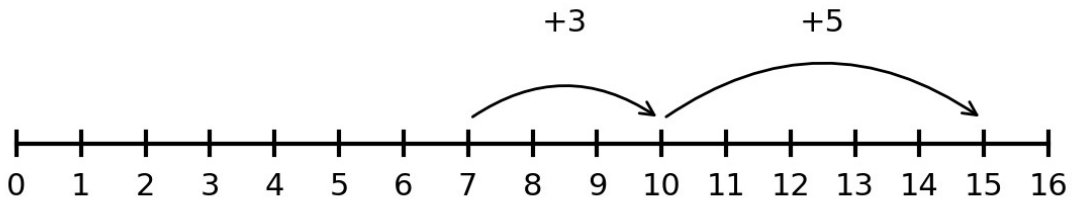


Figura 3. *Plotësimi nga 7 në 15. Ndryshesa është shuma e kërcimeve 3 dhe 5.*

Ushtrim 12 (auditor)

Zgjidhni 16 − 9 me dy strategji dhe shpjegoni pse 16 − 10 + 1 është i saktë.

Zgjidhje. Heqja përmes dhjetës jep

$$16 - 6 - 3 = 10 - 3 = 7.$$

Plotësimi jep një njësi nga 9 te 10 dhe gjashtë nga 10 te 16, gjithsej 1 + 6 = 7. Në 16 − 10 + 1 hiqet një njësi më shumë se nëntë dhe pastaj rikthehet; kontrolli 9 + 7 = 16 e vërteton rezultatin. Ky kompensim duhet dalluar nga shkrimi i pasaktë 16 − 9 = 16 − 10 − 1.

10 Barazimi dhe marrëdhëniet ndërmjet veprimeve

IDE KYÇE

Shenja «=» shpreh se dy anët kanë të njëjtën vlerë; ajo nuk tregon vendin ku shkruhet përgjigjja. Barazimet

$$8 + 5 = 13, \quad 13 = 8 + 5, \quad 8 + 5 = 10 + 3$$

janë të gjitha të vërteta. Në barazimin 8 + 5 = □ + 4 ana e majtë ka vlerën 13, prandaj në kuti shkruhet 9.

Për të kontrolluar kuptimin përdoren fjali të hapura dhe barazime me rend të ndryshëm. Te 7 + □ = 12 e panjohura është njëri i mbledhshëm, ndërsa te □ − 5 = 9 kërkohet sasia fillestare,

14. Zgjidhja përcaktohet nga marrëdhënia që shpreh barazimi, jo nga shenja e veprimit që shfaqet në të.

Për tri sasi të lidhura, si 8, 5 dhe 13, mund të shkruhen

$$8 + 5 = 13, \quad 5 + 8 = 13, \quad 13 - 8 = 5, \quad 13 - 5 = 8.$$

Kur dy të mbledhshmit janë të barabartë, disa prej këtyre shkrimeve përputhen, prandaj nuk ka arsye të kërkohen gjithmonë katër barazime të ndryshme.

Ushtrim 13 (auditor)

Analizoni shkrimin $8 + 5 = 13 - 3 = 10$ dhe korrigjojeni.

Zgjidhje. Vargu i barazimeve pohon se $8 + 5$, $13 - 3$ dhe 10 kanë të njëjtën vlerë, ndërsa vlerat e tyre janë 13, 10 dhe 10. Shkrimi korrigjohet me dy hapa të veçantë, $8 + 5 = 13$ dhe $13 - 3 = 10$, ose me shprehjen $(8 + 5) - 3 = 10$. Shpjegimi i kuptimit të barazimit është më i frytshëm se ndalimi mekanik i vargjeve, sepse vargu $8 + 5 = 10 + 3 = 13$ është i saktë.

10.1 Kuptimi marrëdhënor dhe detyrat dalluese

> **Thellim universitar · studim paraprak**
>
> Barazia numerike është marrëdhënie refleksive, simetrike dhe kaluese: a = a; nga a = b rrjedh b = a; nga a = b dhe b = c rrjedh a = c. Prandaj një varg barazimesh është i vlefshëm vetëm kur të gjitha shprehjet kanë të njëjtën vlerë. Simboli «=» nuk shpreh kalimin në kohë nga një veprim te tjetri.

McNeil et al. (2011) caktuan rastësisht 90 fëmijë 7–8 vjeç në tri kushte; pas tri seancave individuale me tutor, ushtrimi me forma jotradicionale të barazimeve (p.sh. $17 = 9 + 8$) e përmirësoi kuptimin e barasvlershmërisë matematikore më shumë se ushtrimi tradicional ose mungesa e ushtrimit. Detyrat $13 = 8 + 5$ dhe $8 + 5 = \square + 4$ përdoren këtu për të zgjeruar format e paraqitjes. Studimi u krye jashtë klasës, me një mostër nga SHBA, prandaj efekti në klasë verifikohet me vlerësim formues.

> **Gabim tipik · hipoteza, jo diagnozë e prerë**
>
> Për përgjigjen 13 te $8 + 5 = \square + 4$ formulohen dy hipoteza: kutia lexohet si vendi i rezultatit të anës së majtë, ose nxënësi ka vështirësi të gjejë të mbledhshmin që mungon. Detyrat dalluese janë $13 = \square + 4$ dhe $13 = 9 + 4$. Nëse barazimi i dytë refuzohet vetëm sepse rezultati ndodhet në të majtë, punohet kuptimi i barazimit si marrëdhënie; nëse pranohet, por nxënësi nuk e gjen nëntën, punohet marrëdhënia pjesë–tërësi. Transferimi kërkon $7 + 6 = 8 + \square$ dhe shpjegimin e vlerës 5.

Ushtrim 14. Barazimi pa llogaritje të plotë (auditor)

Plotësoni 8 + 7 = 9 + □ dhe argumentoni zgjidhjen pa i llogaritur më parë të dyja shumat.

Zgjidhje. I mbledhshmi i parë në anën e djathtë është rritur me një, prandaj i dyti duhet të zvogëlohet me një që shuma të mbetet e njëjtë; në kuti shkruhet 6. Kontrolli numerik jep 15 = 15. Argumenti mbështetet te marrëdhënia ndërmjet shprehjeve dhe e trajton shenjën «=» si barazi vlerash.

11 Problemet me tekst dhe vendi i së panjohurës

Një problem me mbledhje ose zbritje përshkruan marrëdhënie ndërmjet sasive. Në situatat e shtimit e panjohur mund të jetë sasia përfundimtare, ndryshimi ose sasia fillestare: «Kishte 8, mori 5; sa ka?», «Kishte 8, tani ka 13; sa mori?», «Mori 5, tani ka 13; sa kishte?» Të tria lidhen me 8 + 5 = 13 dhe nuk zgjidhen duke kërkuar një fjalë kyçe. Kjo tipologji e problemeve mbështetet te Carpenter et al. (2014).

Në bashkimin e pjesëve, 7 libra me tregime dhe 6 libra me figura formojnë 13 libra gjithsej, me kusht që grupet të jenë të veçuara. Në krahasim, 13 libra kundrejt 7 japin ndryshesën 6. Kur kategoritë mbivendosen, mbledhja e drejtpërdrejtë i numëron disa objekte dy herë; në problemet fillestare mësuesi e bën të qartë se grupet nuk mbivendosen.

Zgjidhja mund të udhëhiqet me pyetjet: Cilat sasi njihen? Çfarë kërkohet? Si lidhen sasitë? Si mund të paraqiten? Cili barazim e shpreh lidhjen? A e plotëson përgjigjja kushtin e problemit? Fjalët «mori», «mbetën» ose «më shumë» interpretohen brenda situatës: «Arta ka 12 dhe ka 4 më shumë se Beni» kërkon 12 − 4, megjithëse përmban shprehjen «më shumë».

Ushtrim 15 (auditor)

Beni kishte disa kartolina, mori edhe 6 dhe tani ka 15. Një nxënës shkruan 15 + 6 = 21. Si ndërhyhet?

Zgjidhje. Formulohen dy hipoteza: veprimi zgjidhet sipas fjalës «mori», ose nxënësi nuk e dallon sasinë fillestare nga ajo përfundimtare. Nxënësi ritregon ngjarjen dhe tregon në shirit cila sasi njihet. E panjohur është sasia fillestare, prandaj modeli është □ + 6 = 15 dhe □ = 9. Paraqitet një shirit prej 15 me një pjesë të njohur 6 dhe pjesën tjetër të panjohur; kontrolli është 9 + 6 = 15. Nëse Beni do të kishte pasur 21 dhe do të merrte edhe 6, do të kishte 27, jo 15. Ky kontroll me zëvendësim tregon pse zgjedhja e veprimit sipas fjalës «mori» nuk përputhet me situatën.

12 Konsolidimi i numrave deri në 100

STUDIM I PAVARUR · PËRSËRITJE E LEKSIONIT 2

Në vijim të Leksionit 2, konsolidimi nuk synon përsëritjen e gjithë lëndës, por verifikon nëse nxënësi e zbaton lidhjen dhjetëshe–njëshe përtej 20. Për numrat dyshifrorë

$$n = 10d + u, \quad 1 \le d \le 9, \quad 0 \le u \le 9;$$

numri 100 ka një qindëshe, zero dhjetëshe dhe zero njëshe.

Numri 47 përbëhet nga katër dhjetëshe dhe shtatë njëshe; paraqitje e barasvlershme është tri dhjetëshe dhe shtatëmbëdhjetë njëshe. Kjo e fundit nuk është paraqitja dhjetore, por është rigrupim i vlefshëm i sasisë dhe mund të përdoret për të shqyrtuar shkëmbimin e dhjetë njësheve me një dhjetëshe. Algoritmet e shkrimit nuk janë objektiv i kësaj njësie.

Krahasimi nis nga dhjetëshet. Për 47 dhe 52: pesë dhjetëshe japin të paktën 50, ndërsa katër dhjetëshe me jo më shumë se nëntë njëshe japin më së shumti 49; prandaj $47 < 52$. Kur dhjetëshet janë të njëjta krahasohen njëshet: 46 dhe 49 kanë nga katër dhjetëshe, por gjashtë njëshe janë më pak se nëntë.

Ushtrim 16 (studim i pavarur)

Krahasoni 39 dhe 41 dhe shpjegoni pse arsyetimi «9 është më i madh se 1» nuk mjafton.

Zgjidhje. $39 = 30 + 9$ dhe $41 = 40 + 1$. Tri dhjetëshe me më së shumti nëntë njëshe japin më së shumti 39, ndërsa katër dhjetëshe japin të paktën 40; prandaj $39 < 41$. Kur dhjetëshet ndryshojnë, shifrat e njësheve nuk krahasohen më vete. Me material, tri tufa dhe nëntë shkopinj nuk arrijnë katër tufa dhe një shkop; në vijën numerike 39 ndodhet majtas 41.

13 Modelet deri në 100 dhe kufijtë e tyre

STUDIM I PAVARUR

Tabela e njëqindëshes organizohet zakonisht në dhjetë rreshta me nga dhjetë numra, nga 1 deri në 100. Brenda rreshtit, zhvendosja një vend djathtas e rrit numrin me 1, ndërsa zhvendosja një vend poshtë në të njëjtën kolonë e rrit me 10. Në fund të rreshtit duhet sqaruar se pas 10 vjen 11 në fillim të rreshtit pasardhës; tabela nuk është vijë e vetme e drejtë.

Numri 34 lidhet me 33 dhe 35, si edhe me 24 dhe 44: horizontalisht ndryshon një njëshe, vertikalisht një dhjetëshe. Kjo mbështet dallimin ndërmjet shtimit të 1 dhe shtimit të 10. Për 90, shtimi i një dhjetësheje jep 100, pra dhjetë dhjetëshe formojnë një qindëshe; kjo nuk shpjegohet si ndërrim i shifrës së parë.

Në vijën numerike pozicioni dhe largësia japin informacion tjetër: 60 ndodhet ndërmjet 50 dhe 70, në largësi të barabartë prej tyre. Nga një skicë me shkallë të pabarabartë nuk nxirren përfundime për largësitë. Tabela e njëqindëshes, materiali dhjetor dhe vija numerike plotësojnë njëri-tjetrin, sepse nxjerrin në pah marrëdhënie të ndryshme.

Ushtrim 17 (studim i pavarur)

Nxënësi thotë se 58 + 10 = 59. Si dallohet ngatërrimi i fjalës «dhjetë» nga një gabim llogaritjeje?

Zgjidhje. Nxënësi paraqet 58 dhe shton një tufë prej dhjetë objektesh. Nëse rezultati me material është 68, por shkrimi mbetet 59, punohet lidhja e materialit me shkrimin dhe me gjuhën; nëse shton vetëm një objekt, punohet dallimi ndërmjet njëshes dhe dhjetëshes. Në tabelë 59 ndodhet një vend djathtas 58, ndërsa 68 një rresht poshtë. Përfundimi mbështetet te veprimi i nxënësit, jo te një përgjigje e vetme.

14 Nga mbledhja te grupet e barabarta

Hyrja në shumëzim nis me organizimin e sasive në grupe të barabarta. Tri kuti me nga katër lapsa përmbajnë 4 + 4 + 4 = 12 lapsa. Informacioni strukturor është numri i grupeve (tre) dhe sasia në secilin grup (katër). Përpara futjes së simbolit ×, nxënësi duhet t'i dallojë këto dy nivele.

IDE KYÇE

Në këtë material përdoret marrëveshja m × n = m grupe me nga n objekte, pra

$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12.$$

Rendi i leximit të faktorëve deklarohet, sepse tekste dhe praktika gjuhësore të ndryshme mund të përdorin rend tjetër; para përdorimit ai krahasohet me tekstin shkollor të klasës, ku mund të përdoret edhe shenja «·». Një shkrim nuk vlerësohet i gabuar vetëm për shkak të një marrëveshjeje të pashprehur; vlerësohen shpjegimi i nxënësit dhe qëndrueshmëria e interpretimit. Formulimi «3 herë 4 do të thotë tri katërsha» e lidh shenjën me njësimin e grupit; në një studim ndërhyrës në klasën e dytë, mbështetja gjuhësore me formulime të tilla dha rezultate më të mira në shumëzim, edhe rreth tre muaj pas ndërhyrjes (Götze & Baiker, 2021).

Dy grupe me nga pesë dhe tri grupe me nga pesë kanë të njëjtën madhësi grupi, por numër të ndryshëm grupesh. Tri grupe me nga dy dhe tri grupe me nga pesë kanë të njëjtin numër grupesh, por madhësi të ndryshme. Këto krahasime e qartësojnë se çfarë shpreh secili faktor.

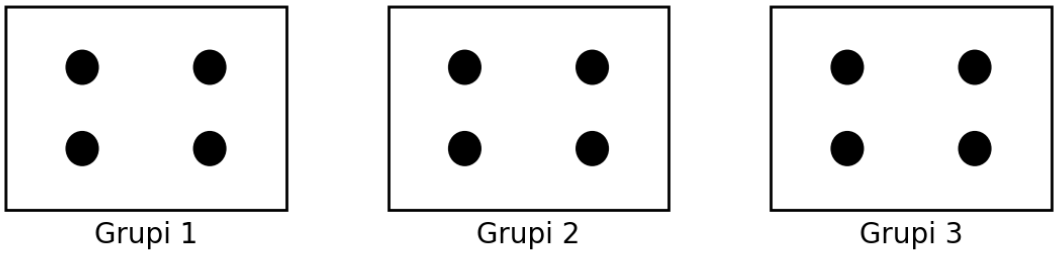


Figura 4. *Tri grupe me nga katër objekte: numërohen tri grupe dhe dymbëdhjetë objekte.*

Ushtrim 18 (auditor)

Një figurë ka grupe me 3, 4 dhe 3 objekte. A paraqet ajo 3 × 3? Si mund të ndryshohet?

Zgjidhje. Jo: grupet nuk janë të barabarta dhe totali është 10, jo 9. Nëse hiqet një objekt nga grupi me katër, formohen tri grupe me nga tre dhe totali bëhet 9. Pa hequr objekte, dhjetë objektet mund të riorganizohen në dy grupe me nga pesë. Prania e disa grupeve në figurë nuk mjafton që situata të shprehet me shumëzim.

15 Përkufizimi i shumëzimit në numrat natyrorë

15.1 Përkufizimi rekursiv dhe modeli kardinal

Thellim universitar · studim paraprak

Sipas marrëveshjes së këtij leksioni, shumëzimi është pasqyrimi $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ i përkufizuar me

$$0 \times n = 0, \quad (m+1) \times n = m \times n + n.$$

Përkufizimi shpreh se shtimi i një grupi tjetër me madhësi n e rrit totalin me n; për m > 0 ai jep shumën e m të mbledhshmëve të barabartë me n. Rasti me zero përfshihet në përkufizim.

Në modelin e bashkësive, nëse kemi m grupe të veçuara dhe secili ka n elemente, bashkimi i tyre ka m × n elemente. Një formulim tjetër është

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|;$$

këtu × në anën e majtë shënon prodhimin kartezian të bashkësive, ndërsa · shumëzimin e numrave. Bashkësia A × B e çifteve të renditura është bashkimi i m bashkësive të veçuara {a} × B, secila me n elemente, prandaj ky model përputhet me modelin e grupeve. Prodhimi kartezian është zgjerim teorik për studentin dhe nuk kërkohet nga nxënësi fillor.

Vërtetim. Për m = 0 nuk ka grupe, bashkimi është bosh dhe ka 0 = 0 × n elemente. Kur të gjitha grupet kanë n elemente dhe janë të veçuara, asnjë objekt nuk numërohet dy herë, prandaj kalimi nga m te m + 1 grupe jep m × n + n. Kjo është madhësia që mësuesi kontrollon në detyrat ku shtohet ose hiqet një grup. Nëse grupet kanë madhësi të ndryshme, modeli i një prodhimi të vetëm nuk zbatohet drejtpërdrejt.

15.2 Koordinimi i numrit të grupeve me madhësinë e grupit

Ide kyçe

Dy sasitë duhet të bashkërendohen: m numëron njësitë e përbëra, ndërsa n njësitë fillestare brenda secilës. Nxënësi mund ta gjejë totalin duke numëruar të gjitha objektet, pa i bashkërenduar ende faktorët; prandaj pyetja «sa gjithsej?» plotësohet me pyetjet «sa grupe?» dhe «sa në secilin?». Leximi i totalit nuk e zëvendëson leximin e strukturës.

Shembull. Te tri rreshta me nga gjashtë karrige, 3 numëron rreshtat, 6 karriget në secilin rresht dhe 18 karriget gjithsej. Kur shtohet një rresht me të njëjtën madhësi, shtohen gjashtë karrige; kur shtohet një karrige në secilin nga tri rreshtat, shtohen tri karrige. Dy ndryshimet ndihmojnë të dallohen rolet e faktorëve. Totali 24 në rastin e parë i shërben diskutimit me studentët; nga nxënësi mund të kërkohet vetëm sasia e shtuar.

> **GABIM TIPIK · HIPOTEZA, JO DIAGNOZË E PRERË**
> Për 3 × 4 = 7 formulohen dy hipoteza: ngatërrimi me mbledhjen, ose leximi i «tri grupeve» dhe «katër objekteve» si dy sasi të veçanta. Detyra dalluese kërkon ndërtimin e tri grupeve me nga katër, pa përdorur simbolin. Nëse nxënësi ndërton saktë dymbëdhjetë objekte, punohet lidhja me shenjën ×; nëse ndërton tre dhe katër objekte, punohet marrëdhënia «nga … në secilin». Transferimi përdor katër grupe me nga dy dhe dy grupe me nga katër, me përshkrim të secilit faktor.

15.3 Kufijtë e mbledhjes së përsëritur

Për numrat natyrorë mbledhja e përsëritur jep përkufizim të vlefshëm të shumëzimit, por modele të ndryshme nxjerrin në pah veti të ndryshme: rregullimi drejtkëndor nxjerr në pah ndërrimin dhe shpërndarjen, ndërsa prodhimi kartezian numërimin e kombinimeve. Mësuesi dallon modelin matematikor nga rruga e prezantimit fillestar.

Kur faktori i parë, numri i grupeve, nuk është numër natyror, p.sh. 1/2 × 6, shprehja «gjysmë grupi» nuk shpjegohet si numër përsëritjesh; përdoret më vonë marrja e gjysmës së një sasie. Kur vetëm faktori i dytë është thyesë, p.sh. 3 × 1/2 = 1/2 + 1/2 + 1/2, mbledhja e përsëritur mbetet e zbatueshme. Për thyesat në përgjithësi dhe për numrat realë nevojiten modele dhe përkufizime të tjera. Kjo e përcakton fushën e përkufizimit në $\mathbb{N}_0$, pa e cenuar vlefshmërinë e tij.

Ushtrim 19. Dallimi ndërmjet ndryshimit shtues dhe shumëzues (studim i pavarur)

Në tri grupe me nga katër objekte shtohet nga një objekt në secilin grup. Shkruani ndryshimin e totalit dhe argumentoni pse ai nuk është një.

Zgjidhje. Fillimisht ka 3 × 4 = 12 objekte, pastaj 3 × 5 = 15. Shtohen tri objekte, sepse ndryshimi prej një njësie ndodh në secilin nga tri grupet:

$$3 \times (4 + 1) = 3 \times 4 + 3 \times 1.$$

Detyra kontrollon bashkërendimin e faktorëve dhe përgatit vetinë e shpërndarjes.

15.4 Zbatim në përmbajtjen e leksionit

Për m natyror pozitiv, prodhimi m × n është shuma e m të mbledhshmëve, secili i barabartë me n; për m = 0 merret 0 × n = 0. Ky përkufizim është i përshtatshëm për numrat natyrorë dhe

për modelin fillestar të grupeve të barabarta; për lloje të tjera numrash ai zgjerohet me përkufizime të përshtatura.

Në m × n, m dhe n quhen faktorë, ndërsa rezultati quhet prodhim. Në modelin e përdorur, m është numri i grupeve dhe n madhësia e secilit grup. Për 4 × 3 kemi katër grupe me nga tre: 3 + 3 + 3 + 3 = 12. Shuma 4 + 3 = 7 i përket një veprimi tjetër: ajo bashkon një sasi prej katër me një sasi prej tre.

Në problemet me tekst njësitë e sasive duhet të mbeten të dukshme: tri kuti me nga katër lapsa japin dymbëdhjetë lapsa, ku tre numëron kutitë dhe katër lapsat në secilën kuti. Kjo analizë e njësive e ndihmon mësuesin të shmangë shpjegimet që vetëm vendosin një shenjë veprimi ndërmjet numrave të problemit.

Ushtrim 20 (auditor)

Shpjegoni 4 × 2 dhe dallojeni nga 4 + 2.

Zgjidhje. Katër palë doreza kanë nga dy doreza secila:

$$4 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

doreza. Katër doreza dhe dy doreza të tjera japin 4 + 2 = 6 doreza. Dallimi qëndron në organizimin e sasisë: situata e parë ka katër grupe me nga dy, e dyta dy grupe me madhësi katër dhe dy. Nxënësi ndërton të dyja situatat.

16 Numërimi me hapa dhe koordinimi i dy sasive

Numërimi «4, 8, 12» mund të përdoret për tri grupe me nga katër. Ai e shpejton gjetjen e totalit kur nxënësi ndjek numrin e grupeve të numëruara. Recitimi i shumëfishave, i marrë veçmas, nuk dëshmon kuptimin e shumëzimit: nxënësi duhet ta lidhë 4 me një grup, 8 me dy grupe dhe 12 me tri.

Mësuesi mund të shënojë një grup sa herë që thuhet një total i ri; një laps pranë çdo grupi, një shenjë në tabelë ose një gjest e ndihmojnë bashkërendimin e dy numërimeve. Kjo mbështetje e bën të dukshme marrëdhënien dhe nuk kthehet në procedurë të detyrueshme për çdo nxënës.

Për 5 × 2 numërimi i totalit është 2, 4, 6, 8, 10: pesë terma me hap dy. Në vijën numerike kjo paraqitet me pesë kërcime me gjatësi dy, duke nisur nga zero. Zero është pozicioni fillestar dhe nuk numërohet si grup.

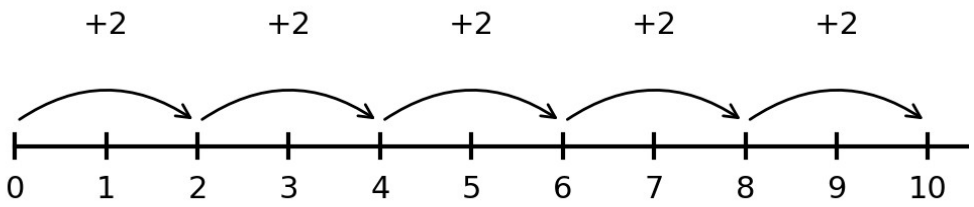


Figura 5. *Pesë kërcime me nga dy njësi nga zero japin 5 × 2 = 10.*

Ushtrim 21 (auditor)

Për 3 × 4 nxënësi kryen kërcimet 0, 4, 8 dhe ndalet te 8. Çfarë ka numëruar?

Zgjidhje. Nxënësi ka numëruar tri pozicione, duke përfshirë zeron, por vetëm dy kërcime. Prodhimi kërkon tri kërcime: nga 0 te 4, nga 4 te 8 dhe nga 8 te 12. Numërohen kërcimet, jo etiketat e pikave. Kontrolli me tri grupe prej katër objektesh e lidh çdo kërcim me një grup; pastaj nxënësi shpjegon pse zero nuk përfaqëson një grup me katër objekte.

17 Rreshtat, kolonat dhe modeli drejtkëndor

IDE KYÇE

Një rregullim drejtkëndor me m rreshta dhe n objekte në çdo rresht përmban m × n objekte. Secila kolonë ka m objekte dhe kolonat janë n, prandaj i njëjti total shprehet edhe me n × m. Kalimi nga leximi sipas rreshtave te leximi sipas kolonave është argument pamor për vetinë e ndërrimit. Në një ndërhyrje katërjavore me probleme në kontekst dhe me rregullime drejtkëndore, nxënësit e klasave 1–3 përmirësuan arsyetimin shumëzues (Askew et al., 2019).

Për tri rreshta me nga katër pika, leximi sipas rreshtave jep 4 + 4 + 4 = 12, ndërsa leximi sipas kolonave 3 + 3 + 3 + 3 = 12; në të dyja leximet secila pikë numërohet një herë. Mësuesi pyet cilat grupe numërohen dhe sa pika ka secili grup.

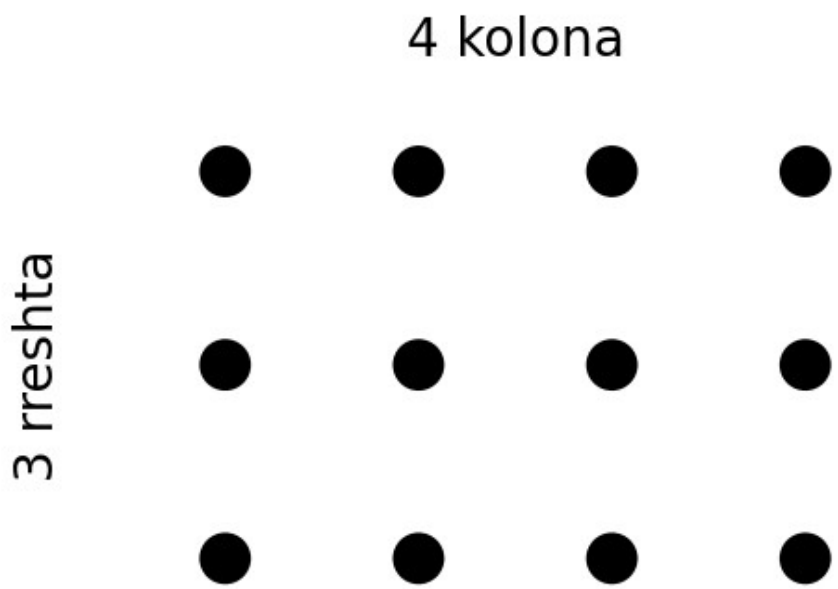


Figura 6. *I njëjti rregullim përmban tri rreshta me nga katër pika dhe katër kolona me nga tri pika.*

Modeli me katrorë njësi mund të lidhet me syprinën e drejtkëndëshit (Manes, 2018). Në këtë hyrje mjafton numërimi i katrorëve të barabartë; formula e syprinës si marrëdhënie e përgjithshme kërkon trajtim të veçantë të matjes. Numri i pikave nuk duhet ngatërruar me gjatësinë e brinjës në njësi fizike.

Ushtrim 22 (auditor)

Shpjegoni $3 \times 5 = 5 \times 3$ me një figurë dhe tregoni çfarë mbetet e pandryshuar.

Zgjidhje. Vizatohen tri rreshta me nga pesë pika: sipas rreshtave dallohen tri grupe me nga pesë, sipas kolonave pesë grupe me nga tre. Të dy leximet numërojnë të njëjtat 15 pika pa përsëritje: totali mbetet i njëjtë, ndryshon mënyra e grupimit. Në situata konkrete, tri kuti me nga pesë lapsa dhe pesë kuti me nga tre lapsa janë organizime të ndryshme me të njëjtin total.

18 Vetitë e shumëzimit dhe argumentimi për mësuesin

Thellim universitar · studim paraprak

Vetia e ndërrimit shprehet me

$$m \times n = n \times m.$$

Për numrat natyrorë pozitivë ajo argumentohet me modelin drejtkëndor. Për zeron, $0 \times n = 0$ jepet nga përkufizimi, ndërsa $n \times 0 = 0$ vërtetohet me induksion:

$$0 \times 0 = 0, \quad (m + 1) \times 0 = m \times 0 + 0 = 0.$$

Ndërrimi i faktorëve e ruan prodhimin numerik, por jo domosdoshmërisht rolet e sasive në situatë. Argumenti drejtkëndor është paraqitja pamore e korrespondencës një për një $(i, j) \to (j, i)$ ndërmjet $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ dhe $\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$; prandaj për studentin ai është vërtetim, jo vetëm ilustrim.

Vetia e shoqërimit shprehet me

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

Për ta ilustruar, merren a kuti të mëdha, secila me b kuti të vogla, dhe secila kuti e vogël me c objekte. Totali mund të gjendet duke numëruar fillimisht kutitë e vogla ose objektet në çdo kuti të madhe. Për nxënësin kjo është ide e mëvonshme; studenti duhet ta njohë që t'i shpjegojë marrëdhëniet pa rregulla të paargumentuara.

Vetia e shpërndarjes shprehet me

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

Në a rreshta me b + c objekte, secili rresht ndahet në një pjesë me b dhe një me c objekte. Për 3×6, zbërthimi $6 = 4 + 2$ jep

$$3 \times 6 = 3 \times 4 + 3 \times 2 = 12 + 6 = 18.$$

Pjesët janë të veçuara dhe së bashku e mbulojnë figurën fillestare. Kjo marrëdhënie e lidh shumëzimin me mbledhjen dhe përgatit strategjitë e mëvonshme të llogaritjes.

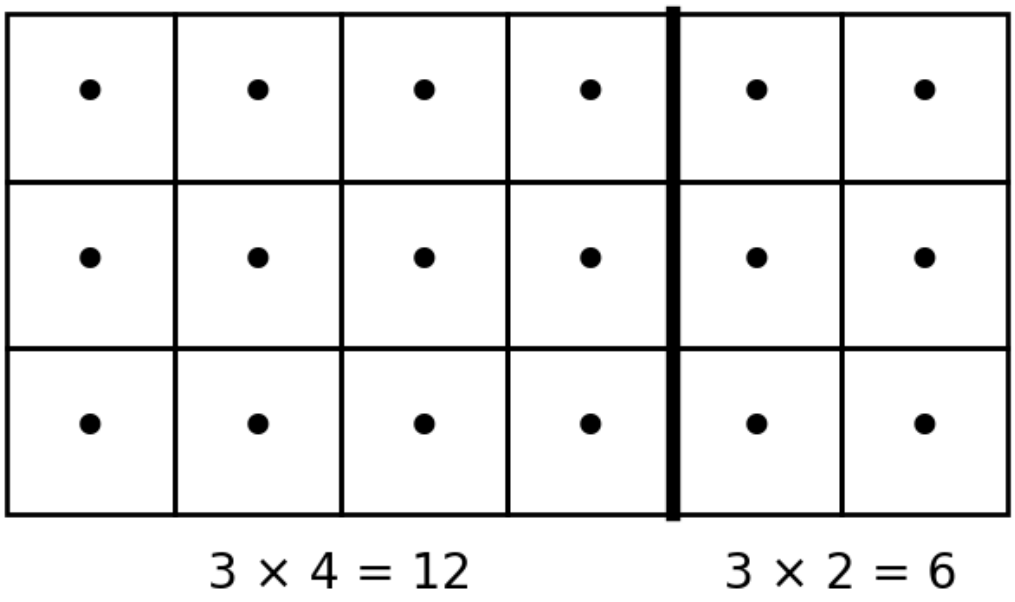


Figura 7. *Tri rreshta me nga gjashtë objekte ndahen në dy pjesë me gjerësi katër dhe dy.*

Ushtrim 23 (auditor)

Një student shkruan $3 \times (4 + 2) = 3 \times 4 + 2 = 14$. Jepni argumentin që e rrëzon.

Zgjidhje. Secili nga tri rreshtat ka katër dhe dy objekte, prandaj pjesa e dytë përmban tri grupe me nga dy, pra gjashtë objekte, jo dy. Rrjedhimisht

$$3 \times (4 + 2) = 12 + 6 = 18,$$

që kontrollohet edhe me $6 + 6 + 6$. Vetia e shpërndarjes përshkruan ndarjen e secilit grup, jo një rregull grafik për shtimin e shenjave.

18.1 Struktura shtuese dhe struktura shumëzuese

> **IDE KYÇE**
> Në strukturën shtuese, dy sasi me të njëjtën njësi lidhen me anë të një ndryshimi ose të një totali. Në strukturën e grupeve të barabarta, totali përcaktohet nga numri i grupeve dhe sasia në secilin grup. Te $4 + 3$, katër objekte dhe tri objekte janë dy pjesë të totalit; te 4×3, katër numëron grupe dhe tre objektet në secilin. Prania e të njëjtëve numra në dy situata nuk tregon se ato kanë të njëjtën strukturë.

Në krahasimin shtues Arta ka tre më shumë se Beni, ndërsa në krahasimin shumëzues Arta ka tri herë aq sa Beni. Nëse Beni ka katër, Arta ka përkatësisht shtatë dhe dymbëdhjetë; në rastin e dytë sasia e Benit shërben si sasi reference. Ky dallim e ndihmon studentin në përzgjedhjen e problemeve, pa e zgjeruar objektivin fillestar për nxënësin.

DËSHMIA QË KËRKOHET

Paraqitja me dy shirita e bën dallimin të dukshëm: te «tre më shumë» njëri shirit ka një pjesë shtesë prej tre, ndërsa te «tri herë aq» shiriti i madh përbëhet nga tri pjesë të barabarta me shiritin e vogël. Dëshmia e kuptimit është që nxënësi të emërtojë çfarë numëron secila sasi dhe të shpjegojë pse përdor veprimin përkatës.

18.2 Kushtet e argumentimit me modelet

Argumenti drejtkëndor për ndërrimin kërkon rreshta dhe kolona të plota; një figurë me vende që mungojnë nuk përfaqëson drejtpërdrejt m × n, përveç rastit kur pjesët që mungojnë trajtohen veçmas. Argumenti i shpërndarjes kërkon që pjesët të jenë të veçuara dhe ta mbulojnë të gjithë figurën. Këto kushte e dallojnë argumentimin nga njohja e një pamjeje të zakonshme (krh. Manes, 2018).

GABIM TIPIK · HIPOTEZA, JO DIAGNOZË E PRERË

Për 3 × (4 + 2) = 3 × 4 + 2 formulohen dy hipoteza: shtesa nuk shpërndahet në secilin grup, ose ka gabim në kalimin te shkrimi simbolik. Në detyrën dalluese rrethohen dy objektet shtesë në secilin rresht. Nëse nxënësi dallon gjashtë objekte, punohet shkrimi 3 × 2; nëse dallon vetëm dy, punohet përsëritja e shtesës në të gjitha rreshtat. Transferimi përdor 2 × (3 + 2), me figurë dhe shpjegim.

Ushtrim 24. Krahasimi i dy marrëdhënieve (studim i pavarur)

Beni ka pesë libra. Arta ka dy më shumë se Beni, ndërsa Drita ka dy herë aq sa Beni. Shkruani barazimet dhe dalloni rolin e numrit dy.

Zgjidhje. Arta ka 5 + 2 = 7 libra: dy emërton libra shtesë. Drita ka 2 × 5 = 10 libra: dy numëron përsëritjet e sasisë reference prej pesë librash. Në të dyja rastet rezultati shprehet në libra, por numri dy ka rol strukturor të ndryshëm; prandaj «më shumë» dhe «herë aq» nuk janë të barasvlershme.

19 Shumëzimi me zero dhe me një

Për m natyror, m × 0 = 0, sepse çdo grup përmban zero objekte, ndërsa 0 × m = 0, sepse nuk ka asnjë grup. Dy interpretime të ndryshme japin të njëjtin prodhim. Tri grupe të zbrazëta mund të paraqiten me tri enë: numri i enëve është tre, ndërsa numri i objekteve brenda tyre është zero.

Për m × 1, secili nga m grupet ka një objekt, prandaj prodhimi është m; për 1 × m ka një grup me m objekte. Numri 1 është element neutral i shumëzimit, ndërsa 0 është element neutral i mbledhjes, por jo i shumëzimit. Ky dallim pengon kalimin e gabuar të rregullit a + 0 = a te a × 0.

Pohimi «shumëzimi e rrit gjithmonë numrin» është i pasaktë edhe në numrat natyrorë: shumëzimi me 1 e ruan numrin, ndërsa shumëzimi me 0 jep zero. Për a pozitiv dhe b natyror më të madh se 1 vlen $a \times b > a$; pohimi i saktë është pra i kushtëzuar. Përgjithësimet e pakushtëzuara do ta pengonin më vonë kuptimin e thyesave.

Ushtrim 25 (auditor)

Nxënësi thotë $5 \times 0 = 5$, «sepse zero nuk ndryshon gjë». Si përgjigjet mësuesi?

Zgjidhje. Nxënësit i kërkohet të tregojë pesë grupe pa asnjë objekt brenda: ka pesë enë, por zero objekte, prandaj $5 \times 0 = 0$. Krahasimi me $5 + 0$, ku pesë objekte dhe asnjë objekt tjetër japin pesë, e shpjegon dallimin me anë të kuptimit të veprimeve. Detyrat 5×1 dhe 1×5 kontrollojnë veçmas nëse nxënësi e kupton njëshin si madhësi grupi dhe si numër grupesh.

20 Përzgjedhja e problemeve për hyrjen në shumëzim

STUDIM I PAVARUR

Problemet fillestare duhet të kenë grupe të barabarta lehtësisht të dallueshme: rreshta karrigesh, palë objektesh, kuti me të njëjtën përmbajtje. Mësuesi e bën të qartë nëse çdo grup ka të njëjtën sasi: informacioni «tri kuti dhe katër lapsa» nuk mjafton pa marrëdhënien «katër lapsa në secilën kuti».

Pas grupeve të barabarta përdoren edhe rregullimet drejtkëndore dhe kërcimet e barabarta, që hyrja të mos kufizohet te një lloj i vetëm situate. Krahasimi shumëzues («tri herë aq») kërkon kuptimin e një sasie reference dhe është më i vështirë se krahasimi shtues («tre më shumë»); në këtë leksion ai trajtohet si dallim për studentin dhe jo si objektiv kryesor për nxënësin.

Disa probleme kanë të njëjtët numra, por veprime të ndryshme: te $3 + 4$ bashkohen dy sasi, te 3×4 katër përsëritet tri herë, ndërsa te $12 - 4$ kërkohet mbetja ose ndryshesa. Problemet përzgjidhen në mënyrë që nxënësi të dallojë strukturën, jo vetëm të veprojë me dy numrat e dukshëm.

Ushtrim 26 (studim i pavarur)

Shkruani një problem për 3×6 dhe një për $3 + 6$. Jepni edhe një problem ku të dhënat nuk mjaftojnë për shumëzim.

Zgjidhje. Tri rreshta me nga gjashtë karrige japin 18 karrige; tri karrige në njërën anë dhe gjashtë në tjetrën japin nëntë karrige. Pohimi «ka tri kuti dhe në njërën ka gjashtë lapsa» nuk e përcakton totalin, sepse përmbajtja e dy kutive të tjera nuk dihet. Barazia e grupeve nuk supozohet kur nuk del nga teksti ose nga figura.

21 Baza kërkimore dhe kufijtë e zbatimit

STUDIM I PAVARUR

Njohuria matematikore për mësimdhënie përfshin më shumë se gjetjen e rezultatit: mësuesi analizon shpjegime, zgjedh paraqitje dhe vlerëson përgjithësime (Ball et al., 2008). Në këtë leksion kjo kërkesë konkretizohet, p.sh., me dallimin e 3 × 4 nga 3 + 4 dhe me analizën e asaj që shpreh secili faktor.

NRC (2001) e përshkruan aftësinë matematikore me pesë përbërës të ndërlidhur: kuptimin konceptual, rrjedhshmërinë procedurale, kompetencën strategjike, arsyetimin përshtatës dhe prirjen produktive. Për 8 + 5, lidhja me dhjetën i shërben kuptimit, llogaritja e saktë rrjedhshmërisë dhe shpjegimi i zbërthimit 5 = 2 + 3 arsyetimit. Asnjë detyrë e vetme nuk i vlerëson të gjithë përbërësit.

Carpenter et al. (2014) e mbështesin mësimdhënien te njohja e mënyrës si mendojnë fëmijët. Për këtë leksion, pasoja didaktike është që strategjitë e nxënësit të shqyrtohen përpara se të propozohet një rrugë tjetër. Rastet dhe dialogët e leksionit janë hartuar për formimin e mësuesve; nuk janë transkripte kërkimore dhe nuk janë provuar empirikisht.

Udhëzuesi praktik i What Works Clearinghouse për ndërhyrjet në matematikë në arsimin fillor (Fuchs et al., 2021) jep gjashtë rekomandime: mësimdhënie sistematike; gjuhë matematikore të qartë dhe të saktë; një grup të përzgjedhur paraqitjesh konkrete dhe gjysmëkonkrete; përdorimin e vijës numerike; punë të qëllimshme me problemet me tekst; veprimtari të rregullta me kohë të kufizuar për rrjedhshmërinë. Udhëzuesi u drejtohet nxënësve me vështirësi në matematikë; rekomandimet e tij nuk dëshmojnë efektivitetin e modeleve të orëve të këtij leksioni. Për rekomandimin e fundit, McNeil et al. (2025) shtojnë një kusht: ushtrimi me kohë të kufizuar futet vetëm pasi nxënësi ka treguar saktësi.

Materialet konkrete duhet të lidhen shprehimisht me kuptimin matematikor (Uttal et al., 1997). Meta-analiza e Carbonneau et al. (2013) tregon përfitime që ndryshojnë sipas rezultateve të matura dhe kushteve të mësimdhënies. Rrjedhimisht përdorimi i shkopinjve ose i kornizave nuk e siguron vetvetiu të nxënit; mësuesi kontrollon nëse nxënësi e shpjegon marrëdhënien dhe e përdor në një paraqitje tjetër.

Nga kjo rrjedh një përfundim pedagogjik i kushtëzuar: ndërtohen lidhje të shprehura ndërmjet paraqitjeve, mblidhen dëshmi nga puna e nxënësit dhe ndërhyrja përshtatet sipas tyre. Për studentët, qëllimi është argumentimi i zgjedhjeve mësimore, jo mësimi përmendsh i një liste metodash.

22 Raste profesionale dhe ndërhyrje të argumentuara

Rasti A. Nxënësi gjen 8 + 7 = 15 duke numëruar të gjitha objektet. Mësuesi i parë kërkon që materiali të hiqet menjëherë; i dyti pyet nëse një pjesë e shtatës mund ta plotësojë tetën në dhjetë. Përgjigjja dhe strategjia janë të sakta; ndërhyrja e dytë ndërton mbi to, duke kërkuar

zbërthimin 7 = 2 + 5. Materiali pakësohet kur nxënësi e shpjegon lidhjen dhe e zbaton në një rast tjetër, p.sh. 9 + 5; heqja e menjëhershme e tij nuk krijon strategjinë mendore.

Rasti B. Nxënësi shkruan 14 − 6 = 12: heq katër për të arritur te dhjetë dhe pastaj shton dy. Mësuesi i parë jep vetëm rezultatin 8; i dyti kërkon që objektet e hequra të shënohen në dy etapa. Zbërthimi 6 = 4 + 2 është i saktë, por në hapin e dytë drejtimi i veprimit është përmbysur. Modeli 14 − 4 − 2 = 8 e lidh secilin hap me heqjen; kontrolli 6 + 8 = 14 dhe detyra 13 − 5 tregojnë nëse kuptimi është korrigjuar.

Rasti C. Nxënësi shkruan 3 × 4 = 7. Mësuesi i parë kërkon mësimin e tabelës së shumëzimit; i dyti kërkon tri grupe me nga katër dhe një figurë për 3 + 4. Gabimi mund të tregojë ngatërrim të veprimeve, dhe dy figurat e bëjnë të dukshëm dallimin e strukturës. Nëse nxënësi e ndërton saktë figurën, por e numëron gabim, ndërhyrja zhvendoset te numërimi; përgjigjja «shtatë» nuk ka gjithmonë të njëjtin shkak.

Rasti D. Nxënësi shkruan 4 × 3 për tri grupe me nga katër dhe shpjegon: «katër merret tri herë». Ai e ka kuptuar totalin dhe marrëdhënien, por përdor rend tjetër të faktorëve. Mësuesi e dëgjon shpjegimin, deklaron marrëveshjen e klasës dhe kërkon që shkrimi të lidhet me të; kuptimi matematikor nuk mohohet për shkak të rendit. Një detyrë me numër të panjohur grupesh i kontrollon rolet e sasive më mirë se një prodhim i vetëm.

Rasti E. Në një grup shumëgjuhësh, nxënësi e paraqet saktë 12 + 5, por e ka të vështirë ta shpjegojë në shqip. Përdoren shpjegimi me gjeste, vizatimi dhe fjali të nisura, si «një dhjetëshe dhe … njëshe»; kërkesa gjuhësore rritet gradualisht. Kuptimi matematikor dhe zotërimi i gjuhës vlerësohen si dimensione të lidhura, por të dallueshme. Rasti i përgjigjet kontekstit të mësimit në shqip në Podgoricë; nuk mbështetet në të dhëna të mbledhura në një klasë konkrete.

Ushtrim 27 (studim i pavarur)

Zgjidhni rastin B ose rastin D dhe propozoni një detyrë pasuese me numra të tjerë.

Zgjidhje. Për rastin B jepet 15 − 7, me kërkesën që të shënohen dy etapat e heqjes: 15 − 5 − 2 = 8. Shkrimi 15 − 5 + 2 = 12 do të tregonte se drejtimi i hapit të dytë mbetet i përmbysur; kontrolli 7 + 8 = 15 e lidh rezultatin me mbledhjen. Për rastin D jepet «katër kuti me nga tre lapsa» dhe kërkohet shkrimi sipas marrëveshjes së klasës dhe shpjegimi i secilit faktor; shkrimi 4 × 3 me shpjegimin «katër kuti, tre lapsa në secilën» tregon transferim. Një ushtrim i vetëm me të njëjtët numra pas ndërhyrjes mat vetëm kujtesën e rezultatit të sapodhënë.

23 Model ore për mbledhjen përmes dhjetës

Objektivi i orës 45-minutëshe është që nxënësi të zgjidhë një mbledhje deri në 20 përmes dhjetës dhe të shpjegojë zbërthimin e të mbledhshmit. Materialet: objekte numërimi, dy korniza të dhjetës dhe fletë për shkrimin e barazimeve. Modeli është propozim; kohët përshtaten sipas diagnozës.

Minutat 0–5. Jepet 8 + 5 pa u kërkuar një metodë e caktuar. Mësuesi mbledh dy ose tri përgjigje dhe shënon strategjitë. Nëse zbërthimet e dhjetës mungojnë, përpara shpjegimit përdoret 8 + □ = 10; nxënësit që i zotërojnë krahasojnë dy rrugë.

Minutat 5–15. Ndërtohen tetë dhe pesë objekte; dy nga pesë zhvendosen për të plotësuar dhjetën. Mësuesi e lidh lëvizjen me 5 = 2 + 3 dhe 8 + 5 = 10 + 3 dhe pyet çfarë ndryshoi në grupe dhe çfarë mbeti e njëjtë në total. Nxënësit verifikojnë se të pesë objektet janë përfshirë një herë.

Minutat 15–25. Në dyshe zgjidhen 9 + 4 dhe 7 + 6: njëri ndërton, tjetri shpjegon, pastaj ndërrojnë rolet. Mësuesi kërkon të tregohet sa nevojitet për dhjetën dhe sa mbetet. Nëse për 7 + 6 përdoret dyfishi, shpjegimi diskutohet si alternativë e vlefshme.

Minutat 25–35. Krahasohen shkrimet 9 + 6 = 10 + 5 dhe 9 + 6 = 10 + 6. Nxënësit vendosin cili është i vërtetë dhe tregojnë me objekte pse i dyti nuk është i vërtetë. Ky hap kontrollon ruajtjen e shumës, përtej zbatimit të një modeli të dhënë.

Minutat 35–42. Punë individuale me 8 + 7 dhe 6 + 8: kërkohen rezultati, zbërthimi dhe shpjegimi. Mbështetja konkrete mbetet në dispozicion sipas nevojës; nxënësit më të sigurt gjejnë dy shkrime të barasvlershme për të njëjtën shumë.

Minutat 42–45. Detyra e daljes: 9 + 5 dhe fjalia për t'u plotësuar «Nga pesë përdora … për dhjetën; më mbetën …». Sipas dëshmisë, mësuesi vendos hapin pasues: konsolidim i zbërthimeve të dhjetës, lidhje me simbolin ose kalim te problemet me tekst. Fleta e daljes është vlerësim formues dhe jo vlerësim përfundimtar i konceptit.

24 Model ore për hyrjen në shumëzim

STUDIM I PAVARUR · MODEL PËR PRAKTIKËN MËSIMORE

Objektivi i orës 45-minutëshe është që nxënësi të dallojë numrin e grupeve dhe sasinë në secilin grup, të shkruajë mbledhjen e përsëritur dhe ta lidhë atë me shumëzimin. Zgjidhen prodhime të vogla, që mund të kontrollohen me objekte; zotërimi i tabelës së shumëzimit nuk është objektiv i kësaj ore.

Minutat 0–7. Paraqiten tri enë me nga katër objekte dhe pyetet: Sa enë ka? Sa objekte ka në secilën? Sa janë gjithsej? Numërimi një nga një pranohet, por kërkohet edhe një mënyrë që shfrytëzon grupimin. Nëse grupet nuk janë të barabarta, figura rregullohet dhe shpjegohet arsyeja.

Minutat 7–17. Shkruhet 4 + 4 + 4 = 12 dhe deklarohet marrëveshja: tri grupe me nga katër shkruhen 3 × 4. Secili grup tregohet në çastin kur lexohet i mbledhshmi përkatës. Nxënësit shpjegojnë çfarë numëron 3 dhe çfarë numëron 4; simboli futet bashkë me kuptimin e tij sasior.

Minutat 17–27. Dyshet ndërtojnë katër grupe me nga dy dhe dy grupe me nga katër: totali është tetë në të dyja rastet, por organizimi ndryshon. Mësuesi kërkon që përshkrimi i grupeve

të ruhet dhe barazia e totalit të argumentohet; kështu përgatitet vetia e ndërrimit pa u ngatërruar rolet.

Minutat 27–35. Një rregullim me tri rreshta me nga katër pika lexohet sipas rreshtave dhe sipas kolonave. Pyetjet drejtohen te sasia që mbetet e njëjtë kur leximi kalon nga rreshtat te kolonat. Nxënësit me vështirësi i rrethojnë grupet ose i ndjekin me gisht.

Minutat 35–42. Jepen dy probleme: «dy kuti me nga pesë lapsa» dhe «dy lapsa dhe pesë lapsa». Nxënësit zgjedhin veprimin dhe bëjnë një vizatim; mësuesi regjistron nëse dallojnë përsëritjen e një sasie nga bashkimi i dy sasive të ndryshme.

Minutat 42–45. Detyra e daljes: vizatohen tri grupe me nga dy, shkruhen shuma dhe shumëzimi dhe emërtohet rezultati. Përgjigjja $2 + 2 + 2 = 6$ dhe $3 \times 2 = 6$, me figurë të përputhshme, është dëshmi e drejtpërdrejtë e arritjes së objektivit; nxënësit që shkruan vetëm «gjashtë» i bëhet një pyetje shtesë për strukturën.

25 Diferencimi dhe vlerësimi i arsyetimit

Diferencimi ndryshon mbështetjen, kompleksitetin dhe kërkesën për shpjegim. Për të njëjtin objektiv, një nxënës ndërton grupe me objekte, një tjetër vizaton dhe një i tretë krahason dy paraqitje. Nga një detyrë e vetme nuk nxirren përfundime të qëndrueshme për aftësinë e nxënësit.

Për nxënësit me vështirësi në veprimet deri në 20 përdoren zbërthime të qarta të dhjetës dhe pak shembuj të përzgjedhur. Nxënësve që e zotërojnë llogaritjen u kërkohet të shpjegojnë një gabim ose të krijojnë një problem për një barazim të dhënë. Shtimi i ushtrimeve të të njëjtit lloj nuk e rrit domosdoshmërisht kërkesën konceptuale.

Për nxënësin me vështirësi pamore, korniza e dhjetës ndërtohet me një kuti me dhjetë vende të prekshme dhe vija numerike me shenja të ngritura; për nxënësin me vështirësi leximi, problemet lexohen me zë dhe të dhënat paraqiten me objekte. Objektivi matematikor, dhjetëshja ose grupi si njësi, mbetet i njëjtë.

Vlerësimi dallon katër dimensione: saktësinë e rezultatit, përputhjen e paraqitjes, argumentimin dhe transferimin. Një përgjigje mund të jetë numerikisht e saktë, por me figurë të papërputhshme; një tjetër mund të ketë gabim numërimi, por grupim të saktë dhe shpjegim të mirë. Informacioni kthyes i drejtohet dimensionit ku shfaqet vështirësia.

Për studentin universitar vlerësohet edhe argumentimi i ndërhyrjes: cila dëshmi u përdor, cila hipotezë u formulua, cila detyrë e dallon atë nga një hipotezë tjetër dhe çfarë përgjigjeje pritet pas ndërhyrjes. Në këtë mënyrë analiza profesionale shkon përtej korrigjimit të rezultatit.

Ushtrim 28 (studim i pavarur)

Një nxënës vizaton tri grupe me nga katër, shkruan 3 × 4 dhe gjen 11. Çfarë vlerësohet si e zotëruar dhe çfarë kontrollohet më tej?

Zgjidhje. Figura dhe simboli përputhen me marrëveshjen, prandaj struktura e grupeve është e zotëruar. Rezultati tregon gabim numërimi ose mungesë bashkërendimi të grupeve. Kërkohet numërimi «4, 8, 12» me shënimin e secilit grup dhe më pas një paraqitje me dy grupe me nga pesë. Dëshmia tregon një nevojë të kufizuar, prandaj nuk rifillohet trajtimi i përgjithshëm i simbolit ×.

25.1 Procedura e diagnozës për gabimet e leksionit

Për çdo gabim ndiqen pesë hapa: përshkrimi i përgjigjes së vëzhguar; të paktën dy shpjegime të mundshme, kur dëshmia është e paqartë; detyra që i dallon; ndërhyrja që i përgjigjet shkakut; detyra e transferimit. Hipoteza diagnostike është e përkohshme dhe nuk përbën etiketim të nxënësit.

Për përmbysjen e 13 në 31, detyra dalluese është ndërtimi i të dy numrave me material; shqyrtohet edhe ndikimi i rendit të fjalës në emrat e numrave 11–19. Pas ndërhyrjes transferimi kontrollohet me 12 dhe 21. Për numërimin e kapacitetit të kornizës si sasi, detyra dalluese kërkon të numërohen vetëm objektet e vendosura; transferimi përdor një kornizë pjesërisht të zënë me organizim tjetër.

Për 6 + 8 = 6 + 6 + 1 kontrollohen ndryshesa ndërmjet të mbledhshmëve dhe lidhja me simbolin: nxënësi përputh gjashtë objekte me gjashtë nga tetë objektet dhe tregon ato pa çift. Ndërhyrja lidhet me dy objektet shtesë; transferimi përdor 5 + 7. Për gabimin me sasinë fillestare në problemin e kartolinave kontrollohen kuptimi i situatës dhe i së panjohurës: nxënësi e ritregon ngjarjen dhe tregon pjesët në shirit, ndërsa transferimi ndryshon kontekstin dhe vendin e së panjohurës.

Për 58 + 10 = 59 kontrollohen njësia e sasisë së shtuar dhe lidhja e materialit me shkrimin; transferimi mund të përdorë 46 + 10. Për prodhimin 11 në një figurë të saktë me tri grupe me nga katër, detyra dalluese kontrollon numërimin e secilit grup, ndërsa transferimi përdor dy grupe me nga pesë. Këto pyetje shmangin rikthimin te një koncept që dëshmia e tregon të kuptuar.

Për rendin e faktorëve, detyra dalluese kërkon emërtimin e roleve sipas marrëveshjes së shpallur; kur totali dhe grupimi janë të sakta, ndërhyrja qartëson lidhjen ndërmjet gjuhës dhe simbolit, ndërsa transferimi kërkon një figurë të re dhe dy përshkrime. Për 5 × 0 = 5 kontrollohen dallimi ndërmjet objekteve dhe enëve dhe kalimi i gabuar i rregullit të mbledhjes; transferimi përdor 3 × 0 dhe 3 + 0.

> **DËSHMIA QË KËRKOHET**
> Dëshmia e ndryshimit pas ndërhyrjes kërkon një detyrë të re: përsëritja e rezultatit të sapodhënë tregon vetëm kujtesë të menjëhershme. Një rikontroll në një moment tjetër dhe me paraqitje tjetër jep dëshmi më të fortë.

Ushtrim 29. Hartimi i një diagnoze dalluese (auditor)

Nxënësi vizaton dy grupe me nga pesë, shkruan 2 × 5 dhe thotë «shtatë». Ndërtoni një detyrë që dallon ngatërrimin e veprimit nga gabimi i numërimit.

Zgjidhje. Nxënësi numëron objektet në figurë pa u mbështetur te shprehja e shkruar dhe pastaj shpjegon çfarë numëron secili faktor. Nëse gjen dhjetë dhe i shpjegon grupet, por për simbolin jep shtatë, punohet lidhja ndërmjet simbolit dhe modelit. Nëse edhe figurën e numëron shtatë, kontrollohen numërimi dhe korrespondenca një për një. Nëse thotë «dy enë dhe pesë objekte», punohet bashkërendimi i dy niveleve. Transferimi përdor tri grupe me nga dy dhe një kontroll të përshkrimit.

26 Ushtrime integruese me zgjidhje

STUDIM I PAVARUR

Ushtrim 30 (studim i pavarur)

Llogaritni 8 + 9 dhe 17 − 8 dhe lidhini zgjidhjet pa u mbështetur vetëm te kujtesa e fakteve.

Zgjidhje. Nga 9 = 2 + 7 del

$$8 + 9 = 10 + 7 = 17,$$

dhe nga 8 + 9 = 17 rrjedh 17 − 8 = 9. Kontrolli bëhet edhe me plotësim: nga 8 te 10 dy njësi dhe nga 10 te 17 shtatë, gjithsej nëntë. I njëjti zbërthim shfaqet në të dy veprimet; ndryshon pyetja, nga totali te pjesa që mungon.

Ushtrim 31 (studim i pavarur)

Përgatitni një dialog të shkurtër për gabimin 12 − 7 = 15, pa e dhënë menjëherë rezultatin.

Zgjidhje. Hipotezë e mundshme: nxënësi heq 2 për të arritur te 10 dhe pastaj shton 5 në vend që t’i heqë, 10 + 5 = 15, si te rasti B. Mësuesi pyet: «Nëse nga dymbëdhjetë heqim disa objekte, presim më shumë apo më pak se dymbëdhjetë?» Nxënësi ndërton dymbëdhjetë dhe heq dy për të arritur te dhjetë. Mësuesi pyet sa nga shtatë janë hequr dhe sa mbeten për t'u hequr: mbeten pesë, prandaj

$$12 − 2 − 5 = 5,$$

me kontroll 7 + 5 = 12. Pyetja fillestare shërben si kontroll i arsyeshmërisë dhe nuk e zëvendëson llogaritjen.

Ushtrim 32 (studim i pavarur)

Krijoni dy paraqitje për 4×5 dhe lidhini me $5 + 5 + 5 + 5$.

Zgjidhje. Paraqitja e parë ka katër grupe të rrethuara me nga pesë pika, e dyta katër rreshta me nga pesë pika; secili i mbledhshëm 5 përputhet me një grup ose një rresht dhe totali është 20. Lexuar sipas kolonave, figura e dytë jep pesë grupe me nga katër, pra 5×4 me të njëjtin total, por me role të ndryshme të faktorëve.

Ushtrim 33 (studim i pavarur)

Në një figurë me katër grupe me nga tri pika, një nxënës rrethon të gjitha pikat dhe thotë «një grup me dymbëdhjetë». A është gabim?

Zgjidhje. «Një grup me dymbëdhjetë» është përshkrim i vlefshëm i bashkimit, por nuk shpreh organizimin fillestar në katër grupe me nga tre. Nxënësi shpjegon të dy nivelet: bashkimi ka dymbëdhjetë pika dhe brenda tij ka katër grupe me nga tre; lidhja është

$$4 \times 3 = 12 = 1 \times 12.$$

Kur objektivi është dallimi i faktorëve në figurën fillestare, përgjigjja duhet plotësuar.

Ushtrim 34 (studim i pavarur)

Shpjegoni pse 3×4 dhe 4×3 kanë të njëjtën vlerë, por nuk përshkruajnë të njëjtën shpërndarje të lapsave në kuti.

Zgjidhje. Tri kuti me nga katër lapsa dhe katër kuti me nga tre lapsa kanë secila 12 lapsa, por ndryshojnë si numri i kutive, ashtu edhe përmbajtja e secilës. Vetia e ndërrimit ruan prodhimin numerik, por nuk lejon ndërrimin e njësive në problem pa rishkruar marrëdhënien. Totali dhe interpretimi i faktorëve vlerësohen veçmas.

Ushtrim 35 (studim i pavarur)

Hartoni për nxënësit e klasës së dytë një detyrë që verifikon kuptimin e dhjetëshes dhe një që verifikon kuptimin e grupit në shumëzim. Argumentoni çfarë dëshmie jep secila.

Zgjidhje. Për dhjetëshen: paraqit 24 si dy dhjetëshe e katër njëshe dhe si një dhjetëshe e katërmbëdhjetë njëshe dhe argumento barazinë. Për shumëzimin: paraqit tri grupe me nga katër dhe dalloje këtë paraqitje nga katër grupe me nga tre. Detyra e parë kontrollon rigrupimin pa ndryshim sasie, e dyta rolet e dy sasive dhe barazinë e totalit; të dyja kërkojnë shpjegim krahas rezultatit.

27 Vlerësim përmbyllës dhe rubrika analitike

STUDIM I PAVARUR · VLERËSIM PËRMBYLLËS

Detyra 1

Paraqitni 19 në sistemin dhjetor dhe shpjegoni rolin e secilës shifër.

Përgjigjja. 19 = 1 × 10 + 9. Shifra 1 numëron dhjetëshet dhe ka vlerën dhjetë; shifra 9 numëron njëshet dhe ka vlerën nëntë. Lidhja paraqitet me një tufë dhjetëshe dhe nëntë objekte të veçuara. Kriteret: K1, K2.

Detyra 2

Zgjidhni 9 + 7 me plotësim të dhjetës dhe analizoni gabimin 10 + 7.

Përgjigjja. 7 = 1 + 6, prandaj

$$9 + 7 = 10 + 6 = 16.$$

Shkrimi 10 + 7 numëron një njësi më shumë, sepse njësia që u përdor për të plotësuar dhjetën nuk u zbrit nga shtata. Kriteret: K1, K3.

Detyra 3

Jepni dy interpretime të 13 − 8 dhe një kontroll.

Përgjigjja. Nga 13 hiqen 8 dhe mbeten 5; ose një sasi prej 13 ka 5 më shumë se një sasi prej 8. Kontrolli: 8 + 5 = 13. Kriteret: K2, K3.

Detyra 4

Paraqitni 3 × 5 me grupe dhe me rreshta. Shpjegoni 3 dhe 5.

Përgjigjja. Tri grupe me nga pesë ose tri rreshta me nga pesë japin 15 objekte. Sipas marrëveshjes së deklaruar, faktori i parë numëron grupet dhe i dyti madhësinë e secilit grup. Kriteret: K1, K2.

Detyra 5

Një nxënës gjen 4 × 2 = 6. Formuloni hipotezën, ndërhyrjen dhe detyrën pasuese.

Përgjigjja. Hipoteza e parë: ngatërrimi i shumëzimit me mbledhjen. Hipoteza e dytë: nxënësi ndërton katër objekte dhe shton edhe dy, pra e lexon «nga dy» si «edhe dy». Të dyja verifikohen. Nxënësi ndërton katër palë objektesh dhe pastaj një grup me katër dhe një grup me dy. Pas dallimit jepet detyra pasuese: tri grupe me nga tre kundrejt tri objekteve dhe tri objekteve të tjera. Kriteret: K4, K5.

Detyra 6

Një nxënës plotëson 9 + 4 = □ + 5 me 13. Formuloni dy hipoteza dhe një detyrë që i dallon.

Përgjigjja. Hipoteza e parë: kutia lexohet si vendi i rezultatit të anës së majtë. Hipoteza e dytë: nxënësi e kupton barazimin, por ka vështirësi me të mbledhshmin që mungon. Detyrat dalluese janë: a pranohet 13 = 8 + 5, dhe 13 = □ + 5. Refuzimi i barazimit të parë vetëm sepse rezultati ndodhet në të majtë mbështet hipotezën e parë. Në kuti shkruhet 8, sepse 9 + 4 = 13 = 8 + 5. Kriteret: K3, K4.

Çdo detyrë vlerësohet me dy kritere të rubrikës analitike (Tabela 3), secili në nivelet 1–4; përgjigjja që mungon merr 0. Shuma maksimale është 6 × 2 × 4 = 48 pikë. Rubrika është model vlerësimi për këtë leksion, jo instrument i standardizuar; shndërrimi në notë bëhet sipas rregullores së lëndës. Gabimi në rezultat dhe cilësia e argumentit shënohen veçmas, që informacioni kthyes t’i drejtohet dimensionit ku shfaqet vështirësia.

Tabela 3. *Rubrika analitike me katër nivele*

Kriteri	1 · Fillestar	2 · Në zhvillim	3 · I përmbushur	4 · I thelluar
K1 Saktësia matematikore	Rezultate ose barazime të gabuara; kushtet në $\mathbb{N}_0$ mungojnë.	Rezultate kryesisht të sakta, por me barazime të pavlefshme ose kushte të pashprehura.	Rezultate dhe barazime të sakta; kushtet kryesore ($a \geq b$, grupe të veçuara) të shprehura.	Si niveli 3; dallon rastin nga përgjithësimi dhe shqyrton rastet 0 dhe 1 kur duhet.
K2 Interpretimi i paraqitjes	Paraqitja nuk përputhet me situatën ose me simbolin.	Paraqitje e saktë, pa lidhje të shprehur me simbolin.	Paraqitja dhe simboli përputhen; emërton çfarë përfaqëson çdo element (grup, njësi, kërcim).	Kalon ndërmjet dy paraqitjeve dhe shpjegon çfarë nxjerr në pah secila.
K3 Argumentimi	Vetëm rezultat ose rregull pa shpjegim.	Shpjegim procedural, pa arsye matematikore.	Argument i plotë për rastin e dhënë, i mbështetur te marrëdhëniet ndërmjet sasive.	Argument që vlen në përgjithësi, me kushtet e zbatimit.
K4 Diagnoza didaktike	E cilëson përgjigjen vetëm si të saktë ose të gabuar.	Jep një shkak të vetëm, pa e verifikuar.	Formulon të paktën dy hipoteza dhe një detyrë që i dallon.	Si niveli 3; parashikon cila përgjigje mbështet secilën hipotezë.
K5 Vendimi profesional	Korrigjim i drejtpërdrejtë ose përsëritje e rregullit.	Ndërhyrje e përgjithshme, e palidhur me hipotezën.	Ndërhyrje që i përgjigjet hipotezës, me detyrë transferimi.	Si niveli 3; kriter për tërheqjen e mbështetjes ose për hapin pasues.

28 Përfundime didaktike

IDE KYÇE

Ideja që përshkon leksionin është ndërtimi dhe përdorimi i njësive. Te numrat 11–20 dhjetëshja bashkon dhjetë njëshe; te mbledhja dhe zbritja zbërthimi i sasive bën të mundur kalimin përmes dhjetës; te shumëzimi një grup me madhësi të caktuar përsëritet dhe numërohet si grup, pa u humbur lidhja me objektet që përmban.

Mësuesi kontrollon që materiali, vizatimi, fjalia dhe shkrimi simbolik të shprehin të njëjtën marrëdhënie. Gabimi mund të lidhet me numërimin, me njësinë, me zgjedhjen e veprimit, me gjuhën ose me interpretimin e shenjës; ndërhyrja e frytshme e dallon shkakun me një detyrë të përzgjedhur dhe e verifikon ndryshimin me një rast të ri.

Kufijtë numerikë të leksionit janë: veprimet e mbledhjes dhe zbritjes deri në 20, konsolidimi i numrave deri në 100 dhe hyrja në shumëzim me numra natyrorë. Vetitë e përgjithshme dhe formulimet formale u drejtohen studentëve. Algoritmet e shumëzimit me shumë shifra dhe pjesëtimi trajtohen në njësi të veçanta.

Para përdorimit në klasë mësuesi i përzgjedh shembujt sipas parakushteve, verifikon të dhënat e problemeve dhe përgatit pyetjet që kërkojnë shpjegim; pas orës shqyrton cilët nxënës e zbatuan idenë në një paraqitje të re. Ky cikël e lidh planifikimin me dëshmitë e të nxënit dhe e bën metodikën veprimtari profesionale të argumentuar.

29 Literatura

Askew, M., Venkat, H., Mathews, C., Ramsingh, V., Takane, T., & Roberts, N. (2019). Multiplicative reasoning: An intervention's impact on Foundation Phase learners' understanding. *South African Journal of Childhood Education, 9*(1), Article a622. https://doi.org/10.4102/sajce.v9i1.622

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 105*(2), 380–400. https://doi.org/10.1037/a0031084

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (2014). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction* (2nd ed.). Heinemann.

Clayton, F. J., Copper, C., Steiner, A. F., Banfi, C., Finke, S., Landerl, K., & Göbel, S. M. (2020). Two-digit number writing and arithmetic in Year 1 children: Does number word

inversion matter? *Cognitive Development, 56*, Article 100967. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2020.100967

Fuchs, L. S., Newman-Gonchar, R., Schumacher, R., Dougherty, B., Bucka, N., Karp, K. S., Woodward, J., Clarke, B., Jordan, N. C., Gersten, R., Jayanthi, M., Keating, B., & Morgan, S. (2021). *Assisting students struggling with mathematics: Intervention in the elementary grades* (WWC 2021006). National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences. https://ies.ed.gov/ncee/wwc/Docs/PracticeGuide/WWC2021006-Math-PG.pdf

Götze, D., & Baiker, A. (2021). Language-responsive support for multiplicative thinking as unitizing: Results of an intervention study in the second grade. *ZDM – Mathematics Education, 53*(2), 263–275. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01206-1

Manes, M. (2018). *Mathematics for elementary teachers*. University of Hawai‘i. https://pressbooks.oer.hawaii.edu/mathforelementaryteachers/

McNeil, N. M., Fyfe, E. R., Petersen, L. A., Dunwiddie, A. E., & Brletic-Shipley, H. (2011). Benefits of practicing 4 = 2 + 2: Nontraditional problem formats facilitate children's understanding of mathematical equivalence. *Child Development, 82*(5), 1620–1633. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2011.01622.x

McNeil, N. M., Jordan, N. C., Viegut, A. A., & Ansari, D. (2025). What the science of learning teaches us about arithmetic fluency. *Psychological Science in the Public Interest, 26*(1), 10–57. https://doi.org/10.1177/15291006241287726

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* (J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell, Eds.). National Academy Press. https://doi.org/10.17226/9822

Uttal, D. H., Scudder, K. V., & DeLoache, J. S. (1997). Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology, 18*(1), 37–54. https://doi.org/10.1016/S0193-3973(97)90013-7

Shënim për burimet. Referencat mbështesin konceptet dhe orientimet didaktike të cituara. Ushtrimet, dialogët, rastet profesionale, figurat dhe modelet e orëve janë hartuar për këtë leksion. Shpërndarja e 180 minutave është propozim pedagogjik për temat V dhe VI të programit.