METODIKA E MATEMATIKËS III

Leksioni 2

Numrat natyrorë deri në 100 dhe veprimet deri në 10

Metodika e numrit, vlera vendore dhe mbledhja e zbritja brenda dhjetës

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Material universitar për formimin e mësuesve

Mësimi në gjuhën shqipe në Podgoricë

4 orë akademike · 180 minuta

PËRMBLEDHJE

Leksioni bashkon trajtimin metodik të numrave natyrorë deri në 100 me mbledhjen dhe zbritjen brenda 10. Qëllimi është formimi i aftësisë së mësuesit të ardhshëm për ta lidhur paraqitjen e numrit me kuptimin e sasisë, strukturën dhjetore dhe marrëdhëniet që shprehin mbledhja e zbritja.

Përmbajtja

Orientimi dhe organizimi i leksionit 2
Ora I · Nga koleksioni te numri 4
1 Numri, shifra dhe funksionet e numrit 4
2 Numërimi me kuptim dhe kardinaliteti 5
3 Strukturimi i sasive të vogla dhe numri zero 7
Ora II · Dhjetëshja dhe shkrimi pozicional 9
4 Dhjetëshja si njësi e përbërë 9
5 Vlera vendore dhe roli i zeros në shkrim 10
6 Renditja, krahasimi dhe kufiri 100 12
7 Tabela e numrave si mjet për arsyetim 13
Ora III · Kuptimet e mbledhjes dhe të zbritjes 15
8 Kuptimet e mbledhjes brenda dhjetës 15
9 Kuptimet e zbritjes brenda dhjetës 16
10 Vija numerike dhe numërimi i hapave 18
11 Pjesa, tërësia dhe lidhja e veprimeve 19
Ora IV · Nga strategjia te vendimi didaktik 22
12 Strategjitë e llogaritjes dhe zbërthimi i numrit 22
13 Problemet me tekst dhe pozicioni i së panjohurës 23
14 Analiza e gabimeve dhe vlerësimi formues 25
Për seminarin dhe studimin e pavarur 28
15 Ushtrime për numrin dhe vlerën vendore 28
16 Ushtrime për mbledhjen dhe zbritjen 29
17 Ushtrime për projektimin e mësimdhënies 31
Konteksti profesional i arsimit fillor në Mal të Zi 34
18 Parimet didaktike që lidhin numrin me veprimet 36
19 Model mësimor për dhjetëshen dhe vlerën vendore 39
20 Model mësimor për zbritjen si krahasim 40
21 Pyetje për diskutim dhe përgjigje të argumentuara 41
22 Vlerësimi përfundimtar dhe zgjidhjet 42
23 Mini-glosar 44
Literatura 46

Orientimi dhe organizimi i leksionit

Leksioni i parë trajtoi formimin e konceptit dhe klasifikimin e bashkësive. Leksioni i dytë kalon nga koleksioni te numri i elementeve dhe nga grupimi sipas një vetie te grupimi në dhjetëshe. Më pas shpjegon se si ndërtohen kuptimet e mbledhjes dhe zbritjes brenda 10.

Në pjesën e parë, numrat deri në 100 studiohen përmes numërimit, paraqitjes, vlerës vendore dhe krahasimit. Në pjesën e dytë, të dhënat dhe rezultatet e veprimeve mbeten në bashkësinë {0, 1, …, 10}; te zbritja përdoren raste me të zbritshmin jo më të vogël se zbritësi.

Leksioni mbulon dy tema të programit: metodikën e të mësuarit të koncepteve mbi numrat natyrorë deri në 100 dhe mbledhjen e zbritjen e numrave deri në dhjetë. Zhvillohet në katër orë akademike (180 minuta); secila orë nis me një hyrje që shtron pyetjen e saj kryesore. Seksionet 15–22 janë për

seminar dhe studim të pavarur. Kutitë «Thellim universitar · studim i pavarur» përmbajnë përkufizime dhe vërtetime për studentin; në auditor përmenden shkurt, studiohen individualisht para ose pas orës dhe nuk i paraqiten drejtpërdrejt nxënësit; kutitë «Ide kyçe», «Gabim tipik» dhe «Dëshmia që kërkohet» theksojnë atë që duhet mbajtur mend.

Rezultatet e të nxënit

Në përfundim të leksionit studenti duhet të jetë në gjendje:

RN 1 – të dallojë numrin nga shifra dhe numërimin mekanik nga numërimi me kuptim, duke argumentuar kardinalitetin dhe ruajtjen e sasisë;

RN 2 – të modelojë numrat deri në 100 me dhjetëshe dhe njëshe, në ndarje standarde dhe jostandarde, dhe të shpjegojë rigrupimin;

RN 3 – të argumentojë krahasimin e numrave dyshifrorë me strukturën dhjetore;

RN 4 – të shpjegojë mbledhjen dhe zbritjen brenda 10 me më shumë se një model dhe të identifikojë strukturën e problemit me tekst;

RN 5 – të analizojë shenjën e barazimit si marrëdhënie dhe të dallojë keqkuptimet e saj;

RN 6 – të interpretojë gabimin e nxënësit me të paktën dy hipoteza, të hartojë detyrën dalluese dhe të argumentojë ndërhyrjen.

Tabela 1 i lidh rezultatet me seksionet, aktivitetet, dëshminë dhe vlerësimin; kriteret K1–K4 janë ato të rubrikës në seksionin 22.

Tabela 1. *Matrica rezultat i të nxënit → seksion → aktivitet → dëshmi → vlerësim*

RN	Seksioni	Aktiviteti	Dëshmia	Vlerësimi
RN 1	1–3	Shembulli 1; parimet e numërimit; Ushtrimi 2	Shpjegon pse sasia ruhet dhe çfarë tregon fjala e fundit	Detyra 1 · K3, K4
RN 2	4–5	Tufa e hapur; 32 në tri ndarje; Aktiviteti 1	Kalim model ↔ shkrim; barasvlerë e ndarjeve	Detyra 2 · K1, K5
RN 3	6–7	Shembulli 4; 39 → 40; tabela 1–100	Argumenton pse dhjetëshet vendosin	Detyra 3 · K2, K3
RN 4	8–13	Kuptimet e veprimeve; Aktiviteti 2; Ushtrimi 10	Zgjedh veprimin nga marrëdhënia, jo nga fjala	Detyra 5 · K1, K3
RN 5	8, 11.1	Aktiviteti 3; Rasti profesional 4	Gjykon barazime pa të panjohur dhe me të panjohur	Detyra 4 · K2, K3
RN 6	14	Diagnoza diferenciale; rastet 1–4	Dy hipoteza dhe një detyrë që i dallon	Detyrat 1, 3 · K3, K4

Studenti dallon numrin nga shifra dhe numërimin mekanik nga numërimi me kuptim; modelon dhjetëshet e njëshet deri në 100; arsyeton krahasimin; shpjegon mbledhjen e zbritjen me më shumë se një model; interpreton një gabim dhe propozon pyetje verifikuese.

Ora I · Nga koleksioni te numri

Një fëmijë mund ta thotë pa gabim vargun nga një deri në dhjetë dhe, megjithatë, kur i kërkoni shtatë kapëse, t'ju japë një grusht. Kjo orë ndan atë që duket njësoj nga jashtë: recitimin nga numërimi, numrin nga shifra, sasinë nga mënyra si janë vendosur objektet. Do të shohim çfarë duhet të kuptojë fëmija që «shtatë» të jetë emër i një sasie dhe jo thjesht fjala e fundit e një vargu.

Pyetje hyrëse

1. Një fëmijë numëron saktë deri në dhjetë, por kur i kërkoni shtatë kapëse ju jep një grusht. Çfarë di dhe çfarë nuk di ende?

2. A është «tri dhjetëshe dhe katërmbëdhjetë njëshe» një paraqitje e gabuar e 44?

3. Në këtë leksion 3 – 7 nuk ka rezultat. Çfarë do të thotë kjo për vetinë e ndërrimit të zbritjes?

Shënoni përgjigjet tuaja; do t'u kthehemi në seksionet 2, 4.1 dhe 9.1.

1 Numri, shifra dhe funksionet e numrit

Numri shpreh një ide matematikore; shifra është një shenjë e përdorur në shkrimin e numrave. Sistemi dhjetor përdor dhjetë shifra, nga 0 deri në 9. Numri 34 shkruhet me dy shifra, por nuk është dy numra të vendosur pranë njëri-tjetrit: pozicioni përcakton vlerën që përfaqëson secila shifër.

Në këtë material përdorim shënimin $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, duke e përfshirë zeron. Kur një tekst përdor $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, duhet sqaruar marrëveshja. Kjo çështje simbolike i përket formimit të mësuesit; nxënësi fillestar punon me kuptimin e mungesës së objekteve dhe me shkrimin 0.

Sasia, rendi dhe emërtimi

Në shprehjen «gjashtë libra», numri ka funksion kardinal: tregon sa libra ka. Në «libri i gjashtë», përdorimi është rendor: identifikon pozicionin në një renditje të përcaktuar. Në «autobusi 6», shkrimi mund të jetë kod identifikimi; nuk tregon domosdoshmërisht as sasi, as pozicion.

Këto përdorime nuk mësohen vetëm përmes emërtimeve teknike. Mësuesi paraqet situata dhe kërkon se çfarë tregon numri. Pyetja «A do të thotë autobusi 6 se brenda janë gjashtë udhëtarë?» e dallon kodin nga sasia.

Lidhja me bashkësitë

Ide kyçe

Bashkësi të ndryshme mund të kenë të njëjtin numër elementesh. Pesë lapsa dhe pesë kartela janë koleksione të ndryshme me kardinalitet të njëjtë. Nxënësi duhet ta lidhë fjalën «pesë» me sasinë që ruhet pavarësisht llojit të objekteve. Për këtë arsye ndryshohen objektet dhe paraqitjet, ndërsa kontrollohet pandryshueshmëria e numrit.

Pyetje për studentin: «Çfarë duhet të mbetet e njëjtë në shembujt që zgjedhim dhe çfarë duhet të ndryshojë?». Përgjigjja metodike është të ruhet sasia e synuar dhe të ndryshojnë tipare që nuk e përcaktojnë atë, si ngjyra, lloji dhe vendosja e objekteve.

1.1 Përkufizimi i numrit natyror përmes kardinalitetit

Thellim universitar • studim i pavarur

Dy bashkësi të fundme A dhe B quhen të barasfuqishme kur ekziston një korrespondencë një për një ndërmjet elementeve të tyre: çdo element i A lidhet me saktësisht një element të B dhe çdo element i B përfshihet në këtë lidhje. Kardinaliteti i A, i shënuar |A|, është ajo që kanë të përbashkët të gjitha bashkësitë e barasfuqishme me A; kësaj vlere i themi numri i elementeve të A. Kjo jep bazën matematikore të pohimit se koleksione të ndryshme mund të përfaqësojnë të njëjtin numër.

Numri natyror përfaqëson sasinë e përbashkët të koleksioneve të fundme me të njëjtin kardinalitet. Ky është një interpretim kardinal për formimin e mësuesit, jo një përkufizim formal që duhet recituar nga fëmija. Në auditor ndërtohen tri koleksione me nga katër elemente dhe kërkohet çfarë kanë të përbashkët. Përgjigjja lidhet me sasinë, edhe kur objektet ndryshojnë në madhësi, ngjyrë dhe funksion.

Bashkësia boshe nuk ka elemente dhe kardinaliteti i saj është zero. Duhet dalluar bashkësia boshe nga një bashkësi që përmban një enë bosh: në rastin e dytë, nëse po numërojmë enët, kemi një element. Pyetja matematikore kërkon përcaktimin e bashkësisë referuese. Një kuti pa lapsa ka zero lapsa, por një kuti; të dy pohimet janë të sakta sepse numërojnë objekte të ndryshme.

Shkrimi numerik është paraqitja e numrit në një sistem shenjash. Numri njëzet e tre mund të përfaqësohet me fjalë, me shkrimin 23, me dy dhjetëshe e tri njëshe ose me një koleksion prej njëzet e tre objektesh. Barasvlera e paraqitjeve nuk do të thotë se ato kërkojnë të njëjtat aftësi njohëse. Mësuesi kontrollon veçmas leximin, modelimin dhe interpretimin.

2 Numërimi me kuptim dhe kardinaliteti

Recitimi i vargut të numrave nuk mjafton për numërimin e një koleksioni. Numërimi kërkon bashkërendimin e fjalëve numerike me objektet: çdo objekt lidhet me një fjalë, asnjë objekt nuk lihet pa numëruar dhe asnjë nuk numërohet dy herë. Vargu përdoret në rend të qëndrueshëm.

Fjala numerike e fundit tregon numrin e elementeve të koleksionit të numëruar. Pyetja «Sa janë gjithsej?» kontrollon këtë lidhje. Një fëmijë që rinumëron çdo herë mund të jetë ende duke e ndërtuar kuptimin kardinal; sjellja duhet parë në disa situata, jo gjykuar nga një rast i vetëm.

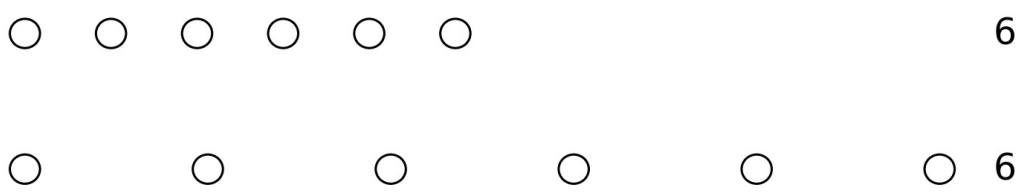


Figura 1. *Dy vendosje të gjashtë objekteve me hapësira të ndryshme.*

Kur objektet vetëm zhvendosen, sasia nuk ndryshon. Rreshti më i gjatë mund të ketë po aq objekte sa rreshti i shkurtër. Mësuesi kërkon përputhjen një për një dhe pyet nëse u shtua ose u hoq ndonjë objekt. Radha e numërimit mund të ndryshojë, por numri përfundimtar mbetet i njëjtë nëse çdo objekt numërohet saktësisht një herë.

Shembulli i zgjidhur 1. Një përgjigje e saktë me proces të pasaktë

Një nxënës numëron gjashtë kapëse dhe përgjigjet 6, por gjatë numërimit lë një kapëse dhe numëron një tjetër dy herë. Rezultati përfundimtar është i saktë rastësisht; procedura nuk është e besueshme. Shpjegimi nuk është i vetëm: rezultati mund të vijë nga dy gabime që kompensohen ose nga kujtesa e numrit të thënë një herë më parë. Detyra dalluese është numërimi i shtatë kapëseve të shpërndara ndryshe; nëse përsëritet kapërcimi ose dyfishimi i një objekti, hipoteza e parë forcohet.

Mësuesi kërkon zhvendosjen e çdo kapëseje të numëruar në një zonë tjetër. Numërimi përsëritet dhe lidhet me pyetjen për sasinë totale. Ndërhyrja synon përputhjen një për një, jo përsëritjen më të shpejtë të vargut.

2.1 Pesë parimet e numërimit

Numërimi kuptimplotë analizohet përmes pesë parimeve. Korrespondenca një për një kërkon një etiketë numerike për çdo objekt. Rendi i qëndrueshëm kërkon që fjalët numerike të përdoren në një varg të qëndrueshëm. Parimi kardinal kërkon që fjala e fundit të interpretohet si numri i të gjithë elementeve, jo vetëm si emri i objektit të fundit. Parimi i abstraksionit lejon numërimin e objekteve të ndryshme dhe të ngjarjeve, për sa kohë përcaktohet çfarë përfshihet në koleksion. Pavarësia nga rendi kërkon që ndryshimi i rendit të vizitimit të objekteve të mos e ndryshojë rezultatin, kur çdo objekt numërohet vetëm një herë. Këto parime janë formuluar nga Gelman dhe Gallistel (1978); udhëzuesi i Frye et al. (2013) mbështet trajtimin e tyre sipas një vijimësie zhvillimore.

Këto parime duhen dalluar nga njëri-tjetri. Një fëmijë mund ta recitojë saktë vargun, por të humbasë lidhjen me objektet; mund të prekë çdo objekt një herë, por të përdorë një varg numerik të pasaktë; ose mund të numërojë saktë dhe të mos e përdorë numrin e fundit si përmbledhje të sasisë. Këto raste kërkojnë ndërhyrje të ndryshme.

Për abstraksionin paraqiten dy lapsa, një gomë dhe tri kapëse. Nëse pyetja është sa objekte ka gjithsej, përgjigjja është gjashtë. Nëse pyetja është sa lapsa ka, përgjigjja është dy. Parimi nuk e heq nevojën për të përcaktuar kategorinë që numërohet. Mund të numërohen edhe katër trokitje, megjithëse ato nuk mbeten njëkohësisht të dukshme; kjo kërkon mbajtjen mend të sekuencës dhe nuk është detyrë e barasvlershme me numërimin e katër objekteve të palëvizshme.

Për pavarësinë nga rendi, gjashtë objekte numërohen nga e majta dhe pastaj nga e djathta. Etiketa që merr një objekt i caktuar mund të ndryshojë, ndërsa kardinaliteti mbetet gjashtë. Kjo dallon pozicionin rendor nga sasia e koleksionit. Mësuesi kërkon shpjegimin e ruajtjes së sasisë dhe nuk e trajton vetëm përputhjen e dy rezultateve si provë të plotë të kuptimit.

2.2 Kardinaliteti dhe ruajtja e sasisë

Kardinaliteti dhe ruajtja e sasisë janë të lidhura, por nuk janë i njëjti aspekt. Kardinaliteti lidhet me interpretimin e numrit të fundit të numërimit; ruajtja e sasisë lidhet me pandryshueshmërinë e numrit gjatë transformimeve që nuk shtojnë dhe nuk heqin elemente. Një nxënës mund të përgjigjet saktë sa objekte ka pas numërimit dhe përsëri të gjykojë se janë më shumë kur rreshti zgjatet.

Thellim universitar • studim i pavarur

Argumenti matematikor i ruajtjes mbështetet në identitetin e elementeve ose në një korrespondencë një për një ndërmjet gjendjes fillestare dhe asaj përfundimtare. Çdo objekt para zhvendosjes ka të njëjtin objekt pas zhvendosjes; asnjë nuk humbet dhe asnjë nuk krijohet. Në praktikën fillore ky argument shprehet me pyetjet çfarë lëvizëm dhe çfarë shtuam ose hoqëm. Ruajtja nuk vlen për çdo ndryshim pamor: nëse shtohet një objekt gjatë riorganizimit, kardinaliteti ndryshon.

Dështmia që kërkohet

Një detyrë e mirë diagnostikuese përfshin si një riorganizim pa ndryshim sasie, ashtu edhe një rast me shtim real të një objekti. Kjo pengon mësimin mekanik të përgjigjes “mbeten po aq” për çdo situatë. Studenti duhet të argumentojë kushtin nën të cilin sasia ruhet.

3 Strukturimi i sasive të vogla dhe numri zero

Njohja e një sasie të vogël pa numëruar objektet një nga një quhet njohje e menjëhershme e sasisë (në literaturë: subitizim). Për një sasi më të madhe brenda 10, nxënësi mund të përdorë një strukturë të njohur: te shtatë shenja të vendosura si pesë dhe dy, mund të shohë pjesët dhe të arsyetojë tërësinë. Nuk kërkohet të hamendësojë sasinë vetëm nga një pamje e shpejtë.

Korniza dhjetëshe ka dy rreshta me nga pesë vende. Plotësimi i qëndrueshëm, fillimisht i rreshtit të sipërm nga e majta në të djathtë, krijon një pikë referimi. Mësuesi shpjegon rregullin e përdorimit; ai nuk është veti e domosdoshme e numrit.

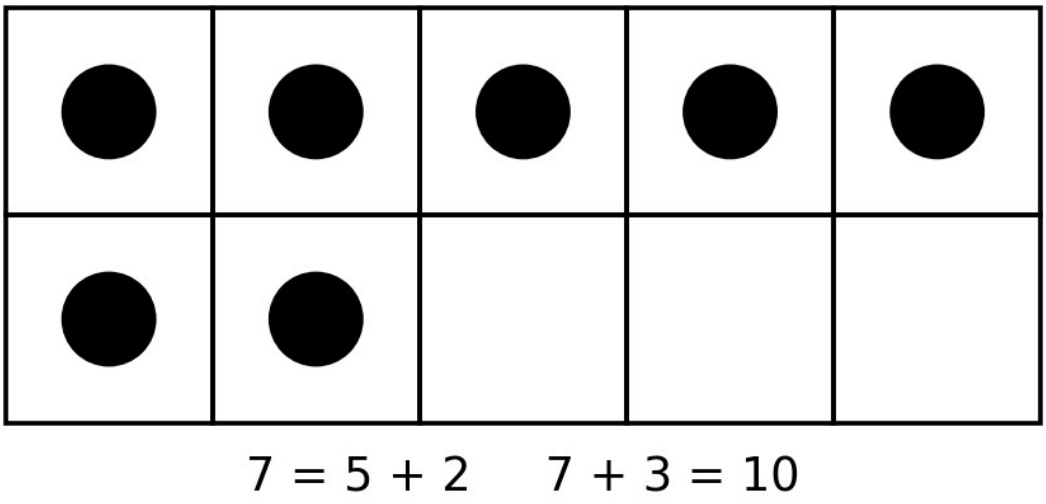


Figura 2. *Shtatë shenja si pesë dhe dy dhe tri vende bosh deri në dhjetë.*

Shembulli i zgjidhur 2. Leximi i sasisë përmes strukturës

Pyetja është «Si e di që janë 7?». Një përgjigje e argumentuar: «Rreshti i parë ka 5; në rreshtin e dytë janë 2; gjithsej janë 7». Pyetja pasuese «Sa vende kanë mbetur bosh?» lidh 7 me plotësimin deri në 10: mungojnë 3.

Nëse nxënësi thotë vetëm «E mbaj mend figurën», ndryshojmë vendosjen e shtatë shenjave dhe kërkojmë një arsyetim tjetër. Qëllimi është lidhja e sasisë me strukturën, pa e kufizuar numrin në një vizatim të vetëm.

Zero si sasi

Një enë pa asnjë objekt përfaqëson sasinë zero. Pas heqjes së të gjitha shenjave nga korniza, numri i shenjave është 0, ndërsa numri i vendeve mbetet 10. Ky dallim e bën të qartë se çfarë po numërohet. Mësuesi e lidh shenjën 0 me mungesën e objekteve të kërkuara, jo me mungesën e vetë enës ose të kornizës.

3.1 Njohja e menjëhershme perceptive dhe konceptuale

Njohja e menjëhershme perceptive (subitizimi perceptiv) është njohja e menjëhershme e një sasie të vogël pa numërim të njëpasnjëshëm të elementeve. Njohja konceptuale e sasisë (subitizimi konceptual) është njohja e një sasie përmes pjesëve të organizuara që shihen si struktura të njohura. Te një paraqitje e shtatë shenjave si katër dhe tri, nxënësi mund të njohë secilën pjesë dhe ta lidhë me tërësinë shtatë. Nuk bëhet fjalë për të njëjtin proces si perceptimi i menjëhershëm i tri shenjave.

Njohja e shpejtë e një figure të ushtruar nuk provon vetvetiu kuptimin e numrit. Mësuesi ndryshon orientimin dhe vendosjen, kërkon të identifikohen pjesët dhe kontrollon me numërim. Shpejtësia e ekspozimit përdoret me kujdes: kufiri kohor nuk duhet ta shndërrojë aktivitetin në garë hamendësimi. Dallimi ndërmjet subitizimit perceptiv dhe konceptual trajtohet nga Clements (1999). Frye et al. (2013) e trajtojnë njohjen e sasive të vogla si pjesë të themeleve të numrit; dallimi analitik i dy proceseve këtu shërben për interpretimin didaktik të përgjigjeve.

Korniza dhjetëshe krijon marrëdhënie me pesën dhe dhjetën. Shtatë mund të interpretohet si 5 + 2 dhe si 10 − 3. Këto dy lexime nuk duhen kërkuar njëkohësisht përpara se nxënësi të ketë kuptuar secilin. Fillimisht pyetet sa shenja janë të vendosura; më pas sa vende janë bosh; në fund lidhen dy sasitë me kapacitetin e kornizës.

Detyrë e argumentuar për auditorin: paraqitni gjashtë shenja si dy grupe me nga tri dhe pastaj si pesë e një. Në të dy rastet tërësia është gjashtë, por pjesët ndryshojnë. Studentët shpjegojnë pse ndryshimi i zbërthimit nuk ndryshon numrin dhe çfarë njohurish paraprake kërkon secila paraqitje. Përgjigjja duhet të lidhë perceptimin e pjesëve me marrëdhënien pjesë–tërësi.

Ora II · Dhjetëshja dhe shkrimi pozicional

Shkrimi 34 duket i thjeshtë vetëm për atë që e ka kuptuar: dy shifra që nuk janë dy numra, një 3 që vlen tridhjetë. Ora e dytë ndjek kalimin nga numërimi i njësheve te numërimi me njësi të përbëra, dhe prej aty te vlera vendore, roli i zeros, krahasimi dhe kalimet $39 \to 40$ dhe $99 \to 100$.

Pyetja që e përshkon orën: çfarë duhet të shohë mësuesi në veprimin e nxënësit që të dijë se pas leximit të saktë të numrit ka edhe kuptim të strukturës?

4 Dhjetëshja si njësi e përbërë

Kalimi drejt numrave deri në 100 kërkon që dhjetë njëshe të trajtohen edhe si një dhjetëshe. Nxënësi nuk mëson vetëm një emër të ri; mëson të numërojë me njësi të ndryshme. Një tufë është një objekt i grupuar, por përmban dhjetë shkopinj. Pyetjet «Sa tufa?» dhe «Sa shkopinj?» kanë përgjigje të ndryshme.

Materiali duhet ta bëjë marrëdhënien të kontrollueshme. Fillimisht përdoren dhjetë shkopinj që lidhen dhe mund të zgjidhen. Më pas një shufër me dhjetë ndarje mund ta përfaqësojë dhjetëshen. Një shufër e pandarë, pa shpjegim të njësisë, rrezikon të lexohet si një njëshe e vetme.

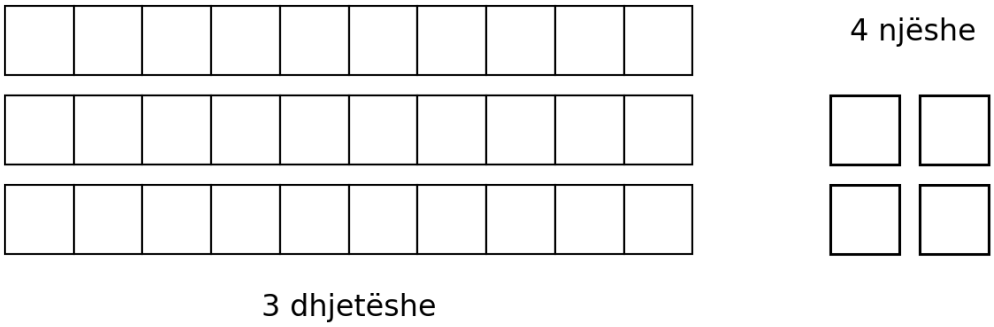


Figura 3. *Tridhjetë e katër si tri dhjetëshe dhe katër njëshe.*

$$10 \text{ njëshe} = 1 \text{ dhjetëshe}, \quad 34 = 30 + 4$$

Mësuesi ndërton 34 me tri grupe dhjetëshe dhe katër njëshe. Studentit i kërkohet të shpjegojë pse tri grupe nuk do të thotë tre shkopinj. Pastaj hapet një grup: mbeten dy dhjetëshe dhe katërmbëdhjetë njëshe, por sasia e përgjithshme mbetet 34. Këtu veprimi konkret shpjegon shkëmbimin e njësive; nuk zhvillohet algoritmi i mbledhjes me kalim.

> **Ide kyçe**
>
> Shpjegimi «dhjetë bëhen një» është i paplotë. Duhet thënë «dhjetë njëshe përfaqësohen nga një dhjetëshe». Vlera ruhet; ndryshon njësia me të cilën e organizojmë numërimin.

Dëshmia që kërkohet

Pyetje verifikuese: «Nëse e zgjidhim tufën, a kemi më shumë shkopinj?». Përgjigjja e kërkuar mbështetet në ruajtjen e objekteve. Nëse nxënësi përgjigjet sipas numrit të pjesëve të dukshme, rikthehemi te numërimi dhe përputhja.

4.1 Njësia e numërimit dhe barasvlera e grupimeve

Thellim universitar • studim i pavarur

Njësi numërimi quajmë atë që trajtohet si një në procesin e numërimit. Në një koleksion shkopinjsh, njësia mund të jetë një shkop; pas grupimit, mund të numërojmë tufa me nga dhjetë. Ndryshimi i njësisë nuk ndryshon objektet që kemi, por ndryshon kuptimin e numrit të grupeve. Për tri tufa përgjigjja 3 është e saktë kur numërohen tufat dhe 30 është e saktë kur numërohen shkopinjtë.

Njësia e përbërë është një grup që trajtohet si një i vetëm dhe njëkohësisht kuptohet përbërja e tij. Dhjetëshja kërkon bashkërendimin e dy niveleve: një grup dhe dhjetë njëshe. Nëse fëmija numëron vetëm tufat pa kuptuar përmbajtjen, nuk ka dëshmi të mjaftueshme për strukturën dhjetore. Nëse numëron të gjithë shkopinjtë një nga një, sasia mund të jetë e saktë, por përdorimi i njësisë së përbërë mund të jetë ende në formim.

Barasvlera 10 njëshe = 1 dhjetëshe është barazi sasie dhe nuk është barazi e numrit të pjesëve të dukshme. Për 32, tri tufa dhe dy shkopinj përfaqësojnë tridhjetë e dy shkopinj, megjithëse në pamje mund të dallohen pesë pjesë. Pyetja “sa janë?” duhet të plotësohet me njësinë referuese.

Në auditor studenti demonstron 32 si 3 dhjetëshe e 2 njëshe, si 2 dhjetëshe e 12 njëshe dhe si 32 njëshe. Zgjidhja argumentohet nga

$$30 + 2 = 20 + 12 = 32.$$

Pastaj shpjegohet pse vetëm ndarja e parë lidhet drejtpërdrejt me shifrat e shkrimit standard 32. Ndarjet e tjera janë të sakta si modele sasie; ato nuk ndryshojnë shkrimin standard të numrit.

5 Vlera vendore dhe roli i zeros në shkrim

Në shkrimin e një numri dyshifror, shifra majtas tregon dhjetëshet dhe shifra djathtas njëshet. Shifra 4 përfaqëson katër njësi te 24 dhe katër dhjetëshe te 42. Mësuesi e lidh vendin me sasinë që përfaqësohet, duke shmangur rregullin verbal të pambështetur në model.

Për numrat nga 10 deri në 99, ndarja standarde ka nga një deri në nëntë dhjetëshe dhe nga zero deri në nëntë njëshe. Formulimi universitar është

$$n = 10d + u, \quad 1 \le d \le 9, \quad 0 \le u \le 9.$$

Me fëmijët kjo marrëdhënie ndërtohet përmes grupeve dhe tabelës së vendeve.

Numri	Dhjetëshe	Njëshe	Zbërthimi standard
24	2	4	20 + 4

Numri	Dhjetëshe	Njëshe	Zbërthimi standard
42	4	2	40 + 2
40	4	0	40 + 0
4	0	4	0 + 4

Rreshti i fundit tregon rastin d = 0 të seksionit 5.1.

Shembulli i zgjidhur 3. Pse 40 nuk është 4

Një nxënës pohon: «Zero nuk ka vlerë, prandaj 40 është 4». Ndërtojmë katër dhjetëshe dhe, veç tyre, katër shkopinj. Të dy modelet kanë shifrën 4 në shkrim, por përfaqësojnë sasi të ndryshme.

Te 40, zero tregon se nuk ka njëshe të veçuara në ndarjen standarde. Ajo ruan vendin e njësheve, ndërsa 4 është në vendin e dhjetësheve. Shprehja «zero nuk ka vlerë» nuk e shpjegon funksionin e saj në shkrimin pozicional. Ka edhe një hipotezë të dytë: nxënësi mund ta njohë vlerën vendore, por ta zbatojë kuptimin «zero = asgjë» nga sasitë te shkrimi. Transferimi kontrollohet me 70 dhe 7, pastaj me 30 dhe 3.

Nga modeli te shkrimi dhe anasjelltas

> **DËSHMIA QË KËRKOHET**
>
> Mësuesi kërkon dy kalime: të shkruhet numri që përfaqëson modeli dhe të ndërtohet modeli për një numër të dhënë. Leximi i saktë i 42 nuk provon vetvetiu se nxënësi mund të ndërtojë katër dhjetëshe dhe dy njëshe. Secili kalim kontrollohet më vete.

5.1 Ekzistenca dhe veçantia e ndarjes dhjetore

Thellim universitar • studim i pavarur

Për çdo numër natyror n nga 0 deri në 99 ekzistojnë në mënyrë të vetme numra të plotë d dhe u të tillë që

$$n = 10d + u, \quad 0 \le d \le 9, \quad 0 \le u \le 9.$$

Numri d tregon dhjetëshet e plota dhe u njëshet e mbetura në ndarjen standarde. Për numrat njëshifrorë d = 0; zeroja fillestare nuk shkruhet zakonisht në paraqitjen standarde.

Ekzistenca shpjegohet duke formuar sa më shumë grupe me nga dhjetë. Mbetja ka më pak se dhjetë objekte, sepse përndryshe do të mund të krijohej edhe një grup. Për 47 krijohen katër grupe dhe mbeten shtatë objekte. Ky arsyetim konkret është forma didaktike e ndarjes me mbetje.

Për veçantinë, supozojmë se 10d + u = 10e + v, ku u dhe v janë nga 0 deri në 9. Atëherë

$$10(d - e) = v - u.$$

Ana e djathtë është ndërmjet −9 dhe 9; i vetmi shumëfish i 10 në këtë interval është 0. Prandaj d = e dhe u = v. Numrat negativë në këtë argument përdoren vetëm për formimin universitar të studentit; nuk janë përmbajtje për nxënësin fillestar.

Ndarjet jostandarde nuk e kundërshtojnë këtë veçanti, sepse ato nuk plotësojnë të njëjtin kusht mbi njëshet. Te 47 = 30 + 17, numri 17 nuk është ndërmjet 0 dhe 9. Mësuesi duhet të dallojë pohimin “ka vetëm një ndarje standarde” nga pohimi i pasaktë “ka vetëm një mënyrë për të paraqitur numrin”. Kjo dallueshmëri mbështet kuptimin e rigrupimit dhe të shkrimit pozicional (Manes, 2018).

6 Renditja, krahasimi dhe kufiri 100

Krahasimi i numrave mund të mbështetet në përputhje, numërim, vijë numerike dhe vlerë vendore. Për dy numra dyshifrorë krahasohen fillimisht dhjetëshet. Nëse ato janë të njëjta, krahasohen njëshet. Arsyeja është se ndryshimi prej një dhjetësheje nuk kompensohet nga një ndryshim njësheje brenda 0–9.

Nxënësi duhet të dallojë një më shumë nga një dhjetëshe më shumë. Pas 39 vjen 40: dhjetë njëshet rigrupohen dhe përfaqësohen si një dhjetëshe, e cila bashkë me tri dhjetëshet jep katër dhjetëshe dhe zero njëshe. Shpjegimi duhet të ruajë lidhjen me objektet dhe jo të mbetet thjesht ndryshim i dy shifrave.

Shembulli i zgjidhur 4. Krahasimi i 47 dhe 52

Një nxënës thotë se 47 është më i madh, sepse 7 > 2. Paraqitim katër dhjetëshe e shtatë njëshe dhe pesë dhjetëshe e dy njëshe. Katër dhjetëshe dhe jo më shumë se nëntë njëshe mbeten më pak se pesë dhjetëshe. Prandaj 47 < 52.

Për të kontrolluar nëse ndërhyrja u kuptua, përdorim 63 dhe 58. Më pas krahasojmë 63 dhe 68: tani dhjetëshet janë të njëjta dhe vendosin njëshet. Rasti i dytë parandalon rregullin e gabuar «njëshet nuk kanë rëndësi».

Njëqind si dhjetë dhjetëshe

100 përfaqëson dhjetë dhjetëshe ose njëqind njëshe. Në tabelën pozicionale me tri vende shkruhet një qindëshe, zero dhjetëshe dhe zero njëshe. Nëse tabela ka vetëm dy vende, duhet zgjeruar; nuk shkruhet 10 si një shifër në vendin e dhjetësheve.

Kalimi 99, 100 shpjegohet duke shtuar një njëshe: dhjetë njëshet grupohen në një dhjetëshe dhe dhjetë dhjetëshet në një qindëshe. Kjo paraqitje është njohje e strukturës së numrit 100. Algoritmet e veprimeve me numra shumëshifrorë do të trajtohen sipas temave pasuese.

6.1 Përkufizimi dhe argumentimi i rendit

Thellim universitar • studim i pavarur

Për a dhe b në $\mathbb{N}_0$, a < b do të thotë se ekziston një numër natyror pozitiv k i tillë që b = a + k. Në interpretimin kardinal, një koleksion me a elemente përputhet me një pjesë të koleksionit me b elemente dhe në të dytin mbeten elemente pa çift. Barazia e sasive kërkon që pas përputhjes të mos mbetet asnjë element pa çift në asnjërin koleksion.

Rendi ka veti që mësuesi duhet t'i përdorë saktë. Nëse a < b dhe b < c, atëherë a < c; kjo është kalueshmëria e rendit. Për dy numra natyrorë vlen saktësisht një nga marrëdhëniet a < b, a = b ose a > b. Simbolet shprehin marrëdhënie ndërmjet numrave dhe nuk janë udhëzime për një veprim aritmetik.

Krahasimi pozicional argumentohet me kufirin e njësheve. Nëse a = 10d + u dhe b = 10e + v, me d < e, atëherë

$$a \le 10d + 9 < 10(d+1) \le 10e \le b.$$

Prandaj a < b. Nëse d = e, rendi përcaktohet nga krahasimi i u me v. Ky argument e bën të qartë pse një ndryshim i dhjetësheve ka përparësi ndaj njësheve.

Pasardhësi i n është n + 1 dhe paraardhësi është n − 1 kur n > 0. Zeroja nuk ka paraardhës në $\mathbb{N}_0$; 100 ka pasardhës 101 në $\mathbb{N}_0$, edhe pse 101 është jashtë kufirit mësimor të këtij leksioni. Kufiri i programit nuk duhet të interpretohet si kufi i bashkësisë së numrave natyrorë. Me nxënësin thuhet se këtë herë studiohen numrat deri në 100.

7 Tabela e numrave si mjet për arsyetim

Tabela më poshtë rendit numrat nga 1 deri në 100, me dhjetë numra në çdo rresht. Brenda rreshtit, një vend djathtas shton një njësi; një vend poshtë në të njëjtën shtyllë shton një dhjetëshe. Këto marrëdhënie varen nga organizimi i tabelës dhe duhen shpjeguar.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 4. *Tabela 1 deri në 100 me shtyllën 4 14 24 deri në 94 të dalluar.*

Nga 24, një vend poshtë çon te 34, ndërsa një vend djathtas çon te 25. Nga 29, pasardhësi 30 ndodhet në fund të të njëjtit rresht; pas 30, numri 31 fillon rreshtin tjetër. Udhëzimi «pasardhësi është gjithmonë në kutinë djathtas» nuk vlen në skajin e rreshtit.

Pyetje e drejtuar: «Pse 54 dhe 64 janë në të njëjtën shtyllë?». Kanë të njëjtin numër njësheje në ndarjen standarde dhe ndryshojnë me një dhjetëshe. Tabela përdoret për të zbuluar e arsyetuar marrëdhënie, jo vetëm për të mësuar vendndodhje përmendsh.

Ora III · Kuptimet e mbledhjes dhe të zbritjes

Barazimi 8 − 5 = 3 mund të tregojë tri histori të ndryshme: diçka u hoq, diçka mungon, ose dy sasi u krahasuan. Fëmija që e njeh zbritjen vetëm si heqje ngec sapo historia nuk ka asgjë për të hequr. Kjo orë ndërton kuptimet e mbledhjes dhe të zbritjes brenda 10, lidhjen ndërmjet tyre dhe shenjën e barazimit si marrëdhënie, jo si sinjal për përgjigjen.

8 Kuptimet e mbledhjes brenda dhjetës

Ide kyçe

Mbledhja mund të përfaqësojë bashkimin e dy koleksioneve të veçanta ose shtimin e një sasie te një sasi fillestare. Për modelin me bashkësi, koleksionet duhet të jenë pa elemente të përbashkëta që numri i elementeve të bashkimit të jetë shuma e kardinaliteteve. Me fëmijët sigurohemi konkretisht që asnjë objekt të mos numërohet dy herë.

Në situatën «4 lapsa janë në kuti dhe shtohen 3 të tjerë», 4 është sasia fillestare, 3 ndryshimi dhe 7 sasia përfundimtare. Në situatën «4 lapsa janë të shkurtër dhe 3 të gjatë», kemi dy pjesë të së njëjtës tërësi pa një ngjarje kohore. Të dyja modelohen me 4 + 3 = 7.

Shembulli i zgjidhur 5. Nga historia te veprimi

Në një pjatë janë 5 kokrra dhe në një pjatë tjetër 3. Sa kokrra janë gjithsej? Përzgjedhim pesë dhe tri shenja, i bashkojmë dhe shpjegojmë se 8 përfaqëson të gjithë koleksionin. Shkrimi 5 + 3 = 8 përmbledh marrëdhënien mes dy pjesëve dhe tërësisë.

Një nxënës numëron çdo shenjë nga fillimi; një tjetër nis nga 5 dhe vazhdon 6, 7, 8. Të dy marrin rezultatin e saktë. Strategjia e dytë shfrytëzon sasinë e parë si të njohur. Mësuesi kërkon që studenti të shpjegojë çfarë përfaqëson çdo numër i thënë.

Roli i barazimit

Shenja = shpreh barazi vlerash. Shkrimet 5 + 3 = 8 dhe 8 = 5 + 3 janë të dyja të sakta. Nëse nxënësi e interpreton shenjën vetëm si «tani vjen përgjigjja», mund ta kundërshtojë shkrimin e dytë. Pyetja «A kanë të dy anët të njëjtën sasi?» e vendos diskutimin te marrëdhënia.

Shembujt mbeten brenda 10. Zgjerimi i repertorit të situatave nuk kërkon rritjen e menjëhershme të madhësisë së numrave; vështirësia mund të rritet përmes pozicionit të të panjohurës dhe kërkesës për shpjegim.

8.1 Përkufizimi matematikor i mbledhjes

Thellim universitar • studim i pavarur

Për numra natyrorë a dhe b, mbledhja a + b mund të përkufizohet si kardinaliteti i bashkimit të dy bashkësive të fundme pa elemente të përbashkëta, me kardinalitete a dhe b. Kushti i mosmbivendosjes është thelbësor. Nëse një objekt përfshihet në të dy grupet, shuma e kardinaliteteve numëron atë objekt dy herë, ndërsa bashkimi e përmban një herë. Rezultati nuk varet nga bashkësitë e zgjedhura, sepse bashkësitë e barasfuqishme vihen në korrespondencë një për një.

Për shembull, një grup me katër nxënës që luajnë shah dhe një grup me tre nxënës që luajnë basketboll nuk japin domosdoshmërisht shtatë nxënës të ndryshëm, sepse një nxënës mund të jetë në të dy grupet. Për modelin fillestar zgjidhen koleksione të ndara fizikisht ose kategori që nuk mbivendosen. Studenti duhet ta dallojë këtë kusht nga një kufizim i përgjithshëm mbi mbledhjen: veprimi 4 + 3 është gjithmonë i përcaktuar, por modeli i zgjedhur mund të mos e përfaqësojë saktë situatën.

Mbledhja është e mbyllur në N_0: shuma e dy numrave nga N_0 është përsëri në N_0. Bashkësia {0, 1, …, 10} nuk është e mbyllur ndaj mbledhjes, sepse 8 + 5 = 13. Prandaj në këtë leksion përzgjidhen çifte me a + b ≤ 10. Kufizimi i shembujve duhet të deklarohet; nuk duhet të paraqitet si veti e vetë veprimit.

Në modelin e ndryshimit, sasia fillestare a zmadhohet me b njësi. Në modelin statik, a dhe b janë dy pjesë të një tërësie. Të dy modelet japin të njëjtën marrëdhënie numerike, por kërkojnë interpretime të ndryshme të të dhënave. Klasifikimi i situatës e ndihmon mësuesin të zgjedhë pyetje dhe paraqitje të përshtatshme.

9 Kuptimet e zbritjes brenda dhjetës

Ide kyçe

Zbritja shpreh disa marrëdhënie: heqje nga një sasi, gjetje të pjesës që mungon dhe krahasim të dy sasive. Në modelin e heqjes, nisemi nga tërësia dhe largojmë një pjesë. Në modelin e plotësimit, kërkojmë sa duhet t’i shtojmë pjesës së njohur për të arritur tërësinë. Në krahasim, kërkojmë ndryshesën ndërmjet dy sasive.

Për 8 − 5 = 3, numri 8 quhet i zbritshmi, 5 zbritësi dhe 3 ndryshesa. Terminologjia lidhet me situatën dhe nuk zëvendëson interpretimin. Në këtë leksion të zbritshmit janë të paktën sa zbritësit, që rezultatet të mbeten në N_0.

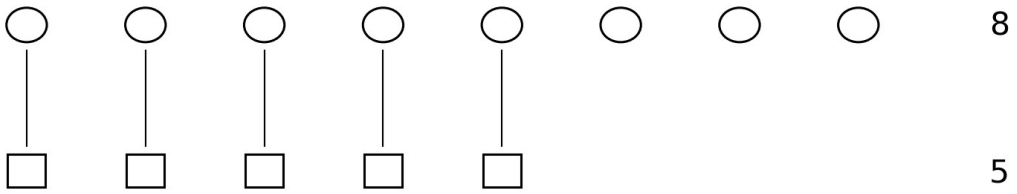


Figura 5. *Përputhja e tetë rrathëve me pesë katrorë lë tri rrathë të papërputhur.*

Shembulli i zgjidhur 6. Zbritja pa heqje fizike

Ana ka 8 kartela dhe Bora 5. Sa më shumë ka Ana? Vendosim kartelat në përputhje një për një. Pesë çifte tregojnë pjesën e barabartë; tri kartelat e papërputhura tregojnë sa më shumë ka Ana. Përgjigjja është 3, sepse $8 - 5 = 3$.

Asnjë kartelë nuk u largua. Prandaj shpjegimi «zbritja bëhet vetëm kur heqim» është i ngushtë. Pyetja «Sa duhet t'i shtojmë Borës që të ketë po aq sa Ana?» lidh të njëjtin rezultat me plotësimin $5 + 3 = 8$.

Studenti duhet të hartojë histori të ndryshme për të njëjtin shkrim numerik. Kjo e ndihmon të dallojë strukturën matematikore nga fjalët e veçanta të tekstit. Historia duhet të jetë e besueshme dhe njësia e numërimit të mbetet e qartë.

9.1 Zbritja si gjetje e një të mbledhshmi

Thellim universitar • studim i pavarur

Për a dhe b në $\mathbb{N}_0$ me $a \geq b$, ndryshesa $a - b$ është numri i vetëm c në $\mathbb{N}_0$ që plotëson $b + c = a$. Ky përkufizim shpreh lidhjen themelore ndërmjet mbledhjes dhe zbritjes. Për $9 - 4$ kërkohet c i tillë që $4 + c = 9$; numri është 5. Heqja, plotësimi dhe krahasimi janë interpretime të kësaj marrëdhënieje.

Veçantia e c rrjedh nga ligji i thjeshtimit të mbledhjes. Nëse $b + c = b + t$, atëherë $c = t$. Në një model konkret, nga dy tërësi të barabarta veçohet e njëjta pjesë b dhe pjesët e mbetura janë të barabarta. Ky është argumenti i anulimit, jo një udhëzim mekanik për të "kaluar numrin në anën tjetër".

Zbritja nuk është veprim i mbyllur në $\mathbb{N}_0$ për çdo çift të renditur: $3 - 7$ nuk ka rezultat në këtë bashkësi. Në leksion përdoret kushti $a \geq b$. Gjithashtu, zbritja nuk ka vetinë e ndërrimit. Shprehjet $a - b$ dhe $b - a$ janë njëkohësisht të përcaktuara në $\mathbb{N}_0$ vetëm kur $a = b$; për $a > b$, $a - b$ është i përcaktuar, ndërsa $b - a$ jo: $7 - 3 = 4$, ndërsa $3 - 7$ nuk ka rezultat në $\mathbb{N}_0$. Zbritja nuk ka as vetinë e shoqërimit:

$$(9 - 4) - 2 = 3, \quad 9 - (4 - 2) = 7.$$

Të dy llogaritjet janë brenda kufirit, ndaj kundërshembulli nuk kërkon numra negativë.

Në gjuhën mësimore duhen shmangur pohimet se zbritja e zvogëlon gjithmonë numrin. Për $a - 0 = a$, sasia ruhet. Kur $0 < b \leq a$, ndryshesa është më e vogël se a. Formulimi i kushtëzuar e lidh rregullin me rastet që e bëjnë të vlefshëm.

10 Vija numerike dhe numërimi i hapave

Vija numerike paraqet numrat në pika të renditura me largësi të barabarta ndërmjet numrave njëpasnjëshëm. Njësia është segmenti nga një numër te pasardhësi, jo vetë pika. Mbledhja e një numri pozitiv përfaqësohet me zhvendosje djathtas dhe zbritja e tij me zhvendosje majtas, brenda kufirit të trajtuar. Për mbledhjen ose zbritjen e zeros nuk bëhet asnjë zhvendosje.

Pasi sasia fillestare është vendosur, numërohen hapat e rinj. Te 5 + 3 nisemi te 5 dhe bëjmë tre hapa, duke arritur te 6, 7 dhe 8. Numri 5 nuk numërohet si hapi i parë. Te 8 − 3 bëhen tre hapa majtas deri te 5.

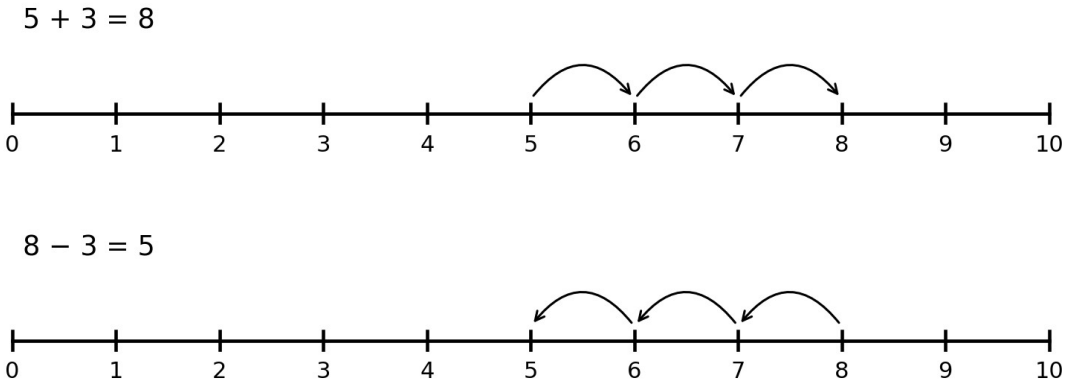


Figura 6. *Tre hapa djathtas nga 5 dhe tre hapa majtas nga 8.*

Shembulli i zgjidhur 7. Gabimi me një njësi

Nxënësi llogarit 5 + 3 duke thënë «5, 6, 7» dhe jep 7. Ai ka numëruar pikën e nisjes si një nga tre hapat. Mësuesi vendos shenjën te 5 dhe kërkon një zhvendosje për secilën nga tri shenja të reja.

Pas hapit të parë arrihet te 6, pas të dytit te 7 dhe pas të tretit te 8. Verifikimi bëhet me 4 + 2. Nëse nxënësi vetëm përsërit 8 pa dalluar pikën nga hapi, ndërhyrja nuk ka dhënë ende dëshmi të mjaftueshme të kuptimit.

Te Manes (2018), modeli i vijës numerike lidh veprimet me zhvendosje në njësi të barabarta. Ilustrimi këtu është hartuar posaçërisht me numra brenda 10. Mësuesi lidh çdo hark me një ndryshim sasior, duke shmangur përdorimin mekanik të shigjetave.

10.1 Tri rrugë për 8 − 3: cila është e vlefshme?

Numërimi prapa duket i thjeshtë, por ka të njëjtin rrezik si numërimi përpara: pika e nisjes ngatërrohet me hapin. Mësuesi duhet ta dallojë rrugën e vlefshme nga ajo që i ngjan, dhe ta argumentojë.

Aktiviteti 2. Katër nxënës, një zbritje

Për 8 − 3: Ana thotë «8, 7, 6» dhe përgjigjet 6. Beni thotë «7, 6, 5» dhe përgjigjet 5. Cima numëron nga 3 te 8, «4, 5, 6, 7, 8», dhe përgjigjet 5. Dea thotë «3 + 5 = 8, pra 5». Për secilin vendosni nëse rruga vlen në përgjithësi dhe argumentoni.

Zgjidhje. Çdo hap prapa e zvogëlon numrin me një, prandaj pas k hapash nga a arrihet a − k; pika e nisjes nuk është hap. Beni bën tre hapa nga 8 dhe arrin te 5: rruga e tij është e vlefshme. Ana e

numëron 8 si hapin e parë dhe bën vetëm dy zhvendosje; gabimi është i njëjti si «5, 6, 7» te mbledhja. Cima përdor zbritjen si plotësim, 3 + c = 8, dhe numëron pesë hapa: rruga vlen sepse a − b është numri c me b + c = a. Dea përdor drejtpërdrejt këtë marrëdhënie me një fakt të njohur. Anës i kërkohet të vendosë shenjën te 8 dhe të lidhë çdo objekt të hequr me një hap; transferimi kontrollohet me 7 − 2.

11 Pjesa, tërësia dhe lidhja e veprimeve

Ide kyçe

Një tërësi me 8 elemente mund të ndahet në një pjesë me 5 dhe një pjesë me 3. Nëse njihen dy pjesët, gjejmë tërësinë me mbledhje. Nëse njihet tërësia dhe një pjesë, gjejmë pjesën tjetër me zbritje. Ky model e bën të dukshme lidhjen ndërmjet dy veprimeve.

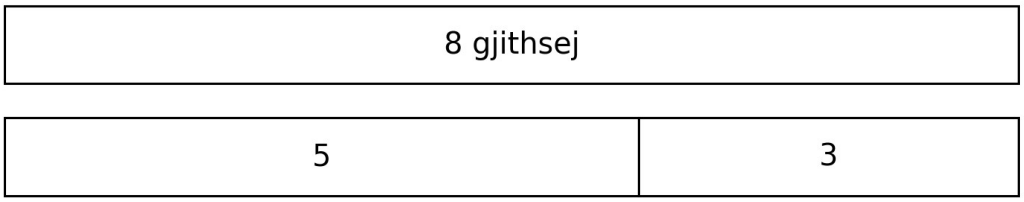


Figura 7. *E njëjta tërësi me tetë elemente ndahet në pjesët pesë dhe tre.*

$$5 + 3 = 8, \quad 3 + 5 = 8, \quad 8 - 5 = 3, \quad 8 - 3 = 5$$

Ndërrimi i rendit të dy pjesëve nuk e ndryshon shumën. Kjo shpjegon vetinë e ndërrimit të mbledhjes në modelin konkret. Zbritja nuk ka të njëjtën veti: në $\mathbb{N}_0$, 8 − 5 është e përcaktuar, ndërsa 5 − 8 nuk jep rezultat në këtë bashkësi. Nuk u kërkojmë fëmijëve numra negativë në këtë etapë.

Për të kontrolluar 8 − 5 = 3, mund të tregojmë se 5 + 3 = 8. Studentit i kërkohet të argumentojë pse kontrolli lidhet me pjesën që mungon. Ai nuk duhet të thotë vetëm «e bëjmë mbrapsht», sepse kjo nuk shpjegon marrëdhënien.

Zero dhe rastet kufitare

Shtimi i zeros nuk ndryshon sasinë: 6 + 0 = 6. Heqja e zeros lë po të njëjtën sasi: 6 − 0 = 6. Heqja e të gjithë sasisë jep zero: 6 − 6 = 0. Rastet demonstrohen me objekte dhe me pyetjen se çfarë ndryshoi realisht.

Shkrimi 0 − 6 nuk trajtohet si veprim me rezultat në $\mathbb{N}_0$. Për studentët sqarojmë kufirin e domenit; për fëmijët formulojmë situata që mund të realizohen me sasinë e disponueshme.

11.1 Vetitë e veprimeve dhe kuptimi i barazimit

THELLIM UNIVERSITAR • STUDIM I PAVARUR

Mbledhja ka vetinë e ndërrimit a + b = b + a dhe vetinë e shoqërimit

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Zeroja është element neutral: a + 0 = 0 + a = a. Në modelin kardinal, ndërrimi ndryshon rendin e paraqitjes së pjesëve; shoqërimi ndryshon mënyrën e grupimit të tri pjesëve; në të dy rastet objektet e tërësisë mbeten të njëjta. Vetitë mbështesin strategjitë e llogaritjes (Manes, 2018).

Për shembull, (2 + 3) + 4 dhe 2 + (3 + 4) japin të njëjtën tërësi me nëntë objekte. Studenti duhet të tregojë se kllapat përcaktojnë cila pjesë llogaritet fillimisht. Nuk kërkohet që nxënësi fillestar të mësojë emrin formal të vetisë përpara kuptimit të modelit.

Barazimi është marrëdhënie ndërmjet dy shprehjeve me të njëjtën vlerë. Ka vetinë e refleksivitetit a = a, të simetrisë nëse a = b atëherë b = a dhe të kalueshmërisë nëse a = b dhe b = c atëherë a = c. Simetria e barazimit nuk është e njëjta veti me ndërrimin e mbledhjes. Nga 3 + 5 = 8 marrim 8 = 3 + 5 me simetri; për të shkruar 8 = 5 + 3 përdorim edhe ndërrimin e të mbledhshmëve.

GABIM TIPIK • HIPOTEZA, JO DIAGNOZË E PRERË

Një detyrë diagnostikuese është 3 + 4 = □ + 2. Ana e majtë ka vlerë 7, prandaj në vendin bosh duhet 5. Përgjigjja 7 tregon se nxënësi mund ta ketë trajtuar vendin bosh si fundin e llogaritjes, pa kontrolluar anën e djathtë. Mësuesi kërkon vlerën e secilës anë pas zëvendësimit, duke dalluar interpretimin e simbolit nga gabimi aritmetik.

Aktiviteti 3. E vërtetë apo e rreme?

Gjykoni barazimet e Tabelës 2 pa i llogaritur me shkrim. Pastaj përshkruani tri profile: nxënësi që e lexon «=» si «këtu shkruhet përgjigjja», nxënësi që e kupton barazimin, por ka vështirësi me të panjohurën, dhe nxënësi që bën vetëm një gabim numerik.

Tabela 2. *Barazime diagnostikuese dhe çfarë dallon secili*

Barazimi	Vlera	Çfarë diagnostikon
5 + 3 = 6 + 2	E vërtetë	Pranon veprime në të dyja anët. Refuzimi («pas = duhet përgjigjja») tregon leximin operacional të shenjës.
8 = 8	E vërtetë	Pranon barazim pa veprim. Refuzimi («s'ka asgjë për të llogaritur») tregon të njëjtin keqkuptim në formë më të dobët.
5 + 3 = 8 + 2	E rreme	Pranimi («8 është përgjigjja») tregon se nxënësi lexon vetëm deri te shenja dhe e injoron anën e djathtë.
7 = 3 + 4	E vërtetë	Kontrollon nëse nxënësi e pranon veprimin në të djathtë të shenjës.

Barazimi	Vlera	Çfarë diagnostikon
5 + □ = 8	□ = 3	Përgjigjja 13 (5 + 8) tregon keqkuptim të shenjës; përgjigjja 2 ose 4, me barazime të gjykuara saktë, tregon gabim numerik ose vështirësi me të panjohurën.

Zgjidhje. Asnjë barazim nuk mjafton vetëm. Keqkuptimi i shenjës duket si model: pranon 5 + 3 = 8 + 2 dhe refuzon 5 + 3 = 6 + 2, 8 = 8 dhe 7 = 3 + 4. Vështirësia me të panjohurën duket kur të katër gjykimet janë të sakta, por 5 + □ = 8 zgjidhet gabim. Gabimi numerik duket kur nxënësi, i pyetur «sa bën secila anë?», i llogarit anët drejt dhe e korrigjon vetë gjykimin. Për të dalluar dy rastet e fundit, nxënësi shpjegon me fjalë çfarë kërkon □.

Ushtrimi me forma jotradicionale të barazimeve, si 4 = 2 + 2, e përmirësoi kuptimin e barasvlershmërisë në një eksperiment me 90 fëmijë 7–8 vjeç në seanca individuale (McNeil et al., 2011); në klasë efekti verifikohet me vlerësim formues.

Ora IV · Nga strategjia te vendimi didaktik

Dy nxënës mund të japin të njëjtin rezultat me arsyetime krejt të ndryshme, dhe një përgjigje e saktë mund të fshehë një procedurë të gabuar. Ora e fundit kalon nga strategjitë e llogaritjes te problemet me tekst dhe te analiza e gabimeve, ku njohuria matematike shndërrohet në vendim: çfarë pyet mësuesi, çfarë detyre jep dhe si e kupton nëse ndërhyrja funksionoi.

12 Strategjitë e llogaritjes dhe zbërthimi i numrit

Ide kyçe

Strategjitë ndërtohen mbi marrëdhëniet e numrave. Numërimi i të gjitha objekteve është një pikë nisjeje; numërimi në vijim ruan një sasi të njohur; përdorimi i fakteve të njohura shfrytëzon një marrëdhënie tashmë të kuptuar. Zgjedhja varet nga njohuritë e nxënësit dhe nga detyra.

Për 2 + 6 mund të përdoret 6 + 2 dhe të numërohet 7, 8. Për 4 + 5 mund të shfrytëzohet 4 + 4 = 8 dhe një njësi më shumë. Për 9 − 8 mund të kërkohet sa mungon nga 8 te 9. Asnjëra strategji nuk duhet paraqitur si rregull pa shpjegim.

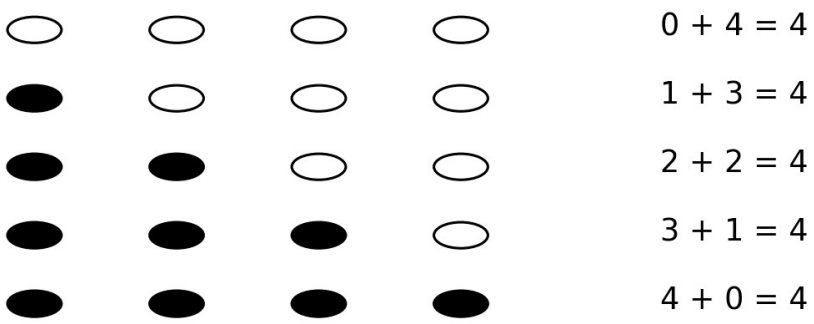


Figura 8. *Pesë zbërthimet e numrit 4 në dy pjesë të renditura.*

Shembulli i zgjidhur 8. Pse numërimi në vijim duhet argumentuar

Për 3 + 6 studenti propozon nisjen nga 6. Shpjegimi i plotë është: 3 + 6 = 6 + 3 nga ndërrimi i pjesëve; pastaj bëhen tre hapa 7, 8, 9. Përgjigjja është 9.

Udhëzimi «nis gjithmonë nga numri më i madh» është i paplotë nëse nuk shpjegohet pse mund të ndërrohen të mbledhshmit. Ai nuk transferohet pa kushte te zbritja. Për 9 − 3 nisemi nga tërësia 9 ose kërkojmë pjesën që mungon në 3 + □ = 9.

Zbërthimet e 4 krijohen duke kaluar një shenjë çdo herë nga pjesa e djathtë te e majta. Tërësia ruhet. Përmes këtij modeli studenti shpjegon se një numër mund të ndërtohet nga çifte të ndryshme dhe se lista duhet organizuar për të shmangur mungesa.

12.1 Rrjedhshmëria dhe zgjedhja e strategjisë

Rrjedhshmëria procedurale përfshin përdorimin e procedurave me fleksibilitet, saktësi, efikasitet dhe përshtatshmëri; nuk reduktohet në shpejtësinë e përgjigjes. Kuptimi konceptual lidhet me marrëdhëniet që e bëjnë procedurën të vlefshme. Kompetenca strategjike lidhet me formulimin dhe zgjidhjen e problemit, ndërsa arsyetimi adaptiv me shpjegimin dhe justifikimin. Përbërësi i pestë, pirja produktive, lidhet me bindjen se matematika ka kuptim dhe se përpjekja sjell rezultat. Të pesë përbërësit trajtohen si të ndërthurur nga National Research Council (2001).

Numërimi i të gjitha objekteve është i përshtatshëm kur të dy sasitë duhet të ndërtohen. Numërimi në vijim është më ekonomik kur njëra sasi është e njohur dhe mund të ruhet mendërisht. Faktet e nxjerra përdorin një marrëdhënie të njohur:

$$5 + 4 = 5 + 5 - 1 = 9.$$

Për 8 − 7, plotësimi nga 7 te 8 mund të jetë më i shkurtër se shtatë hapa prapa. Efikasiteti vlerësohet në raport me detyrën dhe njohuritë e nxënësit.

Për 6 + 3, tre nxënës mund të japin 9 me mënyra të ndryshme: numërim të nëntë objekteve, tri hapa pas gjashtës ose njohje të 6 + 2 = 8 dhe shtim të një njësie. Mësuesi kërkon të shpjegohet secila mënyrë dhe të identifikohet çfarë njohurie paraprake përdoret. Nuk vendoset një hierarki e ngurtë ku përdorimi i objekteve konsiderohet automatikisht i gabuar.

Dëshmia që kërkohet

Praktika duhet të ndryshojë paraqitjen dhe rendin e detyrave, të përfshijë rastet me zero dhe të lidhë faktet e mbledhjes me zbritjen. Një varg përgjigjesh të sakta në një format të vetëm mund të pasqyrojë familjaritetin me formatin. Detyrat me model, histori dhe barazim japin dëshmi plotësuese të transferimit.

13 Problemet me tekst dhe pozicioni i së panjohurës

Ide kyçe

Përzgjedhja e veprimit duhet të mbështetet në marrëdhënien e sasive. Fjalët «gjithsej», «më shumë» dhe «mbetën» mund të ndihmojnë në lexim, por nuk përcaktojnë të vetme veprimin. Studentit i kërkohet të identifikojë të dhënat, të panjohurën dhe lidhjen që i bashkon.

Krahasojmë tri histori: «Kishte 5 dhe shtoi 3; sa ka tani?», «Kishte 5 dhe tani ka 8; sa shtoi?» dhe «Shtoi 3 dhe tani ka 8; sa kishte?». Të tria përshkruajnë shtim, por kërkojnë pozicione të ndryshme të të panjohurës.

Situata	Modeli	Përgjigjja
Sasia përfundimtare mungon	5 + 3 = □	8
Sasia e shtuar mungon	5 + □ = 8	3
Sasia fillestare mungon	□ + 3 = 8	5

Situata	Modeli	Përgjigjja
Sasia më e vogël mungon	□ + 3 = 8	5

Rreshtat 3 dhe 4 kanë të njëjtin model, por strukturë të ndryshme: në të parin mungon sasia fillestare e një shtimi, në të dytin sasia më e vogël e një krahasimi.

> **Gabim tipik • hipoteza, jo diagnozë e prerë**
>
> Rreshti i fundit mund të lidhet me historinë: «Ana ka 8 kartela, 3 më shumë se Bora. Sa ka Bora?». Megjithëse teksti përmban «më shumë», sasia e panjohur gjendet me 8 − 3 = 5. Një model me dy shirita ose përputhje një për një e bën të dukshme marrëdhënien.

Zgjidhja ndjek këtë rend pune: ritregim i situatës; përcaktim i asaj që kërkohet; model konkret ose figurativ; shkrim numerik; interpretim i rezultatit në kontekst. Përgjigjja përfundimtare duhet të përmendë njësinë, për shembull «Bora ka 5 kartela».

Pyetje për arsyetim

«A duhet përgjigjja të jetë më e madhe apo më e vogël se 8? Pse?». Për historinë e Borës, përgjigjja duhet të jetë më e vogël. Ky parashikim shërben si kontroll kuptimor. Një rezultat i llogaritur saktë nga një veprim i zgjedhur gabim nuk e zgjidh problemin e dhënë.

13.1 Klasifikimi i strukturave problemore

Në situatat e ndryshimit dallohen sasia fillestare, ndryshimi dhe sasia përfundimtare. Te shtimi përdoret lidhja fillestare + ndryshim = përfundimtare; te heqja lidhja përfundimtare + ndryshim = fillestare. Secila prej tri sasive mund të jetë e panjohur. Te pjesë–tërësi mund të mungojë tërësia ose një pjesë. Te krahasimi dallohen sasia më e madhe, sasia më e vogël dhe ndryshesa; secila mund të jetë e panjohur. Këto dallime janë të rëndësishme në interpretimin e strategjive të fëmijëve (Carpenter et al., 2014).

Për shtimin, rastet 4 + 3 = □, 4 + □ = 7 dhe □ + 3 = 7 japin përkatësisht 7, 3 dhe 4. Histori për rastin e fundit: “Pas marrjes së tri kartelave, Ana ka shtatë; sa kishte më parë?”. Për heqjen, rastet 9 − 4 = □, 9 − □ = 5 dhe □ − 4 = 5 japin 5, 4 dhe 9. Te rasti i fundit sasia fillestare gjendet me mbledhje, edhe pse historia përshkruan heqje.

Për pjesë–tërësi, historia “Katër lapsa janë të zinj dhe tri të kuq” kërkon tërësinë shtatë. Historia “Shtatë lapsa janë në kuti, katër të zinj dhe pjesa tjetër të kuq” kërkon pjesën tri. Për krahasimin, “Ana ka 8 dhe Bora 5” kërkon ndryshesën 3; “Bora ka 5, Ana 3 më shumë” kërkon sasinë e madhe 8; “Ana ka 8, 3 më shumë se Bora” kërkon sasinë e vogël 5.

Modelet mund të kenë të njëjtin barazim dhe histori të ndryshme. Studenti identifikon strukturën përpara zgjidhjes, pastaj shpjegon pse modeli e ruan kuptimin. Klasifikimi nuk përdoret si listë emërtimesh për fëmijën; ai është mjet profesional për mësuesin që të ndryshojë vështirësinë pa e rritur domosdoshmërisht madhësinë e numrave.

14 Analiza e gabimeve dhe vlerësimi formues

Gabimi është një burim informacioni që kërkon interpretim. Mësuesi vëzhgon çfarë bëri nxënësi, kërkon shpjegimin, paraqet një rast që dallon interpretimet e mundshme dhe zgjedh ndërhyrjen. Rastet më poshtë janë hipotetike dhe shërbejnë për analizë profesionale.

Përgjigjja ose veprimi	Pyetja verifikuese dhe ndërhyrja
Numëron mirë vargun, por lë objekte pa prekur.	A lidhet çdo objekt me një fjalë? Zhvendos objektet e numëruara.
Thotë se rreshti më i gjatë ka më shumë.	A u shtua ndonjë objekt? Bëj përputhjen një për një.
Lexon 34 si 3 + 4.	Sa njëshe ka secila dhjetëshe? Hap një grup dhe numëro.
Krahason 47 dhe 52 vetëm nga njëshet.	Cili ka më shumë dhjetëshe? Ndërto të dy numrat.
Jep 7 për 5 + 3.	Numërove pika apo hapa? Lidh çdo shtim me një zhvendosje.
Zgjedh mbledhjen nga fjala më shumë.	Kush ka sasinë e njohur? Çfarë sasie kërkohet?

Tabela përmbledh hipotezën më të shpeshtë për secilën përgjigje; procedura e plotë me të paktën dy hipoteza jepet në seksionin 14.2.

14.1 Nga koncepti te vendimi didaktik

Korniza e mëposhtme sintetizon arsyetimin profesional që kërkohet nga studenti: koncepti matematikor lidhet me një keqkuptim të mundshëm, zgjidhet një detyrë diagnostikuese, interpretohet dëshmia e nxënësit dhe vetëm më pas argumentohet ndërhyrja didaktike.

Koncepti	Keqkuptimi i mundshëm	Detyra diagnostikuese	Dëshmia që kërkohet	Ndërhyrja didaktike
Kardinaliteti	Rreshti më i gjatë interpretohet si sasi më e madhe	Riorganizo të njëjtin koleksion pa shtuar ose hequr objekte	Nxënësi ruan numrin dhe shpjegon se sasia nuk ndryshoi	Përputhje një për një dhe numërim me kontroll të çdo objekti
Vlera vendore	Shifra lexohet vetëm si vlerë absolute, p.sh. 34 si 3 + 4	Ndërto 34 dhe kërko një paraqitje tjetër të barasvlershme	Nxënësi lidh 3 me tri dhjetëshe dhe 4 me katër njëshe	Shkëmbim 10 njëshe ↔ 1 dhjetëshe dhe verbalizim i njësisë së numërimit

Koncepti	Keqkuptimi i mundshëm	Detyra diagnostikuese	Dëshmia që kërkohet	Ndërhyrja didaktike
Krahasimi	Krahasohen vetëm shifrat e njësheve	Krahaso 47 dhe 52 me model dhjetor	Nxënësi nis nga dhjetëshet dhe argumenton 4 dhjetëshe < 5 dhjetëshe	Ndërtim paralel i numrave dhe lidhje model–simbol
Mbledhja në vijë numerike	Pika e nisjes numërohet si hap	Modelimi i 4 + 3 në vijë numerike	Nxënësi dallon pikën e nisjes nga tre zhvendosjet	Shënim i çdo hapi dhe kontroll me model konkret
Problemet me tekst	Fjala “më shumë” merret automatikisht si sinjal për mbledhje	Ardi ka 9 kartela, 4 më shumë se Lea. Sa ka Lea?	Nxënësi identifikon sasinë e njohur, të panjohurën dhe marrëdhënien	Model me shirita/përputhje dhe kontroll 5 + 4 = 9

Kjo kornizë nuk zëvendëson gjykimin profesional. Ajo e bën të dukshme lidhjen ndërmjet përmbajtjes matematikore, interpretimit të gabimit dhe zgjedhjes së një ndërhyrjeje të argumentuar.

Detyra e daljes në pesë minuta

Një nxënës thotë: “Zbritja do të thotë gjithmonë të heqësh objekte”. Në jo më shumë se katër fjali, studenti harton një histori krahasimi për 8 − 5 = 3 dhe shpjegon çfarë përfaqëson ndryshesa. Kërkohet një përgjigje individuale. Përgjigje orientuese: Ana ka 8 kartela dhe Bora 5; pas përputhjes së pesë çifteve, Ana ka tri kartela pa çift. Asnjë kartelë nuk është larguar; 3 tregon sa më shumë ka Ana. Një përgjigje e plotë përmban historinë e saktë dhe interpretimin e tri kartelave të papërputhura.

Frye et al. (2013) rekomandojnë një vijimësi zhvillimore për numrat e veprimet dhe ndjekjen e përparimit sipas njohurive të fëmijës. Udhëzuesi u drejtohet moshave parashkollore dhe kopshtit; këtu përdoret për themelet e numërimit, jo si program zyrtar i klasave fillore.

Përshtatja ruan objektivin: objekte më të mëdha ose të prekshme për vështirësi pamore, fjali mbështetëse për vështirësi gjuhësore dhe koleksione më të vogla për kontrollin e numërimit. Mësuesi verifikon që materiali ndihmon shprehjen e kuptimit pa e dhënë përgjigjen në vend të nxënësit. Për vështirësi pamore korniza e dhjetës ndërtohet me vende të prekshme dhe vija numerike me shenja të ngritura; për vështirësi leximi problemi lexohet me zë dhe të dhënat paraqiten me objekte. Mbështetja ul pengesën e aksesit, jo kërkesën matematikore.

14.2 Diagnoza diferenciale e përgjigjeve

Një përgjigje e gabuar mund të ketë më shumë se një shpjegim. Për 5 + 3 = 7 mund të jetë numëruar pika e nisjes si hap, mund të jetë harruar një objekt i shtuar ose mund të jetë kopjuar gabimisht rezultati. Diagnoza diferenciale është dallimi ndërmjet hipotezave përmes detyrave dhe pyetjeve që

prodhojnë dëshmi. Në këtë kontekst termi përshkruan analizë pedagogjike dhe nuk ka kuptim klinik.

Mësuesi kërkon fillimisht të tregohet procedura. Nëse nxënësi thotë “5, 6, 7”, provohet një detyrë me dy shtime dhe lidhje të çdo objekti me një hap. Nëse ndërton shtatë objekte, kontrollohet nëse ka marrë vërtet pesë dhe tri. Nëse modeli jep tetë dhe vetëm shkrimi jep shtatë, kontrollohet regjistrimi simbolik. Ndërhyrja duhet të ndjekë hipotezën e mbështetur nga veprimi i nxënësit.

Një pyetje që sugjeron përgjigjen nuk ka të njëjtën vlerë diagnostikuese si një kërkesë e hapur. “Janë tetë, apo jo?” mund të prodhojë pajtim pa kuptim. “Trego si e gjete dhe kontrolloje në një mënyrë tjetër” kërkon dëshmi më të pasur. Pas ndërhyrjes përdoret një rast me numra të ndryshëm; përsëritja e të njëjtit rezultat nuk provon transferim.

Njohuria për mësimdhënien përfshin aftësinë për të shpjeguar pse një zgjidhje është e vlefshme, për të interpretuar një paraqitje jostandarde dhe për të vlerësuar një arsyetim të nxënësit (Ball et al., 2008). Në vlerësimin universitar studenti duhet të lidhë hipotezën, detyrën verifikuese dhe ndërhyrjen; emërtimi i një gabimi pa këtë lidhje është përgjigje e paplotë.

Për seminarin dhe studimin e pavarur

Seksionet që vijojnë janë për seminar, praktikë mësimore dhe punë të pavarur: ushtrime me zgjidhje, raste profesionale, parimet didaktike, dy modele orësh, pyetje diskutimi, vlerësimi përfundimtar me rubrikën analitike dhe një mini-glosar.

15 Ushtrime për numrin dhe vlerën vendore

Ushtrimet 1–4 i drejtohen studentëve të mësuesisë. Pas secilës kërkesë jepet zgjidhja me argumentimin matematikor dhe shpjegimin metodik. Rekomandohet një përpjekje e pavarur përpara leximit të zgjidhjes.

Ushtrimi 1. Numri në situata të ndryshme

Shpjegoni funksionin e numrit në shprehjet «7 fletore», «nxënësi i shtatë» dhe «autobusi 7». Hartoni një pyetje që dallon sasinë nga pozicioni. Pastaj shpjegoni dallimin ndërmjet numrit 27 dhe dy shifrave që përdoren për ta shkruar.

Zgjidhje. Te “7 fletore”, numri 7 ka funksion kardinal: tregon numrin e elementeve të koleksionit. Te “nxënësi i shtatë”, ai përdoret në kuptim rendor: tregon pozicionin në një rresht të përcaktuar. Te “autobusi 7”, shkrimi është kod identifikimi; nuk na lejon të përfundojmë se autobusi ka shtatë udhëtarë ose është i shtati në një varg.

Një pyetje dalluese është: “Në rresht janë dhjetë nxënës; cili është i shtati nga e majta dhe sa nxënës ka gjithsej?”. Përgjigjet janë një nxënës i caktuar dhe sasia 10. Drejtimi “nga e majta” duhet deklaruar, sepse ndryshimi i pikës së nisjes mund të ndryshojë pozicionin rendor.

Numri 27 shkruhet me shifrat 2 dhe 7. Në sistemin dhjetor, 2 është në vendin e dhjetësheve dhe përfaqëson 20 njëshe, ndërsa 7 përfaqëson 7 njëshe: 27 = 20 + 7. Për kontroll, studenti modelon 27 me dy tufa prej dhjetë shkopinjsh dhe shtatë shkopinj të veçuar. Kështu dallohet identifikimi i shifrave nga kuptimi i vlerës së tyre.

Ushtrimi 2. Numërimi dhe ruajtja e sasisë

Nxënësi numëron saktë 8 shenja. Mësuesi i shpërndan më larg dhe nxënësi thotë: «Tani ka më shumë». Çfarë kuptimi duhet verifikuar? Përshkruani një ndërhyrje me përputhje dhe një pyetje kontrolli. Mos nxirrni përfundim të përgjithshëm për aftësinë e nxënësit nga ky rast i vetëm.

Zgjidhje. Hipoteza që duhet verifikuar është se nxënësi e lidh sasinë me gjatësinë e rreshtit ose me largësinë ndërmjet shenjave. Meqë vetëm vendosja ndryshoi, numri mbetet 8. Ky rast nuk mjafton për një diagnozë të përgjithshme: nxënësi mund të mos e ketë ndjekur zhvendosjen ose mund ta ketë kuptuar ndryshe pyetjen.

Mësuesi pyet: “A shtova ose hoqa ndonjë shenjë, apo vetëm i largova nga njëra-tjetra?”. Për demonstrim përdoren dy koleksione me nga tetë objekte. Njëri vendoset ngushtë, tjetri më gjerë. Formohen tetë çifte, secili me një objekt nga çdo koleksion. Meqë asnjë objekt nuk mbetet pa çift, koleksionet kanë të njëjtin numër elementesh pavarësisht gjatësisë së rreshtave.

Më pas riorganizohet koleksioni fillestar dhe nxënësi kërkohet të argumentojë pa u mbështetur vetëm te pamja. Për transferim përdoren pesë objekte: “Nëse i vendosim në rreth pa shtuar asnjë, sa

do të jenë? Pse?”. Dëshmia e kërkuar është lidhja e ruajtjes së sasisë me mungesën e shtimit ose heqjes; rinumërimi përdoret si kontroll.

Ushtrimi 3. Modelimi i numrave

Paraqitni 46, 60 dhe 100 me njëshe, dhjetëshe dhe, kur duhet, qindëshe. Për 46 jepni ndarjen standarde dhe një ndarje tjetër që ruan sasinë. Shpjegoni pse 60 dhe 6 nuk kanë të njëjtën vlerë.

Zgjidhje. Ndarjet standarde janë: 46 = 40 + 6, pra 4 dhjetëshe dhe 6 njëshe; 60 = 60 + 0, pra 6 dhjetëshe dhe 0 njëshe të veçuara; 100 = 1 qindëshe, 0 dhjetëshe dhe 0 njëshe. Njëqind mund të përfaqësohet edhe me 10 dhjetëshe ose 100 njëshe.

Një ndarje jostandarde e 46 është 3 dhjetëshe dhe 16 njëshe, sepse 30 + 16 = 46. Ajo merret duke hapur njërën nga katër tufat: 10 njëshet e saj bashkohen me 6 njëshet e veçuara. Asnjë shkop nuk shtohet ose hiqet; ndryshon organizimi i sasisë. Rigrupimi i dhjetë prej gjashtëmbëdhjetë njësheve e rikthen ndarjen standarde.

Te 60, shifra 6 përfaqëson 6 dhjetëshe, pra 60 njëshe; te 6 përfaqëson 6 njëshe. Zeroja te 60 tregon mungesën e njësheve të veçuara në ndarjen standarde dhe ruan vendin e njësheve. Për ta demonstruar dallimin, krahasohen gjashtë tufa me gjashtë shkopinj të veçuar. Vizatimi duhet të saktësojë vlerën e çdo shufre.

Ushtrimi 4. Krahasimi dhe tabela

Renditni në rritje 28, 82, 40, 39 dhe 100. Argumentoni 39 < 40 pa u mbështetur vetëm në mësimin përmendsh. Në tabelën 1–100, gjeni numrin poshtë 28, numrin djathtas 28 dhe pasardhësin e 30. Shpjegoni pse pasardhësi i 30 nuk është në një kuti djathtas brenda të njëjtit rresht.

Zgjidhje. Renditja në rritje është 28 < 39 < 40 < 82 < 100. Fillimisht krahasohen dhjetëshet për numrat dyshifrorë. 28 ka dy dhjetëshe, 39 tri, 40 katër dhe 82 tetë. Numri 100 përfaqëson një qindëshe, pra dhjetë dhjetëshe, dhe është më i madh se secili prej tyre.

Për të argumentuar 39 < 40, ndërtohen 3 dhjetëshe dhe 9 njëshe. Një njëshe shtesë plotëson grupin e dhjetë njësheve dhe krijon dhjetëshen e katërt. Kështu 40 ka një njëshe më shumë se 39. Ky është argument për sasinë dhe strukturën, jo vetëm përsëritje e vargut të numrave.

Në tabelën me rreshtat 1–10, 11–20 e kështu me radhë, poshtë 28 është 38, sepse lëvizja një rresht poshtë në të njëjtën shtyllë shton 10; djathtas 28 është 29, sepse brenda rreshtit shtohet 1. Pasardhësi i 30 është 31, në fillim të rreshtit vijues. Pozicioni në tabelë varet nga organizimi i saj; marrëdhënia “një më shumë” mbetet e vlefshme edhe kur nuk ekziston një kuti djathtas.

Kërkesa për paraqitjen e përgjigjeve

Çdo zgjidhje duhet të saktësojë njësinë e numërimit. Nëse vizatohen gjashtë shufra, duhet të thuhet nëse secila shufër përfaqëson një njëshe apo një dhjetëshe. Vizatimi pa marrëveshje për njësinë nuk është model i mjaftueshëm.

16 Ushtrime për mbledhjen dhe zbritjen

Të gjitha veprimet e kësaj banke mbeten brenda 0–10. Pas çdo ushtrimi jepet zgjidhja e argumentuar. Studentët përdorin objekte, vizatime ose vijë numerike dhe shpjegojnë lidhjen e modelit me shkrimin numerik.

Ushtrimi 5. Dy kuptime të mbledhjes

Hartoni dy probleme që modelohen nga 4 + 3 = 7: një me shtim te një sasi fillestare dhe një me dy pjesë të një tërësie. Identifikoni kuptimin e secilit numër. Shpjegoni pse asnjë objekt nuk duhet numëruar në të dy pjesët.

Zgjidhje. Problem me shtim: “Në kuti janë 4 lapsa. Vendosim edhe 3 lapsa të tjerë. Sa lapsa janë tani?”. Numri 4 tregon sasinë fillestare, 3 numrin e lapsave të shtuar dhe 7 sasinë përfundimtare. Ndërtohen katër shenja dhe shtohen tri të tjera; numërimi i të gjitha ose numërimi në vijim jep 4 + 3 = 7.

Problem me pjesë dhe tërësi: “Në kuti janë 4 lapsa të zinj dhe 3 lapsa të kuq. Sa lapsa janë gjithsej?”. Numrat 4 dhe 3 tregojnë dy pjesë të dallueshme, ndërsa 7 tërësinë. Këtu nuk është e domosdoshme një ngjarje në kohë: të dy grupet janë të pranishme dhe numërohen së bashku.

Të njëjtët numra dhe i njëjti barazim mund të përfaqësojnë struktura të ndryshme të historisë. Në modelin e dy koleksioneve, një objekt nuk duhet të përfshihet njëkohësisht në të dy pjesët, sepse do të numërohej dy herë. Për kontroll, studenti tregon cilat objekte përfaqësojnë çdo të mbledhshëm dhe pse çdo laps ka vetëm një kontribut në total.

Ushtrimi 6. Tri kuptime të zbritjes

Hartoni tri histori për 9 − 4 = 5: heqje, plotësim dhe krahasim. Në historinë e plotësimit shkruani edhe mbledhjen me një të mbledhshëm që mungon. Jepni një paraqitje të përshtatshme për krahasimin.

Zgjidhje. Heqje: “Nga 9 kartela, Era dhuron 4. Sa i mbeten?”. Numri 9 tregon sasinë fillestare, 4 pjesën e larguar dhe 5 pjesën e mbetur. Modeli me nëntë shenja, prej të cilave largohen katër, jep 9 − 4 = 5.

Plotësim: “Era ka 4 kartela dhe dëshiron të ketë 9. Sa kartela të tjera i duhen?”. Modeli është 4 + □ = 9. Nga 4 numërohen pesë shtime: 5, 6, 7, 8, 9. Pesë është numri i hapave dhe sasia që mungon, prandaj 9 − 4 = 5. Pika e nisjes 4 nuk numërohet si hap.

Krahasim: “Ana ka 9 kartela dhe Bora 4. Sa kartela më shumë ka Ana?”. Katër çifte përputhin pjesët e barabarta të dy koleksioneve; pesë kartela të Anës mbeten pa çift. Ndryshesa është 5 edhe pse asnjë kartelë nuk është hequr fizikisht. Në të tri historitë lidhja pjesë–tërësi kontrollohet me 4 + 5 = 9, por kuptimi kontekstual i çdo sasie ndryshon.

Ushtrimi 7. Strategjitë dhe faktet e lidhura

Zgjidhni dhe shpjegoni: 2 + 7; 4 + 5; 9 − 8; 6 − 0; 6 − 6. Përdorni të paktën tri strategji të ndryshme në tërësi. Për numrat 2, 6 dhe 8 shkruani dy mbledhje dhe dy zbritje të lidhura.

Zgjidhje. Për 2 + 7, ndërrojmë rendin e të mbledhshmëve: 2 + 7 = 7 + 2. Nisemi nga sasia e njohur 7 dhe bëjmë dy shtime, duke arritur te 8 dhe 9. Rezultati është 9. Për 4 + 5 përdorim dyfishin e njohur 4 + 4 = 8 dhe një njësi shtesë: 4 + 5 = 9. Numri 5 është 4 + 1, ndaj modeli ka dy grupe me nga katër dhe një objekt shtesë.

Për 9 − 8 përdorim plotësimin: nga 8 te 9 mungon një njësi, prandaj ndryshesa është 1 dhe kontrolli është 8 + 1 = 9. Për 6 − 0 nuk largohet asnjë objekt dhe sasia mbetet 6. Për 6 − 6 largohet i gjithë koleksioni dhe mbeten 0 objekte. Këtu përdoren numërimi në vijim, dyfishi me një njësi shtesë, plotësimi dhe interpretimi i rasteve me zero.

Faktet e lidhura janë 2 + 6 = 8, 6 + 2 = 8, 8 − 2 = 6 dhe 8 − 6 = 2. Modeli është një tërësi me tetë objekte, e ndarë në pjesët dy dhe gjashtë. Njohja e dy pjesëve jep tërësinë; njohja e tërësisë dhe njërës

pjesë jep pjesën tjetër. Ky argument shpjegon lidhjen e veprimeve dhe shmang memorizimin e katër barazimeve të palidhura.

Ushtrimi 8. Vija numerike dhe barazia

Një nxënës jep 6 për 4 + 3, sepse numëron «4, 5, 6». Shpjegoni gabimin dhe modeloni zgjidhjen e saktë. Më pas plotësoni 3 + □ = 8 dhe 8 = □ + 3. A ndryshon numri që mungon? Pse?

Zgjidhje. Nxënësi ka numëruar pikën e nisjes 4 si hapin e parë. Vargu “4, 5, 6” përfshin vetëm dy zhvendosje, 4 në 5 dhe 5 në 6. Për të shtuar 3, nga 4 duhen tre hapa: 4 në 5, 5 në 6 dhe 6 në 7. Prandaj 4 + 3 = 7. Secilit prej tri objekteve të shtuara i bashkëngjitet një hap i ri.

Te 3 + □ = 8 mungon 5, sepse 3 + 5 = 8. Te 8 = □ + 3 mungon sërish 5, sepse 8 = 5 + 3. Nga 3 + 5 = 8 te 8 = 3 + 5 përdoret simetria e barazimit; nga 8 = 3 + 5 te 8 = 5 + 3 përdoret edhe vetia e ndërrimit të mbledhjes. Shenja = shpreh barazi vlerash dhe nuk kërkon që përgjigjja të jetë në të djathtë.

Për kontroll përdoren tri shenja të njohura dhe pesë shenja plotësuese që japin tetë. Nxënësi ndërton të dy shkrimet nga ky model. Një detyrë transferimi, si 2 + □ = 7 dhe 7 = □ + 2, kontrollon nëse ka kuptuar barazinë dhe të panjohurën, në vend që të ketë mbajtur mend vetëm rezultatin 5.

Kontrolli i kuptimit

Në përgjigje duhet të dallohen rezultati, strategjia dhe arsyeja e vlefshmërisë së strategjisë. Shkrimi i një përgjigjeje numerike pa model ose shpjegim nuk e përmbush kërkesën metodike të këtyre ushtrimeve.

17 Ushtrime për projektimin e mësimdhënies

Ushtrimet 9–12 kërkojnë analizë të situatës mësimore dhe zgjedhje të argumentuara. Janë detyra profesionale për studentët, jo fletë pune për t’u dhënë pa përshtatje fëmijëve. Zgjidhja dhe arsyetimi metodik vendosen menjëherë pas çdo ushtrimi.

Ushtrimi 9. Të gjitha zbërthimet

Gjeni të gjitha çiftet e renditura të numrave natyrorë, duke përfshirë zeron, që kanë shumën 6. Shpjegoni si siguroheni se nuk mungon asnjë çift. Propozoni një demonstrim me gjashtë shenja që ruan tërësinë gjatë ndryshimit të pjesëve.

Zgjidhje. Çiftet e renditura të numrave natyrorë, duke përfshirë zeron, me shumën 6 janë: (0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 0). Lista është e plotë, sepse për çiftin (a, b) kushti a + b = 6, me a dhe b numra të plotë jonegativë, kërkon që a të jetë një nga numrat 0 deri në 6. Për çdo a, vlera b = 6 − a përcaktohet në mënyrë të vetme.

Çiftet janë të renditura: (1, 5) dhe (5, 1) janë dy çifte të ndryshme, sepse pozicionet e përbërësve ndryshojnë, edhe pse shumat janë të barabarta. Nëse kërkoheshin vetëm ndarje pa dalluar rendin e pjesëve, do të mbeteshin katër raste: 0 dhe 6; 1 dhe 5; 2 dhe 4; 3 dhe 3. Kërkesa e ushtrimit përcakton se cila listë përdoret.

Në demonstrim, gjashtë shenja vendosen fillimisht në pjesën e djathtë dhe asnjë në të majtën. Çdo hap zhvendos një shenjë djathtas–majtas, pa e shtuar ose hequr nga tërësia. Regjistrohen dy sasitë pas çdo zhvendosjeje. Pyetja “Çfarë rritet, çfarë zvogëlohet dhe çfarë mbetet e njëjtë?” lidh ndryshimin e pjesëve me ruajtjen e shumës 6.

Ushtrimi 10. Problemi me fjalën më shumë

Ardi ka 9 kartela, 4 më shumë se Lea. Sa kartela ka Lea? Një nxënës zgjedh mbledhjen sepse lexon «më shumë». Para llogaritjes, çfarë pyetjesh do të bëni? Jepni një model dhe një kontroll të përgjigjes.

Zgjidhje. Ardi ka 9 kartela dhe sasia e tij është 4 më e madhe se ajo e Leas. Prandaj 9 përbëhet nga kartelat e Leas dhe katër kartela shtesë: □ + 4 = 9. Sasia e Leas është 9 − 4 = 5 kartela. Para llogaritjes kontrollojmë kuptimin me pyetjet “Kush ka më shumë?”, “Cilën sasi njohim?” dhe “A duhet Lea të ketë më pak apo më shumë se 9?”.

Modeli konkret nis me nëntë kartela të Ardit. Katër shënohen si teprica ndaj sasisë së Leas. Pesë të tjerat tregojnë sasinë që mund të përputhet me kartelat e saj. Në modelin me shirita, shiriti i Ardit ndahet në një pjesë të panjohur, të barabartë me sasinë e Leas, dhe një pjesë me vlerë 4. Kontrolli është 5 + 4 = 9.

Fjala “më shumë” përshkruan marrëdhënien ndërmjet dy sasive, por nuk përcakton vetvetiu veprimin që gjen të panjohurën. Zgjedhja 9 + 4 do t’i jepte Leas 13 kartela, më shumë se Ardi, duke kundërshtuar historinë. Ky kontroll kuptimor identifikon gabimin e modelimit përpara korrigjimit të llogaritjes.

Ushtrimi 11. Sekuencë për dhjetëshen

Projektoni një shpjegim tetëminutësh për lidhjen dhjetë njëshe–një dhjetëshe. Përdorni një minutë për kontroll paraprak, tri për modelim, dy për pyetje dhe dy për verifikim. Përcaktoni objektivin, materialin dhe dëshminë e të nxënit. Mos e mbështetni suksesin vetëm në shqiptimin e fjalës dhjetëshe.

Zgjidhje. Objektivi është që nxënësi të shpjegojë se një dhjetëshe përfaqëson dhjetë njëshe dhe se grupimi nuk e ndryshon sasinë. Materialet janë njëzet shkopinj dhe dy lidhëse. Në minutën 0–1 kontrollohet numërimi i dhjetë shkopinjve me përputhje një për një; shqiptimi i vargut pa kontroll të objekteve nuk mjafton.

Në minutat 1–4, dhjetë shkopinjtë lidhen në një tufë dhe emërtohen “një dhjetëshe”. Tufa hapet dhe lidhet përsëri për të treguar se sasia mbetet dhjetë. Në minutat 4–6 pyetet “Sa tufa kemi?”, “Sa shkopinj përfaqëson ajo?” dhe “A ndryshoi sasia kur i lidhëm?”. Nxënësi duhet të dallojë numërimin e tufave nga numërimi i njësheve që ato përmbajnë.

Në minutat 6–8 nxënësi ndërton dy tufa dhe shpjegon se dy dhjetëshe përfaqësojnë njëzet njëshe. Nëse ky zgjerim është i vështirë, kontrolli bëhet me një tufë të hapur dhe kërkohet rindërtimi i saj nga dhjetë shkopinj. Dëshmia është marrëdhënia e argumentuar ndërmjet grupit dhe njësheve; shqiptimi i fjalës “dhjetëshe” nuk e provon i vetëm kuptimin.

Ushtrimi 12. Përgjigjja e një studenti

Studenti shkruan: «Mbledhja e bën gjithmonë numrin më të madh; zbritja do të thotë të heqësh; te numri 50 zero mund të mos shkruhet». Analizoni secilin pohim. Jepni raste që tregojnë kufirin ose pasaktësinë e tij dhe riformuloni shpjegimet për përdorim profesional.

Zgjidhje. Pohimi “mbledhja e bën gjithmonë numrin më të madh” ka një përjashtim brenda numrave jonegativë: 5 + 0 = 5. Shuma është më e madhe se njëri i mbledhshëm vetëm kur i mbledhshmi tjetër është pozitiv. Riformulimi është: “Shtimi i një sasie pozitive e rrit sasinë fillestare; shtimi i zeros e ruan atë”.

Pohimi “zbritja do të thotë të heqësh” përshkruan një model të vlefshëm, por nuk mbulon të gjitha kuptimet e zbritjes. Te krahasimi i 8 kartelave me 5, ndryshesa 3 gjendet me përputhje pa larguar fizikisht asnjë kartelë. Riformulimi është: “Zbritja mund të gjejë sasinë e mbetur pas heqjes, pjesën që mungon ose ndryshesën ndërmjet dy sasive”.

Pohimi “te 50 zero mund të mos shkruhet” është i pasaktë: heqja e zeros jep shkrimin 5, me vlerë tjetër. Te 50, shifra 5 përfaqëson 5 dhjetëshe dhe zeroja tregon 0 njëshe të veçuara në ndarjen standarde. Riformulimi është: “Zeroja në vendin e njësheve ruan shkrimin pozicional të pesë dhjetësheve”. Krahasimi i pesë tufave me pesë shkopinj të veçuar e bën të dukshëm ndryshimin.

Rasti profesional 1. Dy ndërhyrje për vlerën vendore

Një nxënës lexon 32 saktë, por ndërton tri kapëse dhe dy kapëse. Mësuesi A kërkon të përsëritet dhjetë herë fjalia “3 janë dhjetëshet dhe 2 njëshet”. Mësuesi B kërkon tri tufa me nga dhjetë, dy kapëse të veçuara dhe hapjen e një tufe. Krahasoni ndërhyrjet, formuloni hipotezën dhe jepni një detyrë transferimi.

Zgjidhje. Hipoteza është se nxënësi i interpreton shifrat si dy sasi njëshe, pa e lidhur pozicionin me dhjetëshen. Megjithatë, para ndërhyrjes pyetet çfarë përfaqëson secili grup: një përgjigje mund të tregojë se nxënësi kishte menduar secilën kapëse si shenjë për një dhjetëshe. Njësia referuese duhet verifikuar përpara diagnozës.

Ndërhyrja B është më e përshtatshme nëse kapësetjanë numëruar vërtet si pesë njëshe, sepse e bën të kontrollueshme marrëdhënien 10 njëshe = 1 dhjetëshe. Përsëritja verbale e A mund të ndihmojë terminologjinë, por nuk jep dëshmi të mjaftueshme për kuptimin. Hapja e një tufe jep 2 dhjetëshe dhe 12 njëshe, gjithsej 32. Nxënësi duhet ta shpjegojë ruajtjen e sasisë.

Për transferim kërkohet modelimi i 41 dhe më pas interpretimi i 40. Nëse përdor katër kapëse për 40, rikthehet pyetja për vlerën e çdo kapëseje; nuk supozohet automatikisht i njëjti gabim. Dëshmia e suksesit është lidhja e modelit me shkrimin dhe me njësinë e numërimit.

Rasti profesional 2. Numërimi i hapave ose kujtesa e faktit

Për 4 + 3 një nxënës jep 6. Mësuesi A kërkon të mësohet përmendsh “4 plus 3 bëjnë 7”. Mësuesi B vendos shenjën te 4 dhe lidh tri objekte të reja me tri zhvendosje. Cila ndërhyrje duhet zgjedhur dhe në çfarë kushtesh?

Zgjidhje. Fillimisht kërkohet procedura. Nëse nxënësi thotë “4, 5, 6”, hipoteza e numërimit të pikës së nisjes mbështetet dhe ndërhyrja B adreson drejtpërdrejt dallimin pikë–hap. Tri zhvendosjet janë 4 në 5, 5 në 6 dhe 6 në 7. Modeli lidhet edhe me shtimin e tri objekteve te katër të njohura.

Memorizimi i faktit mund të kontribuojë më vonë në rrjedhshmëri, por nuk korrigjon vetvetiu gabimin procedural. Nëse nxënësi ndërton saktë shtatë objekte dhe vetëm shkruan 6, duhet kontrolluar regjistrimi simbolik. Zgjedhja e B pa këtë verifikim do të ishte ndërhyrje e bazuar në hamendësim.

Kontrolli pasues përdor 5 + 2 dhe kërkon të shënohet pika e nisjes, numri i hapave dhe pika përfundimtare. Një përgjigje e saktë për 4 + 3 menjëherë pas demonstrimit nuk mjafton; transferimi tregon nëse është ndryshuar procedura.

Rasti profesional 3. Fjala kyçe ose marrëdhënia e sasive

Në problemin “Lira ka 7 kartela, 2 më shumë se Drita”, një nxënës zgjedh 7 + 2. Mësuesi A e zëvendëson shprehjen “më shumë” me “më pak” në tekstin që lexon nxënësi. Mësuesi B ruan historinë dhe kërkon një model të dy sasive. Vlerësoni dy zgjedhjet.

Zgjidhje. Në historinë e dhënë sasia më e madhe është e njohur dhe sasia më e vogël është e panjohur. Modeli është □ + 2 = 7 dhe Drita ka 5 kartela. Ndërhyrja B ruan problemin dhe e orienton nxënësin te marrëdhënia. Në modelin me shirita, shiriti i Lirës përbëhet nga shiriti i Dritës dhe pjesa me dy kartela.

Ndryshimi i fjalës pa riformulim të plotë mund të ndryshojë kuptimin ose të ruajë varësinë nga fjalët kyçe. Një riformulim i saktë është “Drita ka dy kartela më pak se Lira, e cila ka shtatë”. Ai mund të përdoret si mënyrë e dytë për të interpretuar të njëjtën marrëdhënie, pasi modeli është kuptuar; nuk duhet të shërbejë vetëm si sinjal për zbritjen.

Për transferim jepet “Drita ka 5 kartela dhe Lira 2 më shumë”. Tani e panjohura është sasia më e madhe dhe përdoret 5 + 2 = 7. Dy problemet krahasohen për të treguar se i njëjti raport sasior mund të kërkojë veprime të ndryshme sipas të panjohurës.

Rasti profesional 4. Përgjigjja e shpejtë dhe kuptimi i barazimit

Një nxënës plotëson saktë 3 + 4 = □, por shkruan 7 te 3 + 4 = □ + 2. Mësuesi A shton ushtrime të të njëjtit format me përgjigjen në fund. Mësuesi B kërkon të llogariten dhe të krahasohen të dy anët. Argumentoni zgjedhjen dhe kontrollin.

Zgjidhje. Përgjigjja sugjeron interpretimin operacional të simbolit = si sinjal për rezultatin. Megjithatë, kontrollohet nëse nxënësi e lexoi edhe pjesën + 2 dhe nëse e kupton vendin bosh. Pasi kjo verifikohet, ndërhyrja B është më e lidhur me objektivin relacional të barazimit.

Me 7 në vendin bosh, ana e majtë jep 7 dhe ana e djathtë jep 9; barazimi nuk është i vërtetë. Kërkohet një sasi që, së bashku me dy, të japë shtatë: ajo është pesë. Modeli mund të përdorë dy koleksione me nga shtatë elemente, të ndara përkatësisht në 3 dhe 4, e në 5 dhe 2.

Ushtrimet e A mund të rrisin saktësinë e fakteve, por nuk kontrollojnë problemin e interpretimit të barazimit. Transferimi përfshin 8 = 5 + □ dhe 4 + 2 = 3 + □. Përgjigjet janë 3 dhe 3. Nxënësi duhet të kontrollojë të dy anët; shpejtësia e plotësimit vlerësohet veçmas nga argumentimi.

Kriteri i cilësisë

Një projektim i mirë lidh detyrën me atë që duhet të kuptohet. Pyetja «A e kuptuat?» është e pamjaftueshme si provë; kërkohet një veprim ose shpjegim që tregon si e përdor nxënësi marrëdhënien në një rast të ri.

Për detyrat metodike përdoret rubrika analitike me katër nivele e seksionit 22.

Konteksti profesional i arsimit fillor në Mal të Zi

Ky leksion zhvillohet në programin universitar për formimin e mësuesve në gjuhën shqipe të Universitetit të Malit të Zi. Analiza metodike synon praktikën e arsimit fillor në Mal të Zi: programi zyrtar dhe teksti shkollor i klasës përdoren si kontekst i mësimdhënies, ndërsa baza teorike ruan karakterin universitar dhe ndërkombëtar. Burimet ndërkombëtare të këtij leksioni nuk paraqiten si standarde vendore.

Fokusi	Niveli i fëmijës	Analiza e studentit-mësues	Dëshmia që kërkohet
Numërimi	Koleksione konkrete dhe paraqitje	Kardinaliteti dhe korrespondenca një-për-një	A numëron çdo objekt vetëm një herë dhe kupton se numri i fundit jep sasinë?
Vlera vendore	Njëshe dhe dhjetëshe	Grupim/rigrupim dhe njësi e numërimit	A shpjegon çfarë përfaqëson çdo shifër, jo vetëm si lexohet numri?
Krahasimi	Modele, tabelë dhe vijë numerike	Marrëdhëniet <, >, = të mbështetura në kuptim	A argumenton krahasimin përmes dhjetësheve/njësheve ose modelit?
Mbledhja/zbritja	Situata problemore dhe modele	Shtim, pjesë-tërësi, heqje, plotësim, krahasim	A zgjedh veprimin nga marrëdhënia dhe jo nga një fjalë kyçe?

Parim pune për studentin: teksti shkollor dhe materiali konkret janë burime të mësimdhënies; vendimi profesional i mësuesit kërkon gjithmonë interpretim të dëshmisë së të nxënit. Prandaj sekuenca e rekomanduar mbetet: koncept → keqkuptim i mundshëm → detyrë diagnostikuese → dëshmi → ndërhyrje e argumentuar.

18 Parimet didaktike që lidhin numrin me veprimet

Të nxënit e numrit përfshin ndërtimin e lidhjeve ndërmjet sasisë, fjalës numerike, shkrimit dhe marrëdhënieve me numra të tjerë. Mësuesi organizon përvoja ku këto lidhje bëhen të dukshme dhe të kontrollueshme. Një nxënës që lexon 36, por ndërton tri objekte dhe gjashtë objekte, ka zotëruar një aspekt të shkrimit pa kuptuar ende strukturën pozicionale.

Njohuritë paraprake dhe kalimet ndërmjet paraqitjeve

Para grupimit në dhjetëshe, kontrollohet numërimi i njësheve dhe ruajtja e sasisë gjatë zhvendosjes së objekteve. Para numërimit në vijim, kontrollohet nëse nxënësi e trajton sasinë fillestare si të njohur. Para përdorimit të vijës numerike, kontrollohet dallimi ndërmjet pikës dhe hapit. Këto kontrolle e orientojnë përzgjedhjen e shembujve dhe ritmin e punës.

Paraqitja konkrete mund të jetë një koleksion kapësesh; paraqitja figurative, një vizatim i tyre; paraqitja simbolike, një numër ose barazim. Kalimi nuk kryhet automatikisht nga ekspozimi ndaj materialit. Për 6 + 2 = 8, nxënësi duhet të identifikojë cilat objekte përfaqësojnë 6, cilat përfaqësojnë 2 dhe çfarë tregon 8. Më pas kërkohet kalimi i anasjelltë: nga barazimi te një model ose një histori.

Ndryshimi i shembujve dhe përgjithësimi

Në fillim ndryshohet vetëm një veçori, duke ruajtur marrëdhënien që synohet të kuptohet. Gjashtë objekte mund të jenë të mëdha ose të vogla, afër ose larg, të vendosura në vijë ose në rreth. Për grupimin dhjetor përdoren 23, 32 dhe 30, që të dallohet pozicioni i shifrës dhe roli i zeros. Për krahasimin përfshihet edhe një çift me dhjetëshe të njëjta, që njëshet të mos shpallen të parëndësishme.

Saktësia e gjuhës dhe arsyetimi

Termat përdoren me referim të qartë: numër, shifër, njëshe, dhjetëshe, shumë dhe ndryshesë. Për 32, pohimi “3 është numri i dhjetësheve në ndarjen standarde” dallohet nga “vlera e shifrës 3 është 30”. Për 8 − 5, kërkohet interpretimi i secilit numër në situatë. Pyetjet “Si e di?”, “A mund ta tregosh ndryshe?” dhe “Çfarë mbetet e njëjtë?” nxisin shpjegimin e marrëdhënies.

Rrjedhshmëria e llogaritjes ndërtohet duke përdorur fakte të kuptuara dhe duke praktikuar marrëdhëniet e tyre. Përgjigjja e shpejtë nuk mjafton si dëshmi konceptuale; as përdorimi i objekteve nuk përbën vetvetiu mungesë kompetence. Mësuesi vlerëson saktësinë, mënyrën e arsyetimit dhe transferimin në një rast të ri.

18.1 Trajektorja e të nxënit si bazë e projektimit

Trajektorja e të nxënit bashkon një objektiv matematikor, një vijimësi të zhvillimit të të menduarit dhe detyra që mbështesin kalimet ndërmjet niveleve. Kjo strukturë paraqitet nga Clements dhe Sarama (pa datë). Ajo e lidh përzgjedhjen e aktivitetit me mënyrën si arsyeton fëmija dhe jo vetëm me moshën ose kapitullin e tekstit.

Në këtë leksion, objektivi i vlerës vendore është lidhja e shkrimit me dhjetëshet dhe njëshet. Një vijimësi orientuese për analizën profesionale është: numërimi i njësheve, formimi i grupeve me nga dhjetë, numërimi me njësi të përbëra, interpretimi i shifrave dhe shpjegimi i paraqitjeve të barasvlershme. Kjo sekuencë është propozim metodik për temën; nuk paraqitet si shkallë zhvillimore e validuar nga ky material.

Nëse nxënësi shkruan 24, por ndërton gjashtë objekte duke mbledhur 2 dhe 4, detyra pasuese duhet të kontrollojë lidhjen ndërmjet shifrës dhe njësisë. Një seri leximesh të numrave nuk e adreson këtë nevojë. Nëse modelon saktë 24, por nuk shpjegon 1 dhjetëshe dhe 14 njëshe, detyra synon barasvlerën e grupimeve. Vendimi ndryshon sipas dëshmisë.

Një trajektore nuk është skenar i pandryshueshëm për të gjithë nxënësit. Performanca mund të ndryshojë sipas paraqitjes, gjuhës së problemit dhe njohjes së materialit. Studenti propozon hapin pasues, shpjegon çfarë dëshmie e justifikon dhe përcakton çfarë përgjigjeje do ta detyronte ta rishikonte vendimin.

18.2 Paraqitja matematikore dhe funksioni simbolik i materialit

Një paraqitje matematikore lidh një objekt, vizatim, shkrim ose veprim me një marrëdhënie matematikore. Materiali konkret ka edhe funksion simbolik: shkopi, shufra ose kapësja përdoret për të përfaqësuar një njësi ose një sasi. Uttal et al. (1997) argumentojnë se përdorimi i objekteve kërkon kuptimin e marrëdhënies ndërmjet materialit dhe asaj që ai përfaqëson. Prania fizike e objektit nuk e garanton këtë kuptim.

Nëse shufra përfaqëson dhjetë, nxënësi duhet ta lidhë atë me dhjetë njëshe. Një shufër e pandarë mund të shihet si një objekt i vetëm; kjo përgjigje është e saktë për numrin e shufrave, por nuk mjafton për numrin e njësheve të përfaqësuara. Prandaj përcaktimi i njësisë është pjesë e shpjegimit dhe e vlerësimit.

Kalimet konkret, figurativ dhe simbolik organizohen me pyetje që lidhin paraqitjet. Për $8 - 5 = 3$, studenti identifikon tërësinë, pjesën e njohur dhe ndryshesën në secilin model. Një figurë me dy koleksione të krahasuara dhe një figurë me pesë objekte të hequra mund të japin të njëjtin barazim, por nuk tregojnë të njëjtën histori. Kërkohet ruajtja e marrëdhënies dhe interpretimi i ndryshimit të modelit.

Kalimi drejt simbolit nuk është braktisje përfundimtare e materialit. Një nxënës mund të përdorë shkrimin për llogaritje dhe modelin për justifikim. Po kështu, mund të rikthehet te një model kur përballet me një pozicion të ri të së panjohurës. Kriteri është nëse paraqitja e ndihmon ta shpjegojë marrëdhënien dhe ta përdorë në një situatë të re.

18.3 Dëshmitë kërkimore dhe kufijtë e përgjithësimit

Carbonneau et al. (2013) sintetizuan 55 studime me 7 237 pjesëmarrës, nga kopshti deri në universitet. Krahasimi me mësimdhënien vetëm përmes simboleve abstrakte tregoi efekte të përgjithshme të vogla deri mesatare në favor të materialeve konkrete. Rezultatet ndryshonin sipas karakteristikave të mësimdhënies dhe studimeve; përfitimi në mbajtjen mend nuk ishte i njëjtë me atë në transferim dhe justifikim.

Ky rezultat nuk provon se çdo material është më efektiv për çdo koncept ose nxënës. Për leksionin rrjedh një orientim metodik: të përcaktohet lidhja material–koncept dhe të kontrollohet transferimi. Ky orientim është interpretim didaktik i dëshmisë, jo një efekt i matur në grupin e studentëve të Podgoricës. Për më tepër, marrëdhëniet ndërmjet moderatorëve dhe efekteve nuk duhen lexuar automatikisht si prova shkakësore.

Raporti i What Works Clearinghouse (2023) për Building Blocks vlerëson ndikimin në arritjet matematikore si potencialisht pozitiv, mbi bazën e tri studimeve që plotësojnë standardet e tij. Dëshmia e raportit kufizohet te arsimi parafillor; ndërhyrjet përfshijnë mbështetje për mësuesit.

Raporti thekson gjithashtu lidhjen e zhvilluesve me studimet e përfshira. Për këtë arsye, përfundimi nuk transferohet drejtpërdrejt si provë për çdo klasë fillore ose për këtë leksion universitar.

Përdorimi akademik i një burimi kërkon dallimin ndërmjet përkufizimit, interpretimit teorik, rezultatit empirik dhe propozimit metodik. Një përkufizim matematikor argumentohet logjikisht; një pohim për efektivitetin e mësimdhënies kërkon dëshmi empirike; një aktivitet i propozuar duhet të jetë i saktë dhe të prodhojë dëshmi të interpretuara. Këto nivele plotësojnë njëri-tjetrin, por nuk zëvendësohen.

18.4 Njohuria e specializuar për mësimdhënien

Ball et al. (2008) dallojnë njohurinë matematikore që kërkohet për përdorim të përgjithshëm nga njohuria që kërkohet për punën e mësuesit. Për të zgjidhur 8 − 5 mjafton të gjendet 3; për ta mësuar kërkohet të interpretohen modele të ndryshme, të argumentohet vlefshmëria e tyre dhe të identifikohet kuptimi që nxënësi u jep numrave. Kjo e ndryshon natyrën e detyrës universitare.

Një studenti i kërkohet të vlerësojë përgjigjen “34 është dy dhjetëshe dhe katërmbëdhjetë njëshe”. Përgjigjja numerike është e saktë, sepse 20 + 14 = 34. Detyra profesionale është të shpjegojë pse kjo është paraqitje jostandarde dhe si lidhet me shkrimin standard. Korrigjimi i saj si thjesht e gabuar do të humbiste një mundësi për të zhvilluar kuptimin e barasvlerës.

Vendimi didaktik përfshin tri pyetje: cili koncept synohet, çfarë tregon përgjigjja e nxënësit dhe cila detyrë pasuese e dallon kuptimin nga përsëritja. Studentit i kërkohet edhe të justifikojë pse një paraqitje tjetër mund të jetë më e përshtatshme. Modeli i heqjes është i drejtpërdrejtë për një histori dhurimi, ndërsa përputhja e dy koleksioneve është më e përshtatshme për krahasimin.

Kjo njohuri vlerësohet me analiza të argumentuara, jo vetëm me llogaritje. Përgjigjja e plotë duhet të përmbajë saktësinë e veprimit, interpretimin e modelit, hipotezën për gabimin dhe një kontroll që mund ta mbështesë ose ta kundërshtojë hipotezën.

18.5 Kriteret e cilësisë së një ndërhyrjeje

Ndërhyrja didaktike vlerësohet sipas përputhjes me objektivin, saktësisë së paraqitjes, lidhjes me dëshminë fillestare dhe aftësisë për të prodhuar dëshmi të reja. Ndërhyrja që jep menjëherë rezultatin mund ta korrigjojë përgjigjen e çastit pa ndryshuar arsyetimin. Ndërhyrja që kërkon një shpjegim të pambështetur mund të mos jetë e arritshme për nxënësin. Nevojitet mbështetje e përshtatur dhe kontroll i mëvonshëm.

Për gabimin 40 = 4, krahasimi i katër tufave me katër shkopinj është i lidhur me konceptin. Për gabimin e numërimit të pikës së nisjes, kjo paraqitje nuk është ndërhyrja e duhur; kërkohet lidhja e çdo shtimi me një hap. Efektiviteti nuk vlerësohet vetëm nga fakti që nxënësi ndryshoi përgjigjen, por nga shpjegimi dhe nga suksesi në një detyrë të re.

Në seminar mund të regjistrohen përgjigjja fillestare, pyetja diagnostikuese, modeli i përdorur, shpjegimi pas ndërhyrjes dhe përgjigjja në transferim. Ky regjistrim shërben për reflektim profesional. Ai nuk përbën vetvetiu studim eksperimental dhe nuk justifikon pohime shkakësore për efektivitetin e një metode. Për kërkim të tillë nevojiten projektim, instrumente dhe procedura të përshtatshme.

19 Model mësimor për dhjetëshen dhe vlerën vendore

Tema është ndërtimi dhe shpjegimi i 24 me dhjetëshe dhe njëshe. Modeli zgjat 45 minuta dhe u drejtohet nxënësve që numërojnë koleksione të paktën deri në 24. Objektivi është që nxënësi të ndërtojë dy dhjetëshe dhe katër njëshe, të shkruajë 24 dhe të shpjegojë vlerën e secilës shifër. Materialet janë shkopinj, lidhëse dhe tabela me dy vende. Detyrat bazë mbeten deri në 24; përdorimi i numrave më të mëdhenj kërkon kontroll paraprak dhe shërben për zgjerim.

Minutat 0 deri në 7 diagnoza fillestare

Çdo dyshe merr dymbëdhjetë shkopinj. Njëri numëron, tjetri kontrollon përputhjen një për një. Mësuesi kërkon sasinë totale dhe i zhvendos shkopinjtë. Nëse numërimi nuk është ende i besueshëm, ai mbështet numërimin e kontrolluar përpara se të kërkojë interpretimin e grupeve.

Minutat 7 deri në 18 ndërtimi i njësisë së përbërë

Mësuesi numëron dhjetë shkopinj dhe i lidh. Formulon: “Kjo tufë përfaqëson një dhjetëshe, pra dhjetë njëshe”. Nxënësit krijojnë një tufë të dytë dhe vendosin katër shkopinj pranë tyre. Kërkohet numri i tufave, numri i shkopinjve të veçuar dhe numri i përgjithshëm. Përgjigjja “gjashtë objekte” diskutohet duke saktësuar se po numërohen tufa dhe shkopinj me njësi të ndryshme.

Minutat 18 deri në 28 lidhja me shkrimin

Në vendin e dhjetësheve shënohet 2 dhe në vendin e njësheve 4. Nxënësit lexojnë njëzet e katër dhe shpjegojnë 24 = 20 + 4. Më pas krahasohen 12 dhe 21, që mbeten brenda kufirit të njohur. Nxënësit ndërtojnë modelet dhe shpjegojnë se shifra 2 përfaqëson 2 njëshe te 12 dhe 2 dhjetëshe, pra 20 njëshe, te 21. Krahasimi i 24 me 42 përdoret vetëm si zgjerim për nxënësit që numërojnë dhe modelojnë deri në 42.

Minutat 28 deri në 37 ruajtja e sasisë dhe diferencimi

Hapet një tufë e modelit 24. Nxënësit kontrollojnë se një dhjetëshe dhe katërmbëdhjetë njëshe japin të njëjtën sasi. Për mbështetje ruhet modeli i hapur dhe numërohen njëshet. Për nxënësit që kanë përparuar kërkohet një paraqitje e tretë, me 24 njëshe. Ndarjet jostandarde pranohen nëse shpjegohet barasvlera; shkrimi pozicional standard vendoset më vete.

Minutat 37 deri në 45 vlerësimi individual

Çdo nxënës ndërton 20 dhe shpjegon zeron; më pas shkruan numrin e një modeli me një dhjetëshe dhe shtatë njëshe. Një detyrë shtesë kërkon të korrigjojë pohimin “te 24, shifra 2 ka vlerën 2”. Suksesi dëshmohet nga lidhja mes njësisë, modelit dhe shkrimit. Leximi i numrit pa modelim nuk e përmbush i vetëm objektivin.

Detyra për studentin mësues: shpjegoni pse 20 është zgjedhur për vlerësimin, cilin keqkuptim mund të zbulojë dhe si do të vepronit nëse nxënësi paraqet vetëm dy shkopinj. Ndërhyrja e pritshme kthen vëmendjen te njësia e numërimit dhe te dhjetë njëshet brenda çdo tufe.

20 Model mësimor për zbritjen si krahasim

Tema është gjetja e ndryshesës ndërmjet 8 dhe 5. Modeli zgjat 45 minuta. Njohuritë paraprake përfshijnë numërimin deri në 10 dhe përputhjen një për një. Objektivi është që nxënësi të gjejë dhe të shpjegojë sa më shumë ose sa më pak ka një koleksion, duke e lidhur përputhjen me $8 - 5 = 3$.

Minutat 0 deri në 8 aktivizimi

Paraqiten dy koleksione me nga pesë shenja dhe kërkohet të tregohet barazia pa u mbështetur te gjatësia e rreshtit. Ndryshohet largësia ndërmjet shenjave. Mësuesi vëzhgon nëse nxënësi lidh çdo shenjë të koleksionit të parë me një të të dytit.

Minutat 8 deri në 18 ndërtimi i problemit

Historia është: “Ana ka 8 kartela dhe Bora 5. Sa kartela më shumë ka Ana?”. Nxënësit parashikojnë se cili koleksion është më i madh. Vendosen kartelat në dy rreshta dhe krijohen pesë çifte. Tri kartelat e Anës pa çift identifikojnë ndryshesën. Mësuesi kërkon: “A duhej të hiqnim kartela nga koleksioni i Anës që ta gjenim përgjigjen?”.

Minutat 18 deri në 28 lidhja e modeleve

Shkruhet $8 - 5 = 3$. Nxënësit shpjegojnë çfarë përfaqësojnë 8, 5 dhe 3. Pastaj pyeten sa kartela i duhen Borës për të pasur po aq sa Ana. Shkrimi $5 + 3 = 8$ përdoret si kontroll. Në vijën numerike numërohen tre hapat nga 5 te 8. Numri i intervaleve dallohet nga numri i pikave të shënuara.

Minutat 28 deri në 38 puna në dyshe

Dyshja zgjidh krahasimin e 9 me 6 dhe krijon një histori. Njëri ndërton çiftet dhe tjetri shpjegon barazimin. Rolet ndërrohen për 7 dhe 4. Mësuesi kërkon një shpjegim të ndryshesës, duke kontrolluar që nxënësi të mos japë numrin e përgjithshëm të objekteve të të dy koleksioneve.

Minutat 38 deri në 45 kontrolli individual

Detyra e re është: “Lira ka 7 kartela, dy më shumë se Drita. Sa ka Drita?”. Modeli është $\square + 2 = 7$; Drita ka 5 kartela. Nxënësi që jep 9 pyetet kush ka më shumë dhe cila sasi është e panjohur. Kjo detyrë kontrollon interpretimin e marrëdhënies në një pozicion të ri të së panjohurës.

Për mbështetje përdoren koleksione që mund të përputhen fizikisht dhe fjalia “Sasia e madhe përbëhet nga sasia e vogël dhe ndryshesa”. Për zgjerim kërkohet një problem ku sasia e madhe është e panjohur. Në të dy rastet ruhet analiza e marrëdhënies dhe numrat mbeten brenda 10.

21 Pyetje për diskutim dhe përgjigje të argumentuara

A mjafton recitimi i numrave për të provuar kuptimin e numërimit

Jo. Recitimi dëshmon njohjen e vargut verbal, ndërsa numërimi i objekteve kërkon korrespondencë një për një dhe kuptimin se fjala e fundit jep sasinë. Një fëmijë mund të thotë 1 deri në 10 saktë dhe të numërojë dy herë të njëjtin objekt. Kontrolli kërkon veprim me një koleksion dhe shpjegimin e sasisë totale.

A janë tri dhjetëshe dhe katërmbëdhjetë njëshe një paraqitje e gabuar e 44

Jo. Tri dhjetëshe japin 30 njëshe dhe së bashku me 14 njëshet japin 44. Paraqitja është jostandarde, por e barasvlershme me katër dhjetëshe dhe katër njëshe. Mësuesi kërkon rigrupimin e dhjetë prej katërmbëdhjetë njësheve dhe lidh rezultatin me shkrimin standard 44.

Pse krahasohen fillimisht dhjetëshet e dy numrave dyshifrorë

Në ndarjen standarde, njëshet janë nga 0 deri në 9. Nëse një numër ka një dhjetëshe më shumë, edhe në rastin më të pafavorshëm ndryshimi i njësheve nuk e përmbys rendin. Për shembull, 49 është më i vogël se 50. Nëse dhjetëshet janë të barabarta, si te 43 dhe 47, vendosin njëshet.

A e rrit mbledhja gjithmonë sasinë

Për numra jonegativë, mbledhja me një numër pozitiv e rrit sasinë ndaj të mbledhshmit fillestar; mbledhja me zero e ruan atë. Prandaj 6 + 0 = 6 është kundërshembull ndaj formulimit “gjithmonë më e madhe”. Me fëmijët thuhet se shtimi i objekteve e rrit koleksionin, ndërsa shtimi i asnjë objekti e lë të pandryshuar.

Pse fjala më shumë nuk mjafton për zgjedhjen e mbledhjes

Veprimi varet nga pozicioni i së panjohurës. Te “Ana ka 8, tri më shumë se Bora”, sasia e Borës gjendet me 8 − 3 = 5. Te “Bora ka 5 dhe Ana tri më shumë”, sasia e Anës gjendet me 5 + 3 = 8. Marrëdhënia është e njëjtë; ndryshon sasia që kërkohet.

A është një përgjigje e saktë gjithmonë dëshmi e një procedure të saktë

Jo. Dy gabime mund të kompensohen: lënia pa numëruar e një objekti dhe numërimi dy herë i një tjetri mund të japin totalin e duhur. Kërkohet vëzhgimi i procedurës, shpjegimi dhe një rast i ri. Një përfundim mbi kuptimin e nxënësit duhet të mbështetet në disa dëshmi që lidhen me objektivin.

22 Vlerësimi përfundimtar dhe zgjidhjet

Ky vlerësim zhvillohet si punë e pavarur pas leksionit ose në seminarin pasues dhe nuk përfshihet në 180 minutat. Çdo detyrë vlerësohet me dy kritere të rubrikës analitike (Tabela 3), secili në nivelet 1–4; përgjigjja që mungon merr 0. Shuma maksimale është $5 \times 2 \times 4 = 40$ pikë. Për vetëvlerësim, zgjidhja lexohet pas përpjekjes së pavarur; përgjigjet alternative të sakta pranohen nëse përmbushin kriteret.

Detyra 1

Një fëmijë numëron shtatë shenja, pastaj thotë se janë më shumë kur rreshti zgjatet. Formuloni të paktën dy hipoteza, një pyetje diagnostikuese dhe një ndërhyrje konkrete, me kontroll në një rast të ri.

Zgjidhje. Hipoteza e parë: gjatësia e rreshtit përdoret si tregues i sasisë. Hipoteza e dytë: nxënësi nuk e ka ndjekur zhvendosjen ose e kupton pyetjen si «cili rresht është më i gjatë». Pyetja: «A shtuam ose hoqëm ndonjë shenjë?». Ndërhyrja është përputhja një për një e dy vendosjeve me shtatë shenja dhe kontrolli me numërim; pas saj përdoret një koleksion me sasi tjetër për transferim. Hipoteza verifikohet, nuk trajtohet si diagnozë përfundimtare. Kriteret: K3, K4.

Detyra 2

Tre nxënës paraqesin 36. Arta vendos 3 tufa dhe 6 shkopinj. Blendi vendos 2 tufa dhe 16 shkopinj. Cufi vendos 3 shkopinj dhe 6 shkopinj. Vlerësoni secilën paraqitje dhe shkruani pyetjen që i bëni Cufit para çdo ndërhyrjeje.

Zgjidhje. Arta jep ndarjen standarde, $30 + 6$. Blendi jep një ndarje jostandarde të saktë, $20 + 16 = 36$; atij i kërkohet rigrupimi i dhjetë prej gjashtëmbëdhjetë shkopinjve. Cufi i lexon shifrat si dy sasi njëshe, ose mund ta ketë menduar secilin nga tre shkopinjtë si shenjë për një dhjetëshe. Pyetja: «Çfarë tregon secili nga këta tre shkopinj?» Vetëm pas përgjigjes zgjidhet ndërhyrja (shih Rastin profesional 1). Kriteret: K1, K5.

Detyra 3

Një nxënës thotë: «47 është më i madh se 52, sepse 7 është më i madh se 2». Formuloni dy hipoteza, një detyrë që i dallon dhe argumentin matematikor që shpjegon pse vendosin dhjetëshet.

Zgjidhje. Hipoteza e parë: nxënësi krahason vetëm njëshet. Hipoteza e dytë: krahason shifrën më të madhe të secilit numër, pavarësisht vendit. Detyra dalluese: 63 dhe 58, pastaj 29 dhe 31. Nëse zgjedh 58 dhe 29, mbështetet hipoteza e parë; nëse zgjedh 58 dhe 31, e dyta. Argumenti: nëse $a = 10d + u$ dhe $b = 10e + v$ me $d < e$, atëherë

$$a \le 10d + 9 < 10(d + 1) \le 10e \le b.$$

Kriteret: K2, K3.

Detyra 4

Hartoni tri barazime për gjykim «e vërtetë / e rreme» dhe një barazim me të panjohur, që së bashku dallojnë keqkuptimin «= do të thotë shkruaj përgjigjen» nga vështirësia me të panjohurën. Shpjegoni çfarë përgjigjesh pritet nga secili profil.

Zgjidhje. Për shembull: 7 = 4 + 3 (e vërtetë), 4 + 3 = 7 + 1 (e rreme), 4 + 3 = 5 + 2 (e vërtetë) dhe 4 + □ = 7. Nxënësi që e lexon «=» si sinjal për përgjigjen e pranon 4 + 3 = 7 + 1 dhe i refuzon dy të tjerat. Nxënësi që i gjykon saktë të tria, por gabon te 4 + □ = 7, ka vështirësi me të panjohurën. Kriteret: K2, K3.

Detyra 5

«Beni ka 8 kartela, tri më shumë se Mira. Sa ka Mira?» Jepni modelin, zgjidhjen, kontrollin dhe një pyetje për nxënësin që zgjedh 8 + 3.

Zgjidhje. Modeli është □ + 3 = 8. Mira ka 5 kartela; kontrolli është 5 + 3 = 8. Nxënësi pyetet: «Kush ka më shumë dhe cilën sasi po kërkojmë?». Modeli me përputhje ose shirita e bën të dukshme se sasia e Mirës duhet të jetë më e vogël se tetë. Kriteret: K1, K3.

Tabela 3. *Rubrika analitike me katër nivele*

Kriteri	1 · Fillestar	2 · Në zhvillim	3 · I pritshëm	4 · I avancuar
K1 Saktësia matematikore	Rezultate ose barazime të gabuara; kushtet në N₀ mungojnë.	Rezultate kryesisht të sakta, por me barazime të pavlefshme ose kushte të pashprehura.	Rezultate dhe barazime të sakta; kushtet kryesore në N₀ të shprehura.	Si niveli 3; dallon rastin e veçantë nga përgjithësimi dhe shqyrton rastet kufitare, si 0 dhe 10.
K2 Argumentimi	Vetëm rezultat ose rregull pa shpjegim.	Shpjegim procedural, pa arsye matematikore.	Argument i plotë për rastin e dhënë, i mbështetur te marrëdhëniet ndërmjet sasive.	Argument që vlen në përgjithësi, me kushtet e zbatimit.
K3 Diagnoza didaktike	E cilëson përgjigjen vetëm si të saktë ose të gabuar.	Jep një shkak të vetëm, pa e verifikuar.	Formulon të paktën dy hipoteza dhe një detyrë që i dallon.	Si niveli 3; parashikon cila përgjigje e mbështet secilën hipotezë.
K4 Vendimi didaktik	Korrigjim i drejtpërdrejtë ose përsëritje e rregullit.	Ndërhyrje e përgjithshme, e palidhur me hipotezën.	Ndërhyrje që varet nga dëshmia, me detyrë transferimi.	Si niveli 3; jep kriterin për tërheqjen e mbështetjes ose për hapin pasues.

Kriteri	1 · Fillestar	2 · Në zhvillim	3 · I pritshëm	4 · I avancuar
K5 Komunikimi profesional	Terminologji e pasaktë; paraqitja nuk përputhet me simbolin.	Terminologji kryesisht e saktë; paraqitja pa lidhje të shprehur me simbolin.	Terminologji e saktë; paraqitja dhe simboli lidhen qartë; njësia e numërimit emërtohet.	Si niveli 3; kalon ndërmjet paraqitjeve dhe shpjegon çfarë nxjerr në pah secila, në gjuhë të kuptueshme për nxënësin.

23 Mini-glosar

Termat janë dhënë në kuptimin që kanë në këtë leksion.

Termi	Kuptimi
Numër	Ideja matematikore e sasisë ose e rendit; shkruhet me shifra.
Shifër	Shenjë e sistemit të shkrimit; sistemi dhjetor ka dhjetë shifra, 0–9.
Korrespondencë një për një	Lidhje ku çdo element i njërës bashkësi i përgjigjet saktësisht një elementi të tjetrës.
Kardinalitet	Numri i elementeve të një bashkësie të fundme; e përbashkëta e bashkësive të barasfuqishme.
Ruajtje e sasisë	Pandryshueshmëria e numrit kur objektet zhvendosen pa u shtuar ose hequr.
Njohje e menjëhershme e sasisë	Njohja e një sasie të vogël pa numërim një nga një (subitizim).
Njësi e përbërë	Grup që numërohet si një, duke ruajtur njohjen e përbërjes së tij, p.sh. dhjetëshja.
Vlerë vendore	Vlera që merr një shifër sipas vendit që zë: 3 te 34 vlen 30.
Ndarje standarde / jostandarde	34 = 3 dhjetëshe + 4 njëshe është standarde; 2 dhjetëshe + 14 njëshe është jostandarde, por e barasvlershme.
Rigrupim	Shkëmbimi i dhjetë njësheve me një dhjetëshe, ose anasjelltas, pa ndryshuar sasinë.
I mbledhshëm, shumë	Numrat që mblidhen dhe rezultati i mbledhjes.
I zbritshëm, zbritës, ndryshesë	Te 8 − 5 = 3: 8 i zbritshmi, 5 zbritësi, 3 ndryshesa.

Termi	Kuptimi
Barazim	Pohim se dy shprehje kanë të njëjtën vlerë; shenja «=» shpreh marrëdhënie.
E panjohur	Sasia që kërkohet në një problem ose barazim, e shënuar shpesh me □.

Literatura

Burimet mbështesin formimin matematikor dhe didaktik të mësuesit dhe nuk përbëjnë listën zyrtare të literaturës së syllabusit. Modelet mësimore dhe instrumentet e vlerësimit janë propozime për punë në auditor dhe praktikë profesionale.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Björklund, C., Marton, F., & Kullberg, A. (2021). What is to be learnt? Critical aspects of elementary arithmetic skills. *Educational Studies in Mathematics, 107*, 261–284. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10045-0

Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 105*(2), 380–400. https://doi.org/10.1037/a0031084

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (2014). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction* (2nd ed.). Heinemann.

Clayton, F. J., Copper, C., Steiner, A. F., Banfi, C., Finke, S., Landerl, K., & Göbel, S. M. (2020). Two-digit number writing and arithmetic in Year 1 children: Does number word inversion matter? *Cognitive Development, 56*, Article 100967. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2020.100967

Clements, D. H. (1999). Subitizing: What is it? Why teach it? *Teaching Children Mathematics, 5*(7), 400–405.

Clements, D. H., & Sarama, J. (pa datë). *Learning and teaching with learning trajectories* [Faqe interneti]. https://www.learningtrajectories.org/

Frye, D., Baroody, A. J., Burchinal, M., Carver, S. M., Jordan, N. C., & McDowell, J. (2013). *Teaching math to young children: A practice guide* (NCEE 2014-4005). National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. https://ies.ed.gov/ncee/wwc/practiceguide/18

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Harvard University Press.

Manes, M. (2018). *Mathematics for elementary teachers*. University of Hawai'i. https://pressbooks.oer.hawaii.edu/mathforelementaryteachers/

McNeil, N. M., Fyfe, E. R., Petersen, L. A., Dunwiddie, A. E., & Brletic-Shipley, H. (2011). Benefits of practicing 4 = 2 + 2: Nontraditional problem formats facilitate children's understanding of mathematical equivalence. *Child Development, 82*(5), 1620–1633. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2011.01622.x

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* (J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell, Eds.). National Academy Press. https://doi.org/10.17226/9822

Uttal, D. H., Scudder, K. V., & DeLoache, J. S. (1997). Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology, 18*(1), 37–54. https://doi.org/10.1016/S0193-3973(97)90013-7

What Works Clearinghouse. (2023, dhjetor). *Building Blocks* (WWC 2024-001). Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. https://ies.ed.gov/ncee/WWC/Docs/InterventionReports/WWC_Building-Blocks_report.pdf