METODIKA E MATEMATIKËS III · LEKSIONI 1

Konceptet matematikore dhe metodika e bashkësive

Nga koleksioni te koncepti · nga gjuha te simbolika · nga matematika te vendimi didaktik

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

4 orë akademike (4 × 45 min = 180 min) · Viti akademik 2026–2027

§ Burimi dhe shtrirja e materialit

BURIMI

Burimi arsimor i hapur

- Moduli 1.1 «Bazat e bashkësive» – «Matematikë për mësuesit e arsimit fillor», LOUIS (Luiziana, SHBA)
- LOUIS është **rrjet bibliotekash akademike**, jo metodologji më vete
- Ruhen idetë: koleksion/klasifikim, bashkësi, element, nënbashkësi, bashkësi boshe, përkatësi, kardinalitet, materiale me tipare të shumëfishta
- Figurat, kartelat dhe rastet e klasës janë **përshtatje/origjinale**, jo riprodhime

STRUKTURA

Shtrirja e materialit

- **Pjesa I** – bërthama e katër orëve akademike
- **Pjesët II–IV** – thellim universitar, ushtrime të drejtuara, vetëprovim, punë bashkëpunuese, anekse
- Veprimet formale me bashkësi = **zgjerim universitar**; nuk ngatërrohen me kërkesat e arsimit fillor

Udhëzues për studimin e leksionit

- Lexoni bërthamën e 4 orëve dhe shpjegojini konceptet **me fjalët tuaja**, jo vetëm me përkufizime
- **Figurat janë përmbajtje:** çfarë paraqet, cilin koncept ilustron, çfarë gabimi zbulon
- Shembujt dhe aktivitetet lidhin matematikën me **vendimin profesional** të mësuesit
- Pjesët **THELLIM UNIVERSITAR** – për përgatitje të plotë dhe përgjigje të nivelit të lartë
- Ushtrimet zgjidhen **para** se të konsultohen zgjidhjet orientuese

PËR ÇDO KONCEPT

Vetëkontroll

- A mund ta jap përkufizimin **dhe** një shembull?
- A mund ta dalloj një gabim tipik dhe të formuloj një **pyetje diagnostikuese**?
- A mund ta lidh figurën ose modelin me **simbolikën matematikore**?

4×

Përmbajtja dhe planifikimi i 4 orëve

Ora	Boshti	Përmbajtja	Koha
I	Nga koleksioni te koncepti	klasifikimi; kriteri; bashkësia; elementet; nënbashkësia; shembull/jo-shembull	45 min
II	Nga gjuha te simbolika	listimi; ∈ dhe ⊆; bashkësia boshe; përfshirja e mirëfilltë; analiza e pohimeve	45 min
III	Madhësia dhe struktura	kardinaliteti; barazia / ekuivalenca sipas kardinalitetit; korrespondenca një-për-një; materialet konkrete; dy kritere	45 min
IV	Nga matematika te mësimdhënia	gabimet; dëshmia; pyetjet diagnostikuese; mikroprojektim; vlerësim formues; sintezë	45 min

▣ **12 figura të integruara:** koleksione kartelash, klasifikime alternative, material diagnostik, ∈ kundrejt ⊆, bashkësia boshe, barazia/kardinaliteti, diagram me dy kritere, «Cila kartelë mungon?», zinxhiri didaktik, pema e vendimit, fletë kartelash.

Përgatitje para leksionit · 10–15 minuta

Para se të nisni	Çfarë duhet të jeni në gjendje të bëni
Kriter dhe veti	Të formuloni një rregull të kontrollueshëm për grupimin e objekteve dhe të dalloni një kriter objektiv nga një përshkrim i paqartë.
Shembull dhe rast që nuk e plotëson kushtin	Të jepni një rast që e plotëson një kusht dhe një rast që nuk e plotëson.
Pohim i përgjithshëm	Të kuptoni se një rast i vetëm që e kundërshton një pohim universal mjafton për ta rrëzuar atë.
Argumentim	Të shpjegoni pse një objekt u përfshi ose u përjashtua, jo vetëm ta vendosni në një grup.

i Ky kontroll **nuk është test vlerësues**: aktivizon njohuritë dhe e bën të dukshme mënyrën e arsyetimit.

? Vetëkontroll paraprak · pyetjet

1. Jepni **dy kritere të ndryshme** për të klasifikuar të njëjtin koleksion prej tetë objektesh.

2. Pse kriteri «objektet e mëdha» është **i paplotë** nëse nuk përcaktohet një referencë ose prag?

3. Të gjithë trekëndëshat janë të mbushur; studenti zgjedh saktë trekëndëshat. **A dimë** nëse përdori formën apo mbushjen?

4. Çfarë rasti do ta **rrëzonte** pohimin «Të gjitha kartelat trekëndore janë të mbushura»?

5. Shkruani një pyetje që kërkon **arsyetim** dhe jo vetëm një përgjigje po/jo.

✓ Vetëkontroll paraprak · përgjigje orientuese

Përgjigjja 1

Sipas **formës** (rrathë, katrorë, trekëndësha) ose sipas **mbushjes**. Të dyja janë të vlefshme nëse kriteri shprehet qartë dhe zbatohet njësoj ndaj çdo objekti.

Përgjigjja 2

Duhet **referencë ose prag**, p.sh. «gjatësi mbi 5 cm»; vetëm atëherë përkatësia vendoset pa hamendësim.

Përgjigjja 3

Jo. Përgjigjja përputhet me dy strategji. Duhet rast dallues: trekëndësh i pambushur + katror i mbushur.

Përgjigjja 4

Një **trekëndësh i pambushur** – i përket klasës, por s'ka vetinë «i mbushur» → kundërshembull.

Përgjigjja 5

«Cilin kriter përdore … dhe si do ta klasifikoje një kartelë të re me të njëjtën formë, por mbushje tjetër?» → arsyetim + **transferim**.

! Një përgjigje e saktë **nuk zbulon** domosdoshmërisht kriterin e përdorur.

Rezultatet e pritshme të të nxënit

1. **Shpjegojë** rolin e klasifikimit në ndërtimin fillestar të konceptit të bashkësisë
2. **Dallojë** konceptin matematikor nga termi, simboli dhe paraqitja e tij
3. **Përdorë** me saktësi: element, nënbashkësi, bashkësi boshe, kardinalitet, barazi, ekuinumerueshmëri
4. **Interpretojë** saktë $\in$ dhe $\subseteq$, duke argumentuar pse nuk janë të këmbyeshme
5. **Analizojë** shembuj, jo-shembuj dhe kundërshembuj për kufijtë e një koncepti
6. **Projektojë** pyetje dhe detyra diagnostikuese që zbulojnë arsyetimin, jo vetëm rezultatin
7. **Lidhë** analizën matematikore me ndërhyrje didaktike të argumentuar, të mbështetur në dëshmi

→ Parimi profesional i leksionit



! Gabimi trajtohet si **burim dëshmie**. Ndërhyrja zgjidhet vetëm **pasi** arsyetimi është eksploruar me pyetje ose detyrë verifikuese.

€ Pozicionimi akademik dhe përafrimi evropian

Dimensioni i cilësisë	Zbatimi në këtë leksion
Rezultate të të nxënit	Folje veprimi dhe dëshmi e vëzhgueshme: shpjegim, argumentim, klasifikim, analizë, projektim, vendim didaktik.
Të nxënit i përqendruar te studenti	Aktivitete studimi, pyetje kyçe, raste për analizë, vetëprovim dhe punë bashkëpunuese.
Përafrimi didaktik	Çdo rezultat lidhet me përmbajtje, aktivitet dhe vlerësim; shmanget ndarja artificiale teori–praktikë.
Vlerësimi formues	Gabimi = burim dëshmie; ndërhyrja propozohet pasi arsyetimi është eksploruar.
Përfshirja dhe qartësia	Paraqitje verbale, simbolike, konkrete, figurative; hiqet pengesa pa ulur kërkesën matematikore.
Transparenca e ngarkesës	180 minuta dallohen nga studimi i pavarur; ECTS përcaktohen vetëm nga programi zyrtar.
Integriteti akademik	Burimet identifikohen; përshtatjet dallohen qartë nga burimet e konsultuara.

ESG 2015 · Udhëzuesi i ECTS-së (2015) – orientim akademik, **jo deklaratë akreditimi**.

Matrica e përafrimit të rezultateve

#	Përmbajtja kryesore	Aktiviteti / detyra	Dëshmia e arritjes
1	Klasifikimi, kriteri, koleksioni	Ora I; aktivitetet me kartela	Formulon kriter të qartë dhe klasifikim koherent
2	Koncepti, termi, paraqitja	Thellim A; shembuj/jo-shembuj	Dallon objektin matematikor nga emri dhe paraqitja
3	Elementi, nënbashkësia, ∅, kardinaliteti	Ora II–III; vetëprovim	Përdor termat dhe shënimet pa ngatërrime
4	∈ kundrejt ⊆	Ora II; klinika e pohimeve	Justifikon llojin e objektit në të dy anët
5	Shembuj, jo-shembuj, kundërshembuj	Ora I; Thellim A–B	Përcakton çfarë provohet/rrëzohet nga secili rast
6	Pyetje diagnostikuese	Ora IV; rastet A–D	Detyrë që dallon dy hipoteza të mundshme
7	Vendimi didaktik	Matrica profesionale; mikro-mësimdhënie	Ndërhyrje e lidhur me dëshminë e nxënësit

Standardi universitar: saktësi matematikore + terminologji e qëndrueshme + argumentim + lidhje e ndërhyrjes me dëshminë.

Rubrikë analitike e arritjes · 4 nivele

Dimensioni	Niveli 4 · i avancuar	Niveli 3 · i pritshëm	Niveli 2 · në zhvillim	Niveli 1 · fillestar
Saktësia matematikore	Koncepti, simbolika dhe argumenti të sakta e të qëndrueshme	E saktë me pasaktësi të vogël formulimi	Kuptim i pjesshëm; ngatërrime jo thelbësore	Keqkuptim thelbësor ose mungesë dallimi
Argumentimi	Arsye, rast dallues, justifikim i përfundimit	Arsyetim i mjaftueshëm, jo gjithmonë teston alternativat	Pohim/shembull pa lidhje të plotë me përfundimin	Vetëm përgjigje ose arsyetim i pavlefshëm
Diagnoza didaktike	≥2 hipoteza, detyrë që i dallon, parashikon dëshminë	Hipotezë e arsyeshme + detyrë verifikuese	Identifikon gabimin, detyra s'e dallon shkakun	Kalon drejt te korrigjimi pa dëshmi
Vendimi didaktik	Lidhet me dëshminë + kontroll transferimi	Koherent me dëshminë e mbledhur	I përgjithshëm, pjesërisht i lidhur	I paracaktuar ose s'adreson keqkuptimin
Komunikimi profesional	Terminologji e saktë, paraqitje të përshtatshme	I qartë, terminologji kryesisht e saktë	Kuptohet, por me paqartësi terminologjike	I paqartë; terminologjia pengon kuptimin

Niveli 3 = arritja e pritshme universitare · Niveli 4 = transferim, argumentim dhe vendimmarrje profesionale e avancuar

PJESA I

Bërthama e leksionit · 4 orë akademike

Rregulli i studimit: Thellimet A–D janë material i zgjeruar. Nga katër rastet e klasës analizohen në thellësi të paktën dy.

⏱️ Shpërndarja e rekomanduar e kohës

Ora	Shpërndarja e rekomanduar	Figura / produkti
I · 45 min	5 orientim · 10 klasifikim · 8 kriteri/bashkësia · 8 koleksioni me 12 kartela · 9 kriteri i fshehur · 5 sintezë	Fig. 1–3 · kriter + dëshmi
II · 45 min	7 shkrimi i bashkësisë · 12 ∈ kundrejt ⊆ · 10 bashkësia boshe · 11 klinikë pohimesh · 5 sintezë	Fig. 4–5 · 6 pohime të arsyetuara
III · 45 min	10 kardinalitet/barazi · 8 korrespondencë 1–1 · 10 materialet konkrete · 12 dy kritere · 5 sintezë	Fig. 6–8 · klasifikim me dy kritere
IV · 45 min	8 zinxhiri profesional · 12 dy raste klase · 12 mikroprojektim · 8 vlerësim formues · 5 pyetje përmbyllëse	Fig. 9–10 · mini-plan didaktik

Të gjitha kohët janë në minuta.

Çfarë është bërthamë, çfarë zgjerim

BËRTHAMA PËR PROVIM

- Kriteri dhe klasifikimi
- Bashkësia / elementi
- ∈ kundrejt ⊆
- ø kundrejt {0} dhe {ø}
- Kardinaliteti kundrejt barazisë
- Klasifikimi me dy kritere
- Dëshmia dhe pyetja diagnostikuese

ZGJERIM I REKOMANDUAR

- Përfshirja e mirëfilltë
- Korrespondenca një-për-një
- Jo-shembulli / kundërshembulli
- Një mikroprojektim
- Dy raste klase

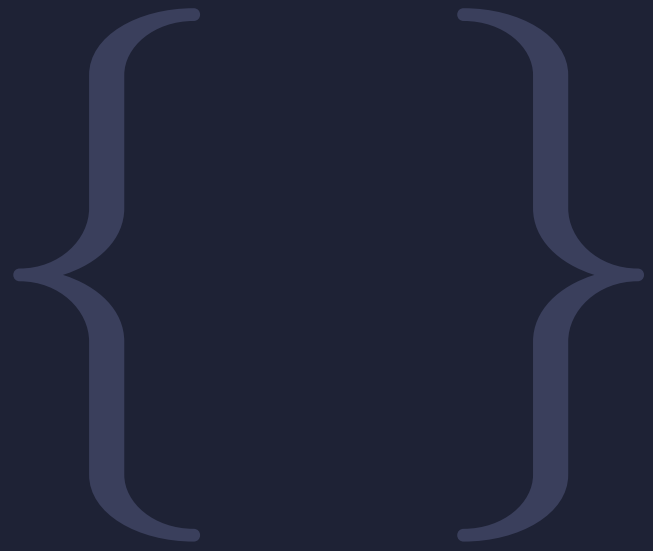
STUDIM I PAVARUR

- Thellimet A–D
- Ushtrimet e zgjeruara
- Dy rastet e klasës që s'trajtohen në leksion
- Veprimet formale me bashkësi
- Produkti kartezian

ORA I · 45 MINUTA

Nga koleksioni te koncepti i bashkësisë

Klasifikimi · kriteri · bashkësia · elementet · nënbashkësia · shembull / jo-shembull



1. Pse burimi nis me koleksione?

- Burimi **nuk nis me simbole**, por me koleksione dhe grupime të ndryshme
- Para termit «bashkësi», studenti **përjeton** përzgjedhjen dhe klasifikimin
- Klasifikimi e **detyron** studentin të shprehë një kriter
- I njëjti koleksion ndahet sipas llojit, madhësisë, formës, materialit…
- Grupimi përcaktohet nga **rregulli i përkatësisë**, jo nga pamja e objekteve

KËRKIMI

Mbështetja kërkimore

Klasifikimi **aktiv** i shembujve mund të mbështesë formimin konceptual më mirë se **leximi pasiv** i tyre.

Steininger, Wittwer & Voss (2022)

2. I njëjti koleksion, disa klasifikime

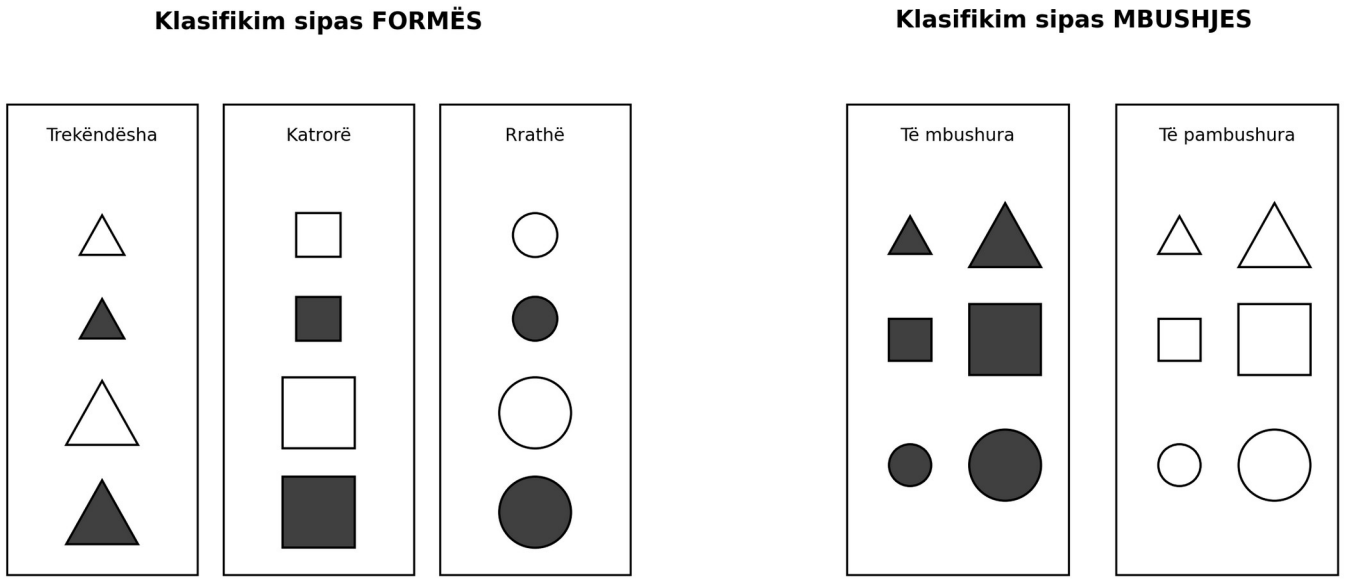


Figura 1. I njëjti koleksion prej 12 kartelash i klasifikuar sipas formës dhe sipas mbushjes.

Pyetja kyçe: Çfarë mbetet e pandryshuar te objektet dhe çfarë ndryshon në organizimin tonë?

Aktivitet studimi 1 · 7 minuta

1

Merrni 12 objekte ose 12 kartela

2

Ndajini sipas një kriteri të zgjedhur

3

Ndërtoni një ndarje të dytë me kriter tjetër

4

Çdo grup + një fjali që shpreh rregullin

! Detyra **nuk ka vetëm një përgjigje të saktë**. Vlerësohet qartësia dhe qëndrueshmëria e kriterit. Nëse rregulli ndryshon gjatë klasifikimit, klasifikimi **nuk është më koherent**.

? **Vetëkontroll:** Kur dy studentë krijojnë grupime të ndryshme nga i njëjti koleksion, a mund të jenë të dyja të vlefshme? Çfarë duhet të kontrollojmë para se të gjykojmë?

3. Nga koleksioni te bashkësia

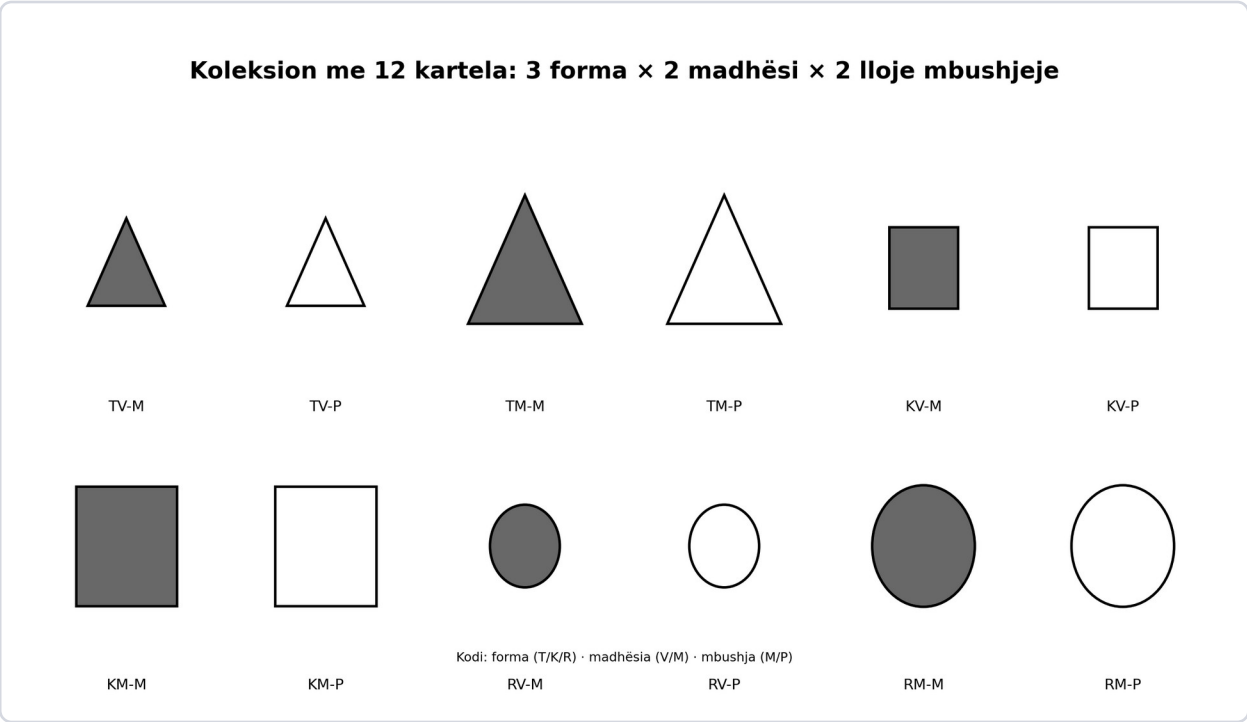


Figura 2. Koleksion demonstrues: 3 forma × 2 madhësi × 2 lloje mbushjeje.

Pyetja kyçe: A është kriteri mjaftueshëm i qartë që çdo kartelë të klasifikohet pa hamendësim?

PËRKUFIZIM

Bashkësia (trajtim elementar)

Koleksion objektesh **të përcaktuara qartë**. Objektet që bëjnë pjesë quhen **elemente**. Për çdo objekt duhet të vendosim **njëkuptimshëm** nëse hyn apo jo.

Përkufizim ≠ imazh konceptual

Përdorimi i saktë i termit nuk garanton strukturë konceptuale të qëndrueshme (Tall & Vinner, 1981).

Kriter i përcaktuar qartë apo jo?

Kriteri	I përcaktuar qartë?	Pse?
kartelat me figurë trekëndore	**Po**	përkatësia kontrollohet nga forma
objektet e bukura	**Jo, pa sqarim**	varet nga gjykimi subjektiv
objektet me gjatësi mbi 5 cm	**Po**	ka prag të matshëm
sendet e mëdha	**Jo, pa krahasim ose prag**	«i madh» kërkon referencë

! «Sendet e bukura» vlen për një bisedë estetike, **jo** për një detyrë matematikore pa marrëveshje shtesë.

a

4. Elementi dhe identiteti i objektit

OBJEKTE INDIVIDUALE

Bashkësia e lapsave

Dy lapsa fizikisht të ndryshëm janë **dy elemente**, edhe kur kanë të njëjtën ngjyrë dhe formë.

VETI

Bashkësia e ngjyrave të lapsave

Dy lapsat e zinj kontribuojnë vetëm me **një** element: ngjyrën e zezë.

?

Pyetje profesionale: Po numërojmë objekte individuale, lloje objektesh apo veti? Saktësimi bëhet **para numërimit** dhe **para shkrimit simbolik**.

5. Nënbashkësia: ideja e përfshirjes

PËRKUFIZIM

$$B \subseteq C$$

B është nënbashkësi e C kur **çdo element i B** është edhe element i C.

SI KUNDËRSHTOHET

$$B \not\subset C$$

Mjafton **një element** i B që nuk gjendet në C → **kundërshembull**.

? **Kontroll konceptual 1:** T = kartelat trekëndore, U = të gjitha kartelat. Çfarë duhet të kontrollojmë për të pohuar **T ⊆ U**? Çfarë do të mjaftonte për të provuar **T ⊄ U**?

Nënbashkësia është vend i mirë për arsyetimin me **shembull dallues** dhe **kundërshembull**.

≠ Terminologjia e shembujve

Shembull

Rast që **plotëson** përkufizimin ose kushtin e konceptit.

Një kartelë trekëndore → shembull i «kartela trekëndore».

Jo-shembull

Rast që **nuk e plotëson** kushtin; bën të dukshëm **kufirin** e konceptit.

Një kartelë katrore → jo-shembull i «kartela trekëndore».

Kundërshembull

Rast që **rrëzon një pohim të përgjithshëm**: plotëson kushtin fillestar, jo përfundimin.

«Çdo kartelë trekëndore është e mbushur» ← trekëndësh i pambushur.

Gjenerimi dhe krahasimi i shembujve eksploron kufijtë e konceptit (Watson & Mason, 2005).

6. Shembull i zhvilluar: kriteri i fshehur

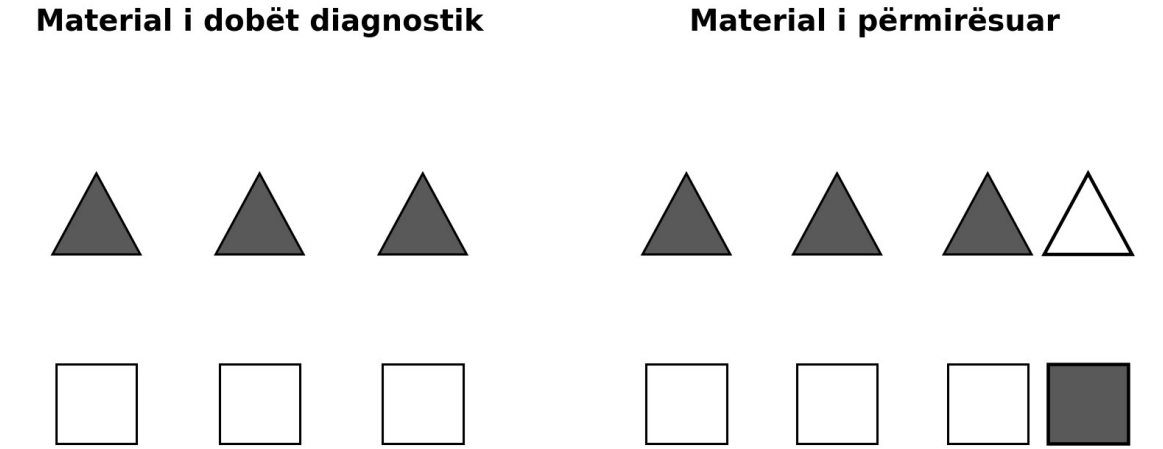


Figura 3. Nga material i paqartë diagnostik te material që ndan dy kriteret.

PROBLEMI

Material i paqartë

3 trekëndësha **të mbushur** + 3 katrorë **të pambushur**. Ndarja e saktë mund të vijë nga **forma** ose nga **mbushja**.

ZGJIDHJA

Material diagnostik

Shtojmë **trekëndësh të pambushur** + **katror të mbushur** → dy kriteret japin vendime të ndryshme.

Pyetja kyçe: Cila kartelë e re ka fuqinë më të madhe diagnostikuese dhe pse?

Sinteza e Orës I · çfarë duhet të dini për provim

Sinteza: Një përgjigje e saktë **nuk është e barabartë** me dëshminë e kuptimit. Mësuesi duhet të dijë çfarë kriteri mund të ketë përdorur nxënësi dhe të krijojë një rast që i **dallon** interpretimet.

Për provim · Ora I

- Pse bashkësia kërkon **kriter të përcaktuar qartë**; lidhja klasifikim–kriter
- Objekti matematikor ≠ emërtimi ≠ paraqitja grafike
- Elementi dhe nënbashkësia; pse përgjigjja e saktë **nuk provon** kuptimin
- Shembull, jo-shembull dhe **rast dallues** për të testuar një kriter

Vetëkontroll

- Një kriter **i qartë** dhe një **i paqartë** për të njëjtin koleksion
- Si do ta dallonit nëse fëmija klasifikon sipas **formës** apo **mbushjes**?

ORA II · 45 MINUTA

Nga gjuha e zakonshme te simbolika e bashkësive

Listimi · ∈ dhe ⊆ · bashkësia boshe · përfshirja e mirëfilltë · analiza e pohimeve



7. Emërtimi dhe shkrimi i një bashkësie

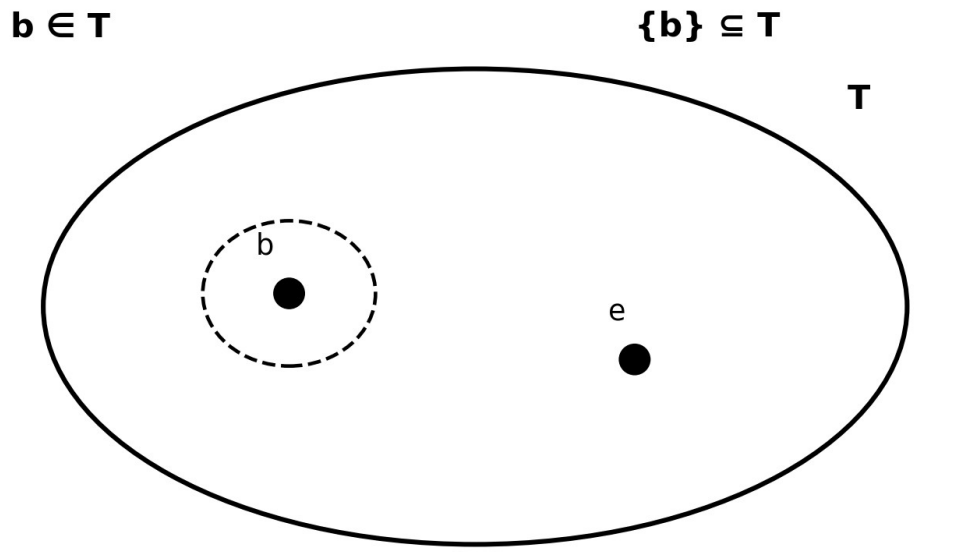
Shkrimi	Interpretimi
$A = \{a, b, c\}$	A ka elementet a, b dhe c
$\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$	e njëjta bashkësi; rendi nuk ka rëndësi
$\{a, a, b\} = \{a, b\}$	përsëritja e emrit a nuk krijon element të ri
$\{a, b\} \neq \{a, c\}$	elementet nuk janë saktësisht të njëjta

PARIMI

Bashkësi ≠ varg

- Shkronja të mëdha për bashkësitë; elementet në **kllapa gjarpërore**
- Simboli vjen **pasi** kuptohet çfarë përfaqëson lista
- **Rendi** dhe **përsëritja** nuk e ndryshojnë bashkësinë – ndryshe nga vargu ose lista e renditur

8. Përkatësia: marrëdhënia objekt–bashkësi



∈ lidh një objekt me një bashkësi; ⊆ lidh një bashkësi me një bashkësi.

Figura 4. Dallimi strukturor ndërmjet b ∈ T dhe {b} ⊆ T.

PËRKATËSIA

$b \in T$

Objekti **b** është element i T. Lidh **objekt → bashkësi**.

PËRFSHIRJA

$\{b\} \subseteq T$

Bashkësia njëelementëshe **{b}** është nënbashkësi e T. Lidh **bashkësi → bashkësi**.

? **Pyetja kyçe:** Çfarë lloj objekti ndodhet në anën e majtë të secilit simbol?

∈ Lloji i objektit përcakton simbolin

Pohimi	Objekti i majtë	Marrëdhënia
$b \in T$	kartela b	objekt → bashkësi
$\{b\} \subseteq T$	bashkësia njëelementëshe {b}	bashkësi → bashkësi
$T \subseteq U$	bashkësia T	bashkësi → bashkësi

✗ **Gabim tipik: $b \subseteq T$** është i papërshtatshëm kur b emërton një kartelë individuale. **$T \in U$** është po ashtu i papërshtatshëm nëse elementet e U janë kartela dhe jo bashkësi kartelash.

9. Nënbashkësia dhe përfshirja e mirëfilltë

$B \subseteq C$

Përfshirje që **lejon barazinë**: çdo bashkësi është nënbashkësi e vetes.

$B \subsetneq C$

Përfshirje e mirëfilltë: $B \subseteq C$ dhe $B \neq C$.

$\subset$?

Shmanget: përdoret me **konventa të ndryshme** në literaturë.

? **Më i rëndësishëm se simboli është argumenti:** «A ka ndonjë element të B që mungon në C?» dhe «A ka C elemente shtesë?»

∅ 10. Bashkësia boshe: ∅, {0} dhe {∅}

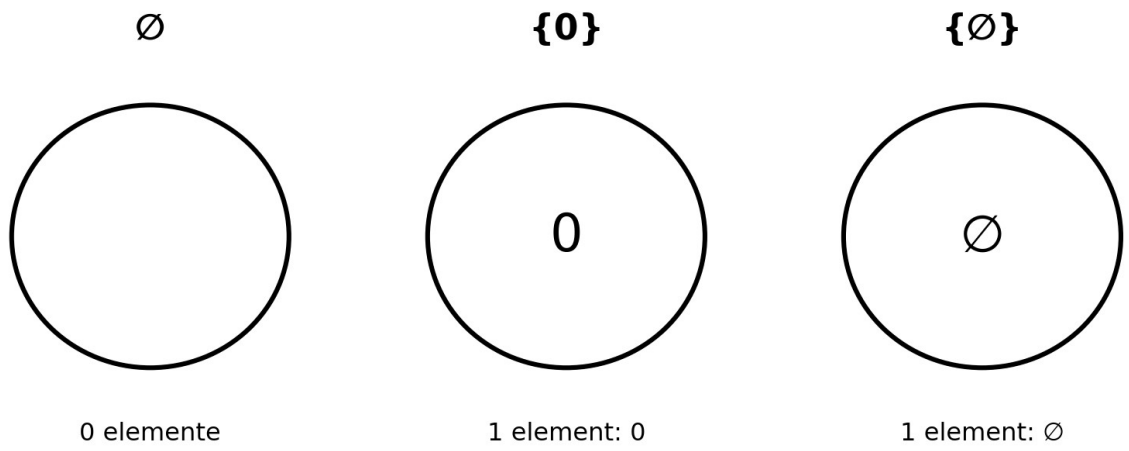


Figura 5. Tri objekte që nuk duhen ngatërruar: ∅, {0} dhe {∅}.

Objekti	Sa elemente?	Çfarë elementi?
∅	0	asnjë
{0}	1	numrin 0
{∅}	1	bashkësinë boshe

Bashkësia boshe shënohet **∅** ose **{ }**.

? **Pyetja kyçe:** Çfarë po numërojmë: mungesën, numrin zero apo vetë bashkësinë boshe si element?

∅ ⊆ A gjithmonë · ∅ ∈ A jo domosdoshmërisht

GJITHMONË E VËRTETË

$\emptyset \subseteq A$ për çdo A

Nga **përkufizimi**: nuk ka element të ø që të mund të mungojë në A.

Argumentojmë **nga përkufizimi**, jo nga figura.

VARET NGA A

$\emptyset \in A$?

Jo domosdoshmërisht. Përkatësia varet nga mënyra si janë përcaktuar elementet e A.

P.sh. ø ∈ {ø , 1}, por ø ∉ {1, 2}.

?

Kontroll konceptual 2: A është ∅ ∈ A për çdo bashkësi A? **Jo.** Kjo pyetje është e dobishme për të dalluar ⊆ nga ∈.

V/G

11. Klinikë pohimesh: e vërtetë apo e pavërtetë?

$$U = \{a, b, c, d, e, f\} \qquad T = \{b, e\} \qquad B = \{a, b, e, f\}$$

Pohimi	V/G	Arsyetimi që kërkohet
$b \in T$	V	b është listuar si element i T
$f \in T$	G	f nuk është element i T
$\{b\} \subseteq T$	V	elementi i vetëm i {b} gjendet në T
$T \subseteq B$	V	b dhe e gjenden të dy në B
$B \subseteq T$	G	a ose f jep kundërshembull
$T \in B$	G	elementet e B janë kartela, jo bashkësia T

Sinteza e Orës II · çfarë duhet të dini për provim

Sinteza: Simbolika **nuk** duhet mësuar si kod grafik. Çdo simbol lidhet me **llojin e objekteve** që marrëdhënia lidh: objekt–bashkësi ose bashkësi–bashkësi.

Për provim · Ora II

- Shënimet **∈, ∉, ⊆**; objekti ≠ bashkësia njëelementëshe
- Bashkësia boshe dhe dallimi **ø, {0}, {ø}**
- Përfshirja/mos-përfshirja përmes **përkufizimit** dhe **kundërshembullit**
- Simbolika **me fjalë**; nga shembulli konkret te shënimi

Vetëkontroll

- Dallimi midis **b ∈ T** dhe **{b} ⊆ T**
- Pse **ø ⊆ A** për çdo A, por **ø ∈ A** jo domosdoshmërisht?

ORA III · 45 MINUTA

Kardinaliteti, barazia dhe materialet konkrete

Kardinaliteti · barazia / ekuivalenca · korrespondenca një-për-një · materialet konkrete · dy kritere



12. Kardinaliteti: sa elemente ka bashkësia?

$$|A| = n(A)$$

numri i elementeve të një bashkësie të fundme

- **Kardinaliteti** i një bashkësie të fundme = numri i elementeve të saj
- LOUIS përdor **n(A)**; burime të tjera **|A|** – në këtë leksion kryesisht **|A|**
- Studenti duhet t'i njohë **të dyja konventat**
- Kardinaliteti tregon **madhësinë**, jo **cilët** janë elementet

13. Barazia e bashkësive dhe kardinaliteti i njëjtë

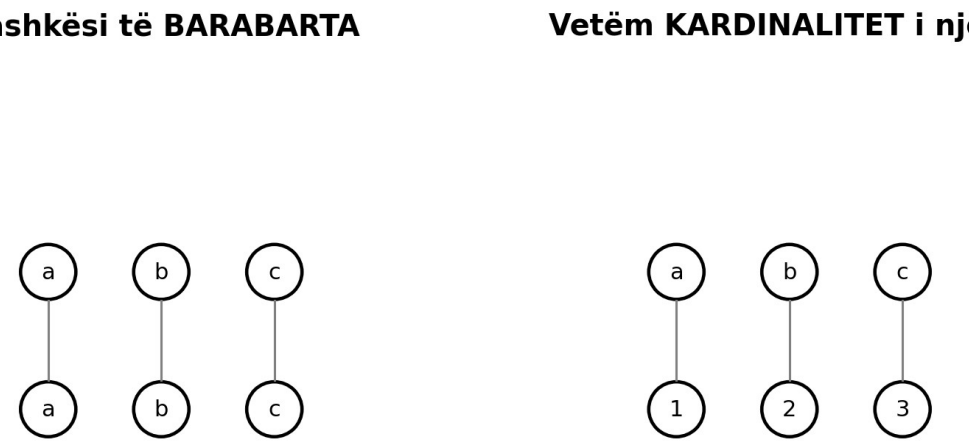


Figura 6. Bashkësi të barabarta kundrejt bashkësive vetëm me kardinalitet të njëjtë.

«CILËT?»

Barazi

Dy bashkësi janë **të barabarta** kur kanë **saktësisht të njëjtat elemente**.

«SA?»

Kardinalitet i njëjtë

Po aq elemente, edhe kur elementet janë krejt të ndryshme (**ekuinumerike**).

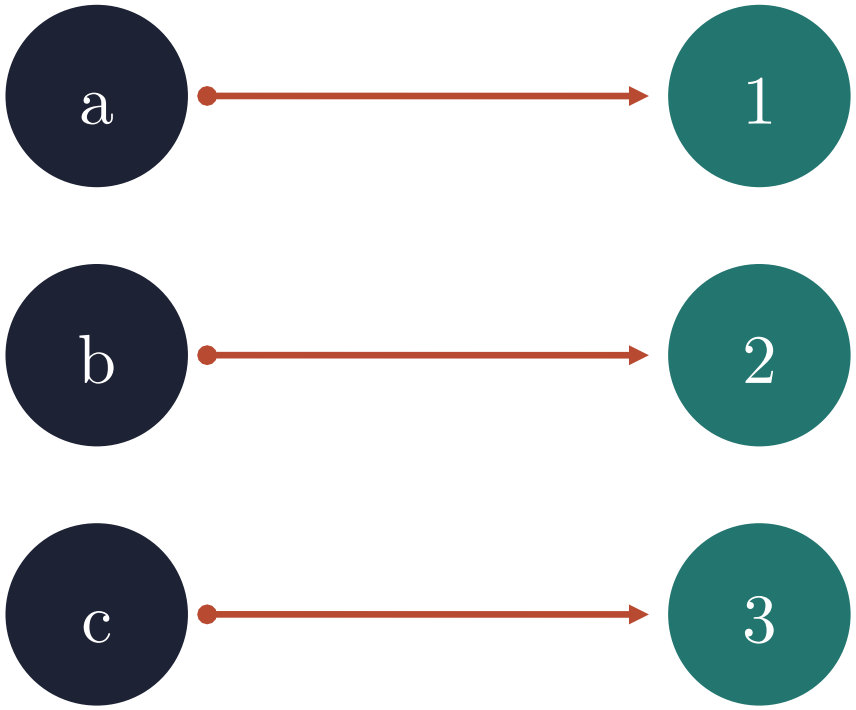
? **Pyetja kyçe:** A po krahasojmë identitetin e elementeve apo vetëm numrin e tyre?

Barazi apo vetëm kardinalitet i njëjtë?

A	B	Barazi?	Kardinalitet i njëjtë?
{a, b, e}	{e, a, b, b}	Po	Po
{a, b, e}	{c, d, f}	Jo	Po
{a, b}	{a, b, c}	Jo	Jo

Pyetje diagnostikuese: Nxënësi thotë «A dhe B janë të barabarta sepse të dyja kanë nga tre elemente». Mësuesi e zhvendos vëmendjen nga **«sa?»** te **«cilët?»**: «A janë po ata elemente në të dyja bashkësitë?»

14. Korrespondenca një-për-një si urë drejt numrit



Asnjë element pa çift → **po aq sa**

- Kardinaliteti i njëjtë mund të kontrollohet **pa numëruar**
- Çdo element çiftëzohet me **saktësisht një** element të tjetrës; **asnjë** nuk mbetet pa çift
- Lidhje e drejtpërdrejtë me zhvillimin e **konceptit të numrit** në arsimin fillor
- «**Po aq sa**» ndërtohet **para** se shkrimi numerik të bëhet mjeti kryesor

15. Materialet konkrete me tipare të shumëfishta

24

objekte në burimin LOUIS

2 madhësi × 4 ngjyra × 3 forma

12

kartela në përshtatjen tonë

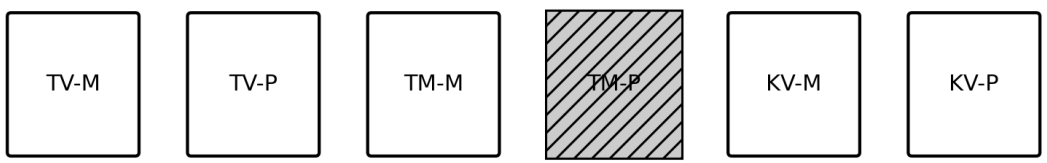
2 madhësi × 2 mbushje × 3 forma

Tipari	Vlerat
Madhësia	e vogël / e madhe
Mbushja	e mbushur / e pambushur
Forma	rreth / trekëndësh / katror

i

Logjika e klasifikimit **ruhet**; ngjyra zëvendësohet nga **mbushja** për shtypje të qartë dhe ekonomike. Çdo kartelë = **treshe vetish** → hyn në shumë nënbashkësi.

16. Aktivitet: «Cila kartelë mungon?»



ZHVILLIMI

Hapat

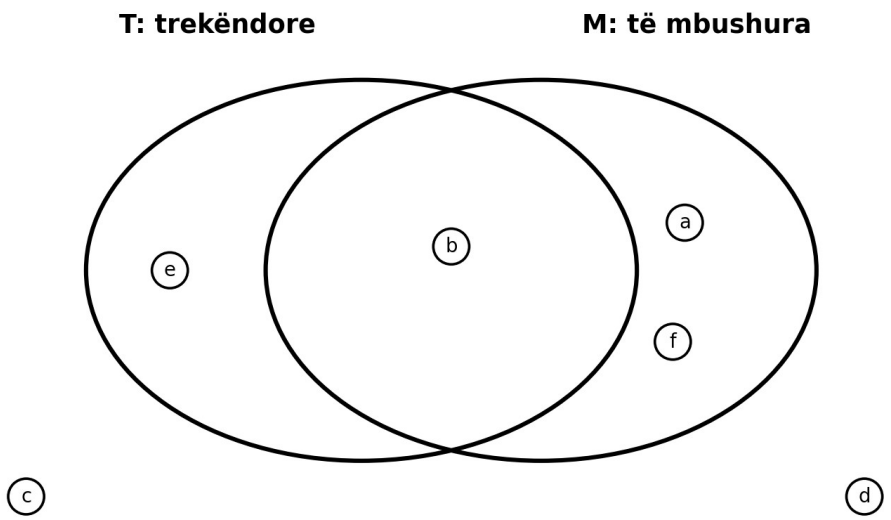
- Zgjidhen kartelat e një kategorie
- Vëzhgim **20–30 sekonda**
- Një kartelë hiqet pa u parë
- Identifikohet kartela + **«Si e gjete?»**

Figura 7. «Cila kartelë mungon?» – fokus te strategjia, jo vetëm te rezultati.

Lidhje me praktikën: Provojeni me dy fëmijë të moshave të ndryshme dhe dokumentoni strategjitë – **jo për t'i etiketuar**, por për të kuptuar si organizojnë informacionin.

Pyetja kyçe: Po t'ua ndryshonim vendet kartelave, a do të funksionontë e njëjta strategji?

17. Klasifikimi sipas dy kritereve



Forma / Mbushja	E mbushur	E pambushur
Trekëndore	**plotëson të dy kriteret**	vetëm kriterin e formës
Jo trekëndore	vetëm kriterin e mbushjes	asnjërin kriter

Një kartelë me dy veti **nuk shkruhet dy herë**. Fokusi: kuptimi i **«dhe»**, jo prerja formale.

Figura 8. Klasifikim sipas dy kritereve: forma trekëndore dhe mbushja.

? **Pyetja kyçe:** A kemi dy kartela b apo një kartelë me dy përkatësi?

Σ Sinteza e Orës III · çfarë duhet të dini për provim

SA?

Kardinaliteti

CILËT?

Barazia

IDENTITET + VETI

Klasifikimi me shumë tipare

Për provim · Ora III

- Barazia e bashkësive ≠ **kardinalitet i njëjtë**
- Korrespondenca **një-për-një** për «po aq sa»
- Dy kritere **pa dyfishuar** identitetin e objektit
- Materialet konkrete = **mjet për arsyetim**, jo qëllim në vetvete

Vetëkontroll

- Dy bashkësi me **kardinalitet të njëjtë**, por **jo të barabarta**
- Pse objekti që plotëson dy kritere **nuk shkruhet dy herë**?

ORA IV · 45 MINUTA

Nga përmbajtja matematikore te vendimi didaktik



Gabimet · dëshmia · pyetjet diagnostikuese · mikroprojektim · vlerësim formues · sintezë

PCK

18. Njohuria e mësuesit nuk mbaron te përkufizimi

Përkufizimi i saktë i nënbashkësisë **nuk mjafton** për ta mësuar atë. Mësuesi duhet të dijë:

Përfaqësimet

cilat paraqitje të përdorë

Gabimet

cilat keqkuptime janë të mundshme

Pyetjet

cilat pyetje zbulojnë arsyetimin

Diagnoza

kur një përgjigje e vetme nuk mjafton

i

Njohuria e përmbajtjes për mësimdhënien: lidhja e matematikës me paraqitjet, gabimet e mundshme dhe arsyetimin e nxënësit (Shulman, 1986; Ball, Thames & Phelps, 2008). Çdo ide matematikore → vendim për **shembullin, pyetjen, dëshminë, ndërhyrjen**.

19. Zinxhiri profesional i vendimit didaktik



Figura 9. Zinxhiri profesional i vendimit didaktik.

Aktivitet: Zgjidhni një koncept dhe ecni hap pas hapi nëpër pesë kutitë. **Mos kaloni te ndërhyrja** pa formuluar dëshminë që do të mblidhet.

Pyetja kyçe: Çfarë rreziku ka kur ndërhyrjen e zgjedhim para se të dimë pse nxënësi u përgjigj ashtu?

Matrica profesionale: nga koncepti te ndërhyrja

Koncepti	Keqkuptimi i mundshëm	Detyra diagnostikuese	Dëshmia	Ndërhyrja
Bashkësia	kufiri grafik merret si vetë bashkësia	ndryshohet forma e kufirit pa ndryshuar elementet	ruhet i njëjti grup elementesh	rikthim te kriteri dhe elementet
Përkatësia	pozicioni grafik merret si kriter	zhvendoset vizatimi i elementit	vendimi mbështetet te vetia	lidhje objekt–kriter–bashkësi
Nënbashkësia	$\in$ dhe $\subseteq$ ngatërrohen	krahasohen $b \in T$ dhe $\{b\} \subseteq T$	dallohet objekt nga bashkësi	paraqitje paralelisht konkrete dhe simbolike
Barazia	kardinaliteti i njëjtë merret si barazi	dy bashkësi me 3 elemente të ndryshme	kontrollohen identitetet	kërkohet element dallues
Bashkësia boshe	0 merret si element i boshit	krahasohen $\varnothing$ dhe $\{0\}$	dallohet mungesa nga objekti zero	«çfarë po trajtojmë si element?»

A–D

20. Katër raste klase për analizë

Rasti A · kriteri i padukshëm

Zgjedh saktë trekëndëshat, por materiali ka **vetëm trekëndësha të mbushur**. Mos jep menjëherë «e kuptoi» → **rast i ri** që ndan formën nga mbushja.

Rasti B · simbolika pa lidhje

Përzgjedh saktë b dhe e, por shkruan **T = {b, f}**. Ndoshta ngatërrim etiketash → **trego kartelën** për çdo shkronjë; përsërite me identifikues të rinj.

Rasti C · barazia dhe madhësia

«{a,b} dhe {c,d} janë të barabarta, kanë nga dy.» → «A janë **po ato objekte**? Trego një element që është te njëra dhe jo te tjetra.»

Rasti D · bashkësia boshe

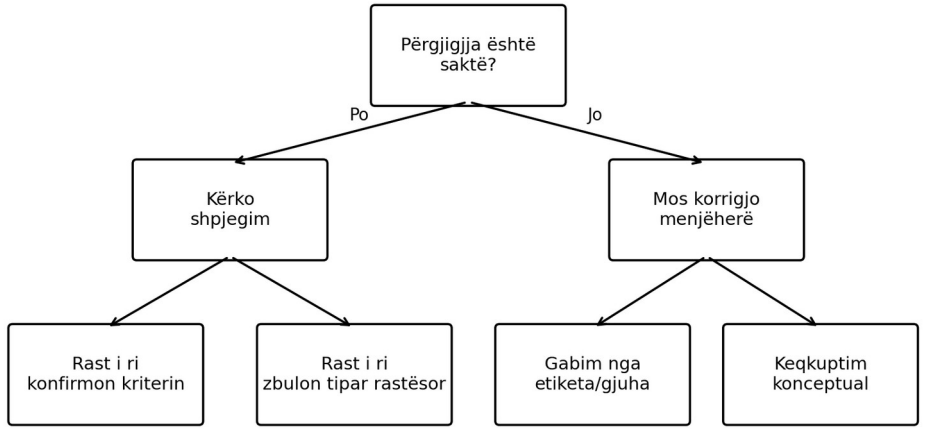
Vendos kartelën me **shifrën 0** brenda grupit bosh. → «**Sa kartela** ka tani ky grup?» Zero ≠ mungesë elementesh.

21. Mikroprojektim 10-minutësh

Në dyshe: një segment mësimor për **klasifikimin sipas formës**, me një **cikël të plotë diagnostik**.

1. Formuloni një rezultat të vëzhgueshëm
2. Zgjidhni 6–8 kartela; pse secila është e nevojshme
3. Të paktën një rast që dallon dy kritere të mundshme
4. Pyetja kryesore + dy pyetje pasuese
5. Parashikoni dy përgjigje të ndryshme të nxënësit
6. Çfarë dëshmie do t'ju bënte të ndryshonit ndërhyrjen

22. Vlerësimi formues: çfarë vëzhgojmë?



Niveli	Treguesi
0 · i pamjaftueshëm	zgjedh pa kriter të qëndrueshëm ose përdor simbolikë pa kuptim
1 · pjesërisht	zgjedh saktë, por shpjegimi është i paqartë ose varet nga tipar rastësor
2 · i plotë	zgjedh, përjashton dhe argumenton sipas vetive; e transferon kriterin te një rast i ri

Figura 10. Pemë vendimmarrjeje për interpretimin e përgjigjes.

Parim vlerësimi: Një përgjigje e vetme **nuk** kthehet automatikisht në etiketë ose diagnozë. Duhet **seri e vogël dëshmish** dhe pyetje që kontrollojnë interpretimin.

♿ 23. Përfshirja, aksesueshmëria, kërkesa matematikore

PËRSHTATJE

Vështirësi pamore

Objekte **të mëdha**, **konture të forta**, objekte **të prekshme**.

PËRSHTATJE

Vështirësi gjuhësore

Tregim i objektit, vendosje fizike, strukturë fjalie «**Kjo hyn sepse…**».

✓ Përshtatja **nuk e jep përgjigjen**: heq pengesën që nuk është pjesë e objektivit, që mësuesi të vëzhgojë konceptin që synon.

! Paraqitjet e shumëfishta ≠ «**stilet e të nxënit**». Rrugë të ndryshme hyrjeje (konkrete, figurative, verbale, simbolike) në **të njëjtin** objekt matematikor; mbështetja sipas **pengesës së vëzhguar**, jo sipas etiketës.

Σ 24. Përmbledhja e 180 minutave

{ } Bashkësia ndërtohet nga **koleksioni dhe kriteri**, jo nga simboli

∈ ⊆ Elementi dhe nënbashkësia: **nivele të ndryshme**; ∈ dhe ⊆ nuk janë të këmbyeshme

∅ Bashkësia boshe **nuk është** {0} ose {∅}

|A| Kardinaliteti = **numri** i elementeve; barazia = **të njëjtat** elemente

Materialet konkrete vlejnë vetëm me **pyetje dhe dëshmi të qarta**

∩ Dy kritere → përkatësi e dyfishtë **pa dyfishuar objektin**

→ Vendimi i mësuesit bazohet në **dëshmi të arsyetimit**

? Pyetje përmbyllëse · 3 minuta

Një nxënës klasifikon saktë të gjitha kartelat.
A mjafton kjo për të pohuar se e ka kuptuar konceptin?

1 · Dëshmia shtesë

Çfarë dëshmie shtesë do të kërkonit?

2 · Një pyetje e vetme

Me cilën pyetje do ta mblidhnit këtë dëshmi?

Çfarë duhet të dini për provim · Ora IV

Për provim · Ora IV

- Zinxhiri **koncept → keqkuptim → detyrë diagnostikuese → dëshmi → ndërhyrje**
- Gabimi si **burim informacioni**; hipoteza ≠ dëshmia
- Projektimi i një **pyetjeje diagnostikuese** dhe i një **rasti transferimi**
- Përshtatja e materialit **pa ndryshuar objektivin** matematikor

Vetëkontroll

- Çfarë **dëshmie** do të kërkonit para se të vendosnit një ndërhyrje?
- Si ndryshon një **pyetje verifikuese** nga pyetja «A e kuptove?»

I–III

25. Transferimi në arsimin fillor · shembuj orientues

Koncepti	Shembull transferimi (klasat I–III)	Dëshmia që kërkohet
Klasifikimi dhe kriteri	Kl. I: ndarje sipas një vetie të dukshme; më pas ndryshohet kriteri	Shpreh/tregon rregullin dhe e zbaton te një objekt i ri
Bashkësia dhe elementi	Kl. I–II: «grupi i objekteve që plotësojnë kushtin»; pa simbolikë universitare	Vendos për përfshirjen e objektit dhe jep arsyen
Bashkësia boshe	Kl. I–II: grup me kusht që asnjë objekt nuk e plotëson	Dallon «nuk ka asnjë objekt» nga kartela me numrin 0
Kardinaliteti dhe barazia	Kl. I–II: grupe me po aq objekte, por objekte/vendosje të ndryshme	Dallon «i njëjti numër» nga «të njëjtat objekte»
Dy kritere	Kl. II–III: formë + një veti tjetër, pa dyfishuar objektin	Identifikon dy vetitë dhe shpjegon kategorinë

★ **Parim profesional:** Studenti-mësues duhet të dijë **më shumë matematikë** sesa formalizohet me fëmijën – për të zgjedhur shembujt, interpretuar gabimet dhe vendosur sa formalizim është i përshtatshëm.

PJESA II

Thellim universitar për studim

Zgjeron bërthamën 180-minutëshe. Rekomandohet pas leksionit, për përgatitje të plotë dhe përgjigje të argumentuara në provim.

A Thellim A.1 · Koleksion me dy atribute

Numri →	1	2	3
trekëndësh	 T1	 T2	 T3
katror	 K1	 K2	 K3
rreth	 R1	 R2	 R3

AKTIVITET

Aktiviteti 1 · 8 minuta

Ndajini kartelat **sipas formës**, pastaj **sipas numrit**. Shkruani grupet dhe shpjegoni pse e njëjta kartelë hyn në një nënbashkësi sipas formës dhe në një tjetër sipas numrit.

i

Objekti ka **identitet të pandryshueshëm**, por klasifikohet ndryshe sipas kriterit → përgatit **përkatësinë e shumëfishtë** pa dyfishuar objektin.

Burimi LOUIS: monedha sipas llojit dhe vitit → këtu: kartela origjinale sipas formës dhe numrit.

A Thellim A.2 · Çfarë do të thotë «e kupton konceptin»?

Dëshmi e dobët	Dëshmi më e fortë
e emërton figurën	**e njeh edhe kur orientimi/madhësia ndryshon**
zgjedh një shembull tipik	**dallon shembuj nga jo-shembuj të afërt**
jep përgjigjen	**shpjegon vetinë që mbështet përgjigjen**
përsërit modelin e mësuesit	**transferon kriterin në rast të ri**

Përkufizim ≠ imazh konceptual

Njohja e emrit **nuk** është provë e plotë e kuptimit. Kërkohen raste tipike dhe jotipike, jo-shembuj, arsyeja e përkatësisë dhe **transferimi** (Tall & Vinner, 1981).

? **Vetëkontroll:** A mund të ketë një nxënës përgjigje të saktë dhe megjithatë koncept të paqëndrueshëm? Jepni një shembull dhe rastin e ri që do të përdornit.

A Thellim A.3 · Koncepti, termi dhe paraqitja

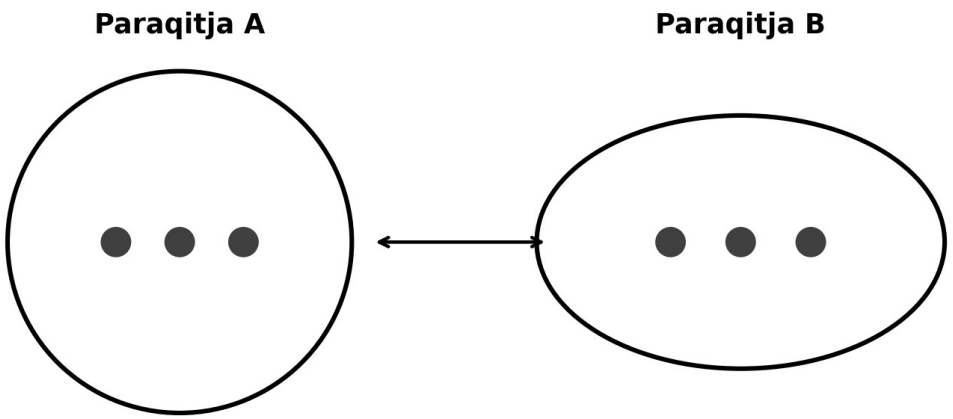


Figura 11. E njëjta bashkësi me dy paraqitje grafike të ndryshme.

Termi

emërtimi gjuhësor

Simboli

shenjë konvencionale

Paraqitja

mënyra si e bëjmë idenë të perceptueshme

? **Pyetja kyçe:** A është bashkësia vija e mbyllur apo elementet e përcaktuara prej kriterit?

! Bashkësia **nuk është** rrethi që vizatojmë. Rrethi → ovale pa lëvizur pikat: ndryshoi **paraqitja**, jo bashkësia.

A Thellim A.4 · Variacioni i kontrolluar i shembujve

Ndryshimi	Çfarë kontrollon?	Shembull pyetjeje
orientimi	a merret pozicioni si veti përcaktuese?	A mbetet trekëndësh kur rrotullohet?
madhësia	a merret madhësia si veti?	Po trekëndëshi shumë i vogël?
mbushja	a lidhet forma me ngjyrën/mbushjen?	Po trekëndëshi i pambushur?
afërsia me prototipin	a njihen format jotipike?	A është trekëndësh edhe pa bazë horizontale?

i

Ndryshoni **tiparet jo-përcaktuese**. Klasifikimi i shembujve të zgjedhur me kujdes e mbështet arsyetimin te **marrëdhënia përkufizuese**, jo te ngjashmëria sipërfaqësore (Steininger et al., 2022).

A Thellim A.5–A.6 · Jo-shembulli, kundërshembulli, sinteza

Jo-shembulli

Objekt që **nuk i përket** klasës → qartëson **kufijtë** e konceptit.

Kundërshembulli

Rast që **rrëzon** një pohim të përgjithshëm → funksion logjik **më i fortë**.

Shembull i zgjidhur

«Çdo trekëndësh ka një brinjë horizontale» ← rrëzohet nga një **trekëndësh i rrotulluar**. Një **katror** është jo-shembull i trekëndëshit, por **nuk** është kundërshembull: pohimi flet vetëm për trekëndëshat.

Σ **A.6 · Mini-sintezë:** Koncepti mësohet duke dalluar **vetitë që ruhen** kur tiparet rastësore ndryshojnë – jo duke parë shumë figura të ngjashme.

B Thellim B.1–B.2 · Nga objekti te shënimi; klinika ∈ / ⊆

? **Kontroll i shpejtë:** Kartela a, b, c; shkruani **A = {a, c}**. Tregoni elementet e A, një element **jo** në A dhe një bashkësi njëelementëshe **⊆ A**.

Pohimi	Statusi	Arsyetimi
$b \in \{b, e\}$	i saktë	b është element
$\{b\} \subseteq \{b, e\}$	i saktë	çdo element i {b} është në T
$b \subseteq \{b, e\}$	jo në këtë model	b nuk është bashkësi
$\{b\} \in \{b, e\}$	i pasaktë	elementet janë b dhe e, jo {b}
$\{b, e\} \subseteq \{b, e\}$	i saktë	çdo bashkësi është nënbashkësi e vetes
$\emptyset \subseteq \{b, e\}$	i saktë	nuk ka element të ø që mungon në T

Simbol i saktë pa arsyetim verbal = vetëm **njohje procedurale** e shenjës.

B Thellim B.3–B.4 · Mos-përfshirja dhe barazia

B.3 · MOS-PËRFSHIRJA

$$B \not\subset C$$

Mjafton **një** $x \in B$ me $x \notin C$.

B = {a,b,e,f}, T = {b,e}: **$a \in B$** dhe **$a \notin T$** $\Rightarrow B \not\subset T$. Nuk kontrollojmë edhe f.

B.4 · BARAZIA

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ dhe } B \subseteq A$$

Barazia si **përfshirje e dyanshme** – e lidh barazinë me përkufizimin e nënbashkësisë.

? **Pyetje:** Pse **nuk mjafton** $A \subseteq B$ për të përfunduar $A = B$? Jepni një shembull ku $A \subseteq B$, por $A \neq B$.

B Thellim B.5 · Bashkësia boshe: tri ngatërrime të zakonshme

Ngatërrimi	Pse është i gabuar?	Pyetja korrigjuese
$\emptyset = \{0\}$	zero është element te {0}; ∅ s'ka elemente	Sa elemente ka secila?
$\emptyset = \{\emptyset\}$	{∅} ka një element: ∅	Çfarë është brenda kllapave?
$\emptyset \in A$ për çdo A	përkatësia varet nga elementet e A	A e ka ∅ si element apo vetëm si nënbashkësi?

i Kjo pjesë është **qëllimisht më formale** se ajo që u kërkohet fëmijëve: funksioni i saj është **saktësia e mësuesit** të ardhshëm.

B Thellim B.6–B.7 · Shembuj të zgjidhur, pyetje diskutimi

1 $A = \{a, b\},\ B = \{b, a\}$

A = B: të njëjtat elemente; rendi s'ka rëndësi

2 $A = \{a, a, b\},\ B = \{a, b\}$

A = B: përsëritja nuk krijon element të ri

3 $A = \{a, b\},\ B = \{c, d\}$

|A| = |B| = 2, por A ≠ B

4 $A = \emptyset,\ B = \{\emptyset\}$

A ⊆ B **dhe** A ∈ B: ∅ është elementi i vetëm i B

B.7 · Pyetje për diskutim

- A mund të jetë një bashkësi njëkohësisht **element dhe nënbashkësi**? Ndërtoni shembull.
- Pse ∈ dhe ⊆ nuk mësohen vetëm përmes **formës së simbolit**?
- «Jo element» kundrejt «**jashtë vizatimit**»?
- Kur mjafton **kundërshembulli** dhe kur duhet **kontroll i plotë**?

C Thellim C.1–C.2 · Kardinaliteti nuk është identitet

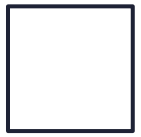
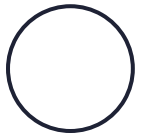
Situata	Pyetja matematikore	Përgjigjja
$A = \{a,b,c\},\ B = \{c,b,a\}$	A janë të barabarta?	**Po**
$A = \{a,b,c\},\ C = \{1,2,3\}$	A kanë të njëjtin kardinalitet?	**Po**
$A = \{a,b,c\},\ C = \{1,2,3\}$	A janë të barabarta?	**Jo**

! Fëmijët përdorin «**njësoj**» për dy kuptime: **të njëjtat objekte** ose **po aq objekte**.

C.2 · Aktivitet studimi

6 kapëse + 6 lapsa në çifte; pastaj lapsat në një vijë **shumë më të gjatë**. A ndryshoi kardinaliteti? Çfarë dëshmie e mbështet?

C Thellim C.3 · Materiali me 12 kartela dhe kodet

	e vogël · e mbushur	e vogël · e pambushur	e madhe · e mbushur	e madhe · e pambushur
trekëndësh	 TV-M	 TV-P	 TM-M	 TM-P
katror	 KV-M	 KV-P	 KM-M	 KM-P
rreth	 RV-M	 RV-P	 RM-M	 RM-P

Si lexohet kodi

forma – madhësia – mbushja

T / K / R

V / M = e vogël / e madhe

M / P = e mbushur / e pambushur

i Shembull: **TV-M** = trekëndësh i vogël, i mbushur. Shkronja **M** ka dy kuptime: në pozicionin e 2-të = «e madhe», pas vizës = «e mbushur».

C Thellim C.4 · Seri aktivitetesh me kartelat

A Klasifikim i lirë

Krijoni ndarje + kriter; një grup tjetër **rindërton kriterin** vetëm nga ndarja.

B Një kriter i dhënë

Sipas formës: numëroni nënbashkësitë dhe elementet; pastaj sipas **madhësisë** dhe **mbushjes**.

C Kartela që mungon

Një kategori, hiqet një kartelë → **strategjia** e identifikimit.

D Dy kritere

«Trekëndore» dhe «e mbushur»; çdo kartelë **vetëm një herë**.

E Krijoni kriterin

4 kartela → kriter që i **përfshin** të katërta dhe **përjashton** një të pestë.

C Thellim C.5 · Strategjitë që mund të vëzhgohen te fëmijët

Strategjia	Si shfaqet?	Çfarë pyet mësuesi?
vizuale globale	«E pashë menjëherë»	Çfarë të ra në sy?
numërim	numëron kategoritë ose elementet	Çfarë po numëroje?
eliminim sistematik	kontrollon tiparet një nga një	Cilin tipar kontrollove të parin?
kujtesë pozicionale	kujton vendin e kartelës	Po t'i ndërrojmë vendet, çfarë ndodh?

→ Nga vlerësimi binar **«e gjeti / nuk e gjeti»** → te **interpretimi i strategjisë**.

D Thellim D.1 · Analiza para aktivitetit

ELEMENTI 1

Objektivi

«Çfarë duhet të jetë në gjendje të bëjë nxënësi?»

ELEMENTI 2

Paranjohuritë

«Çfarë duhet të kuptojë paraprakisht?»

ELEMENTI 3

Materiali

«Cilat tipare duhet të ndryshojnë?»

ELEMENTI 4

Pyetja

«Çfarë arsyetimi dua të dëgjoj?»

ELEMENTI 5

Dëshmia

«Çfarë do të më bindë se kriteri është kuptuar?»

ELEMENTI 6

Ndërhyrja

«Çfarë bëj nëse dëshmia tregon një kriter tjetër?»

D Thellim D.2–D.4 · Tre dialogë të analizuar

D.2 · Forma apo mbushja?

N: «Sepse është e mbushur.»

M: (rreth i mbushur + trekëndësh i pambushur) «Po këto dy ku do t'i vendosje? Pse?»

→ Dëshmi që dallon formën nga mbushja → pastaj ndërhyrja.

D.3 · Element apo nënbashkësi?

N: «T është element i B.»

M: «Çfarë emërton T? Po b? Cilat janë elementet e B?»

→ Kartelë individuale ≠ bashkësi kartelash; simbolika vjen si përmbledhje.

D.4 · Barazi apo numër?

N: «Janë të barabarta, kanë nga tre.»

M: «Të njëjtat objekte apo vetëm i njëjti numër? Trego një objekt vetëm te njëra.»

→ Nga kardinaliteti te identiteti i elementeve.

D Thellim D.5 · Mikro-mësimdhënie 12-minutëshe



1. **2 min** · Kontrollo emërtimet e figurave dhe kuptimin e udhëzimit
2. **2 min** · Paraqit e argumento një përzgjedhje dhe një përjashtim
3. **3 min** · Klasifikohen 6 kartela
4. **2 min** · Rast që dallon formën nga mbushja
5. **2 min** · Shpjegim për një element të përfshirë dhe një të përjashtuar
6. **1 min** · Kartelë e re → transferimi i kriterit

✓ **Kriter suksesi:** Nuk mjafton që kartelat të jenë vendosur saktë. Nxënësi **shpjegon kriterin** dhe e **përdor në një rast të ri**.

D Thellim D.6 · Rubrikë e shkurtër për mikro-mësimdhënien

Kriteri	Niveli 4	Niveli 3	Niveli 2	Niveli 1
Saktësia matematikore	E saktë, e argumentuar, transferohet në rast të ri	E saktë dhe e argumentuar	Pjesërisht e saktë; paqartësi jo thelbësore	Pasaktësi konceptuale thelbësore
Materiali / shembujt	Variacion i kontrolluar; dallon hipoteza; rast transferimi	E bën konceptin të dukshëm; ka rast dallues	Ilustron, por s'dallon mirë interpretimet	Dekorativ ose nxit keqkuptim
Pyetjet	Zbulojnë arsyetimin, testojnë alternativat, kërkojnë justifikim	Kërkojnë arsyetim, prodhojnë dëshmi të përdorshme	Kryesisht rezultat ose shpjegim të shkurtër	Kontrollojnë vetëm përgjigjen ose e sugjerojnë
Dëshmia	Paraprakisht; çfarë e mbështet/rrëzon hipotezën	E lidhur qartë me objektivin dhe interpretimin	E përgjithshme ose e paplotë	Nuk specifikohet
Ndërhyrja	Ndryshon sipas dëshmisë + verifikim pas ndërhyrjes	Lidhet drejtpërdrejt me dëshminë	Pjesërisht e lidhur me keqkuptimin	E paracaktuar ose e palidhur me dëshminë

D Thellim D.7 · Prioritetet e studimit

Statusi	Përmbajtja
BËRTHAMA PËR PROVIM	kriteri; bashkësia/elementi; $\in$ vs $\subseteq$; $\varnothing$; kardinalitet/barazi; klasifikimi me dy kritere; dëshmia
ZGJERIM I REKOMANDUAR	përfshirja e mirëfilltë; korrespondenca një-për-një; jo-shembull/kundërshembull; mikroprojektimi
STUDIM I PAVARUR	ushtrimet e zgjeruara, reflektimi, temat e Aneksit për $\cap$, $\cup$, plotësin dhe produktin kartezian

Seminar i integruar · 30 minuta punë bashkëpunuese

Minutat	Detyra	Produkti i studentit
0–6	klasifikim i lirë i 12 kartelave	kriter + grupim
6–12	analizë e një materiali ku forma dhe mbushja përputhen	dy hipoteza + dy karta dalluese
12–18	klinikë ∈ / ⊆ / ∅	arsyetim për 6 pohime
18–24	barazi kundrejt kardinalitetit	element dallues + korrespondencë 1–1
24–30	mikroprojektim	objektiv + pyetje + dëshmi + ndërhyrje

i

Alternativë metodike brenda 180 minutave: zëvendëson pjesë të shpjegimit frontal, nuk shtohet pas tyre. Çdo ekip raporton **kriterin, dëshminë dhe arsyetimin** – jo vetëm rezultatin.

Seminari · detyrat e ekipeve A–D

Ekipi A · material diagnostik

Material me **6 figura** ku forma dhe mbushja japin të njëjtën ndarje; shtoni **2 figura** që e bëjnë detyrën diagnostikuese. Argumentoni.

Ekipi B · ∈ dhe ⊆

T = {b, e}, B = {a, b, e, f}: **4 pohime të sakta + 4 të pasakta**; për çdo pohim të pasaktë, **korrigjimi minimal**.

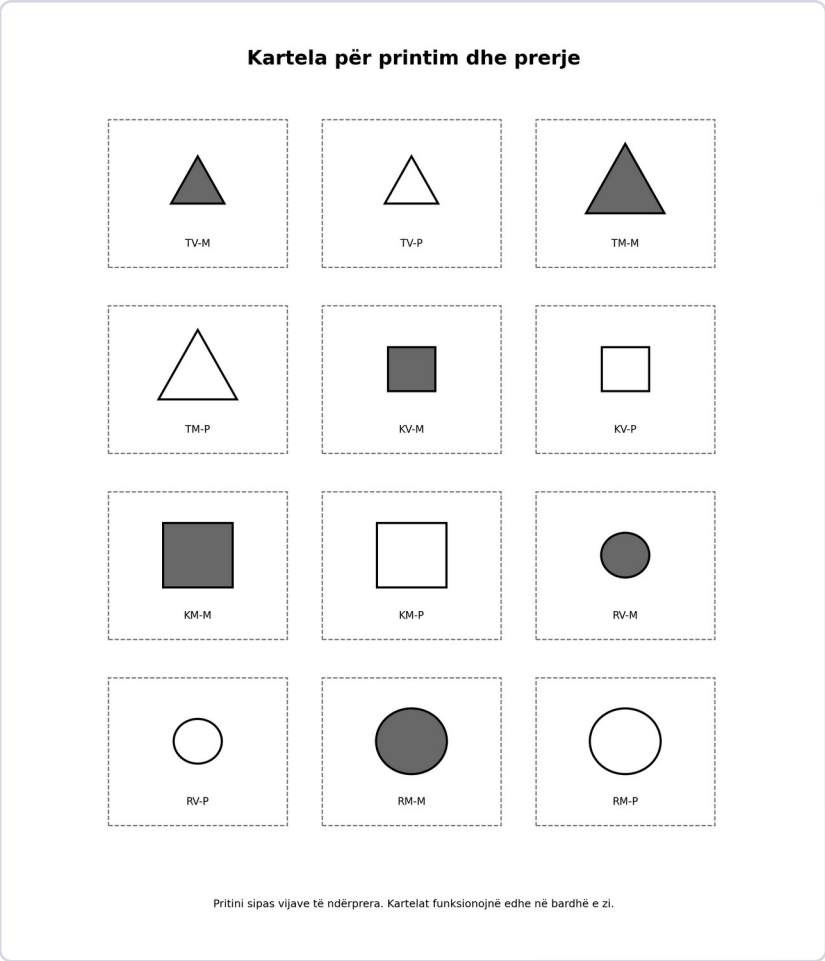
Ekipi C · barazi / kardinalitet

Dy palë me nga **4 elemente**: një çift i barabartë, një vetëm me kardinalitet të njëjtë + **pyetje dalluese**.

Ekipi D · bashkësia boshe

5 pyetje për fëmijën që vendos 0 në bashkësinë boshe: nga veprimi konkret te «zero elemente» ≠ «elementi zero», pa dhënë përgjigjen.

Material studimi · fleta e kartelave



- Shtypeni në **A4**; prisni sipas vijave të ndërprera
- Për: klasifikim, «**kartela që mungon**», **dy kritere**, mikro-mësimdhënie
- Çdo formë në **2 madhësi** × **2 variante mbushjeje** = 12 kartela
- Ndërtoni klasifikimin **pa listë të gatshme**; formuloni kriterin; krahasoni me zgjidhje të tjera

? **Pyetja kyçe:** Cilat tipare janë të ndryshueshme dhe cilat prej tyre po përdorim si kriter në secilën detyrë?

Figura 12. Fletë kartelash për shtypje dhe prerje.

Pyetje orientuese për analizën profesionale

- Cili rregull vlen për **çdo** objekt të grupit?
- A ka objekt **jashtë** grupit që e plotëson gjithashtu rregullin?
- Çfarë ndryshon nëse **rrotullojmë ose zmadhojmë** figurën?
- Po flasim për **një objekt** apo për **një bashkësi** objektesh?
- Çfarë **dëshmie** kemi se nxënësi përdori pikërisht këtë kriter?
- Cili **rast i ri** do t'i dallonte dy interpretimet tona?
- Çfarë duhet të dijë mësuesi këtu që **nuk ka nevojë t'ia thotë** fëmijës?

PJESA III

Ushtrime të drejtuara, zgjidhje dhe thellim matematikor



Gjatë orës zgjidhen 2–3 detyra; pjesa tjetër për vetëkontroll dhe përgatitje për provim.

Ushtrime për vetëkontroll · 1–8

1 Tri mënyra për të klasifikuar të njëjtin koleksion prej **12 objektesh**; kriteri në një fjali të kontrollueshme.

2 Pse «**objektet e bukura**» nuk është kriter i mjaftueshëm? Propozoni version të operacionalizuar.

3 U = {a,b,c,d,e,f}, T = {b,e}, B = {a,b,e,f}: vërtetësia e **b∈T, f∈T, {b}⊆T, T⊆B, B⊆T, T∈B**.

4 Një përgjigje e saktë e prodhuar nga **dy kritere**; shtoni dy raste që i dallojnë.

5 Dallimi midis **ø, {0}, {ø}**; kardinaliteti i secilës.

6 A = {a,b,e}, C = {e,a,b,b}, D = {c,d,f}: kardinalitetet; cilat janë **të barabarta**?

7 Dy bashkësi me **kardinalitet të njëjtë**, por elemente të ndryshme + korrespondencë një-për-një.

8 Hartoni «**Cila kartelë mungon?**» dhe dy strategji të mundshme të fëmijës.

Ushtrime për vetëkontroll · 9–16

9 Koleksion me 2 madhësi, 2 mbushje, 3 forma: **sa objekte** të dallueshme? Shpjegoni logjikën.

10 Dy kritere (trekëndore, mbushja): **katër kategoritë** pa dyfishuar asnjë objekt.

11 Nxënësi thotë «**T është element i B**» kur T⊆B: dy pyetje që dallojnë objektin nga bashkësia.

12 «Të barabarta sepse kanë **nga katër**»: dy bashkësi konkrete + pyetje diagnostikuese.

13 Mikro-sekuencë **8-minutëshe** për bashkësinë boshe: nga objektet te simboli ø.

14 Përshtatni klasifikimin për fëmijë me **vështirësi pamore** pa ndryshuar objektivin.

15 Plotësoni matricën: **koncept → keqkuptim → detyrë → dëshmi → ndërhyrje**.

16 Reflektim **120–150 fjalë**: pse materiali konkret nuk garanton vetvetiu kuptim?

✓ Zgjidhjet 1–2 · Klasifikimi dhe kriteri operacional

1 · Tri klasifikime

Model: 12 kartela (3 forma × 2 madhësi × 2 mbushje): sipas **formës** (trekëndësha, katrorë, rrathë); sipas **madhësisë** (të vogla, të mëdha); sipas **mbushjes** (të mbushura, të pambushura).

Kriteret: «vendoset te trekëndëshat nëse figura është trekëndësh»; «te të mëdhatë nëse i përket variantit të madh»; «te të mbushurat nëse brendësia është e mbushur».

Arsyetimi: objektet janë të njëjta; ndryshon vetëm vetia-kriter. Klasifikimi është koherent kur i njëjti rregull zbatohet ndaj çdo objekti.

2 · Nga subjektiv në operacional

Përgjigjja: «objektet e bukura» varet nga gjykimi personal – dy persona mund të vendosin ndryshe për të njëjtin objekt.

Operacionalizimi: version i matshëm «objektet me gjatësi mbi 5 cm»; version kategorik «kartelat me figurë trekëndore».

Parimi: kriteri duhet të lejojë **vendim të qëndrueshëm** për përkatësinë.

Zgjidhja 3 · Përkatësia dhe nënbashkësia

$$U = \{a, b, c, d, e, f\} \qquad T = \{b, e\} \qquad B = \{a, b, e, f\}$$

Pohimi	Vlerësimi	Arsyeja
$b \in T$	**i vërtetë**	b është element i T
$f \in T$	**i pavërtetë**	f nuk figuron në T
$\{b\} \subseteq T$	**i vërtetë**	elementi i vetëm i {b}, pra b, i përket T
$T \subseteq B$	**i vërtetë**	si b ashtu edhe e janë elemente të B
$B \subseteq T$	**i pavërtetë**	p.sh. $a \in B$, por $a \notin T$
$T \in B$	**i pavërtetë**	elementet e B janë a, b, e, f – jo bashkësia T

Pika kyçe: $\in$ lidh **objekt** me bashkësi; $\subseteq$ lidh **dy bashkësi**. Për të rrëzuar $B \subseteq T$ mjafton **një kundërshembull**, p.sh. a.

✓ Zgjidhjet 4–5 · Kriteri i fshehur; ∅, {0}, {∅}

4 · Përgjigje e saktë që s'zbulon kriterin

Shembulli: vetëm trekëndësha të mbushur dhe katrorë të pambushur; nxënësi i ndan «saktë».

Pse është i paqartë? E njëjta ndarje vjen nga «forma» dhe nga «mbushja».

Rastet dalluese: shtojmë një **trekëndësh të pambushur** dhe një **katror të mbushur**. Sipas formës → shkojnë te grupet e formave; sipas mbushjes → te grupet e mbushjes. Detyra prodhon **dëshmi diagnostikuese**.

5 · ∅, {0} dhe {∅}

|∅| = 0 – asnjë element.

|{0}| = 1 – elementi është numri 0.

|{∅}| = 1 – elementi është vetë bashkësia boshe.

«**Zero elemente**» ≠ «**elementi zero**». Bashkësia që përmban **∅ nuk është boshe**.

Kontroll: ∅ ≠ {0}, ∅ ≠ {∅}, {0} ≠ {∅} – sepse 0 dhe ∅ janë objekte të ndryshme.

✓ Zgjidhjet 6–7 · Barazia, përsëritja, bijeksioni

6 · Barazia dhe përsëritja në listim

Llogaritja: A = {a,b,e} ka 3 elemente. C = {e,a,b,b} përfaqëson {a,b,e}, sepse përsëritja e b nuk krijon element të ri → |C| = 3. D = {c,d,f} ka 3 elemente.

Barazia: A = C; A ≠ D dhe C ≠ D.

Pika kyçe: të tria kanë kardinalitet 3, por **vetëm A dhe C** janë të barabarta.

7 · Ekuinumerike, jo të barabarta

Shembulli: A = {a,b,c}, B = {1,2,3}: |A| = |B| = 3, por A ≠ B.

Korrespondenca: f: A → B, f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3. Çdo element i A lidhet me një dhe vetëm një element të B dhe çdo element i B merret pikërisht një herë → **bijeksion**.

Përfundimi: bijeksioni tregon **ekuinumerueshmëri**, jo barazi.

✓ Zgjidhjet 8–9 · Kartela që mungon; parimi i shumëzimit

8 · «Cila kartelë mungon?»

Projektimi: 6 kartela; vëzhgim 20–30 sekonda; një kartelë hiqet pa u parë; identifikimi + arsyetimi.

Strategjia 1: eliminim sistematik sipas tipareve – forma, madhësia, mbushja → kombinimi që mungon.

Strategjia 2: kujtesë pozicionale/strukturore – vendi ose organizimi i kartelave.

Vlera diagnostikuese: vlerësohet **mënyra** si u gjet; dy përgjigje të njëjta mund të kenë strategji të ndryshme.

9 · Sa objekte në koleksion?

Llogaritja: 2 zgjedhje për madhësinë, 2 për mbushjen, 3 për formën → sipas parimit të shumëzimit **2 × 2 × 3 = 12**.

Arsyetimi: çdo kartelë përcaktohet në mënyrë të vetme nga treshja (madhësia, mbushja, forma). Për çdo formë 2 × 2 = 4 variante; me 3 forma: 3 × 4 = 12.

Kontrolli: nëse mungon ose dyfishohet një kombinim, koleksioni nuk përmban më çdo kombinim **një herë**.

✓ Zgjidhjet 10–11 · Katër kategori; element apo nënbashkësi

10 · Katër kategoritë nga dy kritere

T = kartelat trekëndore, M = kartelat e mbushura, në universin U të 12 kartelave.

1) **T ∩ M** – trekëndore dhe të mbushura

2) **T ∩ (U\M)** – trekëndore, të pambushura

3) **(U\T) ∩ M** – jo trekëndore, të mbushura

4) **(U\T) ∩ (U\M)** – as trekëndore, as të mbushura

Çdo kartelë ka po/jo për secilin kriter → i përket **pikërisht një** kategorie.

11 · «Element» apo «nënbashkësi»

Pyetja 1: «Çfarë emërton T: një kartelë të vetme apo një grup kartelash?» – kontrollon llojin e objektit.

Pyetja 2: «Cilat janë elementet e B? A është T një nga këto elemente, apo çdo element i T gjendet brenda B?» – nga simboli te marrëdhënia.

Ndërhyrja: nëse çdo element i T është në B → **T ⊆ B**. Vetëm nëse T vetë është element i listuar i B → **T ∈ B**.

✓ Zgjidhjet 12–13 · Kardinaliteti; mikro-sekuenca për ∅

12 · Kardinalitet i njëjtë ≠ barazi

Shembulli: A = {a,b,c,d}, B = {1,2,3,4}: |A| = |B| = 4, por A ≠ B.

Pyetja diagnostikuese: «A janë po ata elemente në të dyja bashkësitë, apo vetëm numri është i njëjtë? Trego një element të A që nuk është në B.»

Interpretimi: nëse barazon vazhdimisht nga numri, vështirësia lidhet me **kriterin e barazisë**; ndërhyrja rikthen **identitetin e elementeve**.

13 · Mikro-sekuencë 8' për ∅

0–2': «Zgjidhni kartelat që janë njëkohësisht **rreth dhe trekëndësh**.» – nuk ka asnjë.

2–4': «Bashkësia e objekteve që plotësojnë kriterin ka **zero elemente**.» Bashkësia ekziston edhe pa elemente.

4–6': emërtohet «bashkësia boshe»; krahasohet me **{0}**.

6–8': simboli **ø** + transferim: «katrore **dhe** trekëndore?» Kriter suksesi: **shpjegimi**.

✓ Zgjidhjet 14–15 · Përshtatja; matrica diagnostike

14 · Përshtatje për vështirësi pamore

Përshtatja: objekte të mëdha, forma me **reliev**, tekstura të dallueshme, pjesë që preken lehtë; për shikim të pjesshëm rritet **kontrasti** dhe madhësia.

Çfarë nuk ndryshon: kërkesa konceptuale – identifikon tiparin, formulon kriterin, e zbaton në raste të reja.

Vlerësimi: arsyetimi mbi kriterin, **jo** modaliteti shqisor.

15 · Matrica diagnostike për ∈ / ⊆

Keqkuptimi: të dy simbolet = «është brenda», të këmbyeshme.

Detyra: T = {b,e}: vlerësohen **b∈T** dhe **{b}⊆T**; çfarë objekti është majtas?

Dëshmia: b = objekt, {b} = bashkësi, e lidhur me simbolin.

Ndërhyrja: objekte konkrete + kuti: «ky objekt është element i grupit» → «grupi me këtë objekt është nënbashkësi»; simbolika pas marrëdhënieve verbale.

✓ Zgjidhja 16 · Pse materiali konkret s'garanton kuptim

MODEL REFLEKTIMI · RRETH 135 FJALË

Materiali konkret e bën një ide matematikore të dukshme dhe të manipulueshme, por **nuk e prodhon automatikisht kuptimin**. Dy nxënës mund të kryejnë të njëjtin veprim me të njëjtat kartela dhe të përdorin kritere të ndryshme, madje njëri mund të arrijë përgjigjen e saktë rastësisht. Prandaj vlera didaktike e materialit varet nga **detyra**, nga **pyetjet** që e shoqërojnë dhe nga lidhja me paraqitjen verbale e simbolike. Mësuesi duhet të kërkojë shpjegim, të ndryshojë në mënyrë të kontrolluar tiparet jo thelbësore dhe të përdorë raste që dallojnë interpretimet e mundshme. **Materiali është një përfaqësim, jo vetë koncepti.** Kuptimi bëhet i dukshëm kur nxënësi mund ta shpjegojë kriterin, ta zbatojë në një rast të ri, të dallojë një jo-shembull dhe të argumentojë pse një objekt përket ose nuk përket në një kategori.

Kriteri i vlerësimit

- Dallon **materialin** nga **koncepti**
- Roli i **pyetjes**
- **Argumentimi**
- **Variacioni** i shembujve
- **Transferimi**

PJESA IV

Vetëprovim, punë bashkëpunuese dhe materiale për shtypje

Zgjidhni fillimisht ushtrimet pa parë çelësin; pastaj krahasoni arsyetimin tuaj me përgjigjet orientuese.



B Vetëprovim · Ora I dhe Ora II (B1–B8)

B1 Përkufizim **operacional** i bashkësisë; pse «objektet e bukura» nuk mjafton pa sqarim.

B2 Koleksion me **6 objekte** që klasifikohet sipas dy kritereve; si zbulohet kriteri i nxënësit?

B3 Dallimi **koncept – term – paraqitje grafike**, me shembull bashkësie.

B4 Një **jo-shembull** dhe një **kundërshembull** për një pohim nga klasifikimi.

B5 A = {a,b,c}: vendosni dhe argumentoni **a∈A; {a}⊆A; {a}∈A; A⊆A**.

B6 Shpjegoni me fjalë dallimin **x∈A** dhe **{x}⊆A**.

B7 Krahasoni **∅, {0}, {∅}**: sa elemente dhe cilat?

B8 Pse **∅⊆A** për çdo A, ndërsa **∅∈A** jo domosdoshmërisht?

B Vetëprovim · Ora III dhe Ora IV (B9–B16)

B9 Dy bashkësi me **kardinalitet të njëjtë**, jo të barabarta; korrespondencë një-për-një.

B10 Dy shkrime të **së njëjtës** bashkësi; pse rendi/përsëritja nuk e ndryshon?

B11 12 kartelat: dy kritere dhe **katër kategoritë** që krijohen.

B12 Projektoni «**Cila kartelë mungon?**» me dy strategji të fëmijës.

B13 Të gjithë trekëndëshat janë të mbushur: pse përgjigjja e saktë **nuk është dëshmi e mjaftueshme**?

B14 Zinxhiri: **koncept → keqkuptim → detyrë → dëshmi → ndërhyrje**.

B15 Dy pyetje diagnostikuese për nxënësin që ngatërron $\in$ **me** $\subseteq$.

B16 Mikro-aktivitet **8-minutësh** për $\varnothing$: nga objekti konkret te simboli.

B3 Zgjidhja B3 · Koncepti, termi dhe paraqitja

Koncepti matematikor

Vetë objekti/ideja, e përcaktuar nga **vetitë**, jo nga shkrimi apo vizatimi. Bashkësia përcaktohet plotësisht nga **elementet**; A = B ⇔ kanë të njëjtat elemente.

Termi

Emërtimi gjuhësor: «bashkësi», «element», «nënbashkësi»... **Nuk** është vetë koncepti: nxënësi mund ta përdorë fjalën dhe të mendojë se bashkësia është **vija** (Tall & Vinner, 1981).

Paraqitja

Grafike (diagram Venni), simbolike me **listim** {b, e} ose me **veti karakteristike** {x ∈ U | x është kartelë trekëndore}. Forma, madhësia ose ngjyra e vijës **nuk** janë veti të bashkësisë.

B3 Zgjidhja B3 · Shembull: P = numrat çift njëshifrorë

Koncepti

P = {0, 2, 4, 6, 8}: **5 elemente**. n ∈ P ⇔ njëshifror **dhe** çift. Edhe **0 = 2 · 0** është element.

Paraqitjet (e njëjta bashkësi)

- Listim: {0,2,4,6,8} = {8,6,4,2,0} = {0,2,2,4,6,8}
- Veti: {x ∈ N_0 | x < 10, x çift}
- Diagram Venni; **vija numerike** – elemente vetëm pikat e theksuara

Vija numerike: elemente janë vetëm pikat e theksuara



Termi duhet të jetë i saktë

«Numrat çift **deri në 10**» – a përfshihet 10? Nëse po: {0,…,10} me **6 elemente** → objekt tjetër.

? **Pyetje diagnostikuese:** «A i përket **0** bashkësisë P? Po **10**? Pse?» – «0 jo, s'ka asgjë» → vendos nga **përfytyrimi**; «10 jo, s'është njëshifror» → zbaton **përkufizimin**.

B4 Zgjidhja B4 · «Çdo kafshë që fluturon është zog»

«Çdo kafshë që fluturon është zog» $x \in F \Rightarrow x \in Z$, pra $F \subseteq Z$

Kafsha	Fluturon?	Zog?	Roli ndaj pohimit
Pëllumbi	Po	Po	Shembull: e mbështet, por nuk e vërteton
Peshku	Jo	Jo	Jo-shembull i kategorisë F
Pinguini	Jo	Po	Jo-shembull (kundërshembull vetëm për të anasjelltin)
Lakuriqi i natës	Po	Jo	**Kundërshembull: e rrëzon pohimin**

! **Kurthi – pinguini:** nuk fluturon → **nuk** e plotëson kushtin → jo-shembull. Është kundërshembull i **të anasjelltit** «Çdo zog fluturon» ($Z \subseteq F$): kush e jep ka **këmbyer kushtin me përfundimin**.

B4 Zgjidhja B4 · Rëndësia didaktike

⇒ Dallimi jo-shembull / kundërshembull **nuk është çështje termash**: lidhet me leximin e strukturës **«nëse… atëherë»**.

PËR STUDENTIN

Pyetja kontrolluese

«Cila është **kategoria** për të cilën flet pohimi? Gjej një element të saj që **nuk** e ka vetinë e përfundimit.»

NË KLASË

Lakuriqi i natës si rast dallues

Tregon nëse fëmija klasifikon sipas **vetisë së synuar** (zog: pupla, sqep, vezë) apo sipas një **tipari sipërfaqësor** (fluturon).

! **Një rast i vetëm** mjafton për ta rrëzuar pohimin universal; **shumë raste pozitive** (pëllumbi, shqiponja, dallëndyshja) nuk e vërtetojnë.

B10

Zgjidhja B10 · Rendi dhe përsëritja në shkrimin e bashkësisë

$$A = \{a, b, c\} \qquad B = \{c, a, b, b\} \qquad \Rightarrow \qquad A = B, \quad |B| = 3$$

Argumentimi

A = B ⇔ ∀x: x∈A ⇔ x∈B.

A ⊆ B: a, b, c janë te B.

B ⊆ A: c, a, b janë te A.

Pse rendi s'ka rëndësi

E vetmja pyetje: «A i përket ky objekt?» – po/jo. Bashkësia s'ka «vend të parë»; rendi është veti e **shkrimit**.

Pse përsëritja s'ka rëndësi

Përkatësia **nuk shkallëzohet**: b s'i përket «dy herë». Prandaj **|B| = 3**, jo 4.

≠

Ku rendi/përsëritja kanë rëndësi: çifti i renditur **(a, b) ≠ (b, a)**; vargu **4, 4, 7** ka tri kufiza. Por **{a, b} = {b, a}** dhe **{4, 4, 7} = {4, 7}**.

B10

Zgjidhja B10 · Rëndësia didaktike dhe vlerësimi

! Nxënësi që **numëron simbolet** thotë se {c, a, b, b} ka **4** elemente → e lidh bashkësinë me **shkrimin**, jo me objektet.

Pyetja diagnostikuese

- «Sa kartela **të ndryshme** duhet të marrësh nga tavolina për të ndërtuar {c, a, b, b}?»
- «**Tri: a, b dhe c**» → e dallon objektin nga shkrimi
- «**Katër**» → keqkuptimi konfirmohet; **ndërhyrja:** ndërtim konkret me kartela – ka vetëm **një** kartelë b

Përgjigje e plotë · 2 pikë

- Dy shkrime të sakta (rend/përsëritje) + barazia e **argumentuar** përmes elementeve
- Rendi dhe përsëritja = veti të **shkrimit**; përfundimi **|B| = 3**

B13

Zgjidhja B13 · Përgjigje e saktë pa dëshmi të mjaftueshme

Në këtë material: $\mathrm{T} = \mathrm{M}$ (të gjithë trekëndëshat të mbushur, asnjë tjetër i mbushur)

Hipoteza 1

Klasifikon sipas **formës** (kriteri i synuar).

Hipoteza 2

Klasifikon sipas **mbushjes** – «zgjedh ato të errëtat».

! Të dyja parashikojnë **të njëjtin veprim** → përgjigjja është e saktë, por **jo dalluese**. Problemi **nuk është te nxënësi**, por te **materiali**. (Edhe imitimi ose rastësia nuk përjashtohen nga një vëzhgim i vetëm.)

B13

Zgjidhja B13 · Si mblidhet dëshmia e mjaftueshme

Kartela e re	Nëse klasifikon sipas formës	Nëse klasifikon sipas mbushjes
Trekëndëshi i pambushur	E zgjedh	E lë jashtë
Katrori i mbushur	E lë jashtë	E zgjedh

«Si e vendose?»

«Ka tri brinjë» / «është e zezë» e forcon interpretimin; shpjegimi gojor **pa rast dallues** mund të mos mjaftojë.

Përgjigje e plotë · 2 pikë

(1) Forma = mbushja në këtë material → dy hipoteza. (2) Rast dallues + **parashikimi** për secilën përgjigje.

★ **Parimi:** Një përgjigje është dëshmi kuptimi **vetëm** kur detyra ishte e tillë që një kuptim tjetër do të kishte prodhuar **përgjigje tjetër**.

B14

Zgjidhja B14 · Zinxhiri: barazia kundrejt kardinalitetit

1 · Koncepti

Të barabarta = të njëjtat elemente; **kardinalitet i njëjtë** = po aq elemente. Barazia ⇒ kardinalitet i njëjtë, **jo** anasjelltas: {a,b,c} dhe {d,e,f}.

2 · Keqkuptimi

«**Njësoj**» = «**po aq**»: barazia mbështetet te numri.

3 · Detyra diagnostikuese

- **Pala 1:** a, b, c dhe c, a, b (vendosur ndryshe)
- **Pala 2:** a, b, c dhe d, e, f
- «Te cila palë grupet janë **njësoj**? Në çfarë?» + «**Si e kontrollove?**»
- «Njësoj» përdoret **qëllimisht** (e paqartë); mësuesi s'thotë «të barabarta»

Zgjidhja shton edhe **interpretimin** dhe **dëshminë e re**; në formatin me 5 hallka, interpretimi përfshihet te dëshmia.

B14 Zgjidhja B14 · Dëshmia, interpretimi dhe ndërhyrja

	4 · Dëshmia (çfarë vëzhgohet)	5 · Interpretimi	6 · Ndërhyrja
A	Njësoj vetëm pala 1; «janë të njëjtat kartela»	**Keqkuptimi rrëzohet**	–
B	Njësoj të dyja palët; «kanë nga tre»	**Keqkuptimi mbështetet: barazi = «po aq»**	«Trego një kartelë që është në njërin grup dhe jo në tjetrin»; «po aq» → çiftëzim 1–1; «të njëjtat» → gjej çdo kartelë te tjetri
C	Njësoj vetëm pala 2 ose asnjëra; «janë renditur ndryshe»	**Keqkuptim tjetër: renditja si pjesë e bashkësisë**	Rirenditje para syve: «A shtuam apo hoqëm ndonjë kartelë? Çfarë ndryshoi?»

→ Ndërhyrja **varet nga ajo që tregon dëshmia** – nuk është e paracaktuar.

B14

Zgjidhja B14 · Dëshmia e re dhe përmbledhja

Hallka	Përmbajtja
Koncepti	Barazia = të njëjtat elemente; kardinaliteti i njëjtë = po aq elemente
Keqkuptimi	«Njësoj» = «po aq»
Detyra	Dy palë kontrastuese: të njëjtat kartela të rirenditura / kartela të ndryshme me po aq numër
Dëshmia	Cilën palë quan njësoj dhe me çfarë arsyeje
Interpretimi	Me numrin → mbështetet; me objektet → rrëzohet; me vendosjen → keqkuptim tjetër
Ndërhyrja	«Trego një kartelë që është vetëm te njëri»; dallimi «po aq» / «të njëjtat»
Dëshmi e re	Palë të reja (d,e | e,d · a,b | e,f · a,b | a,b,c), përfshirë një me kardinalitet të ndryshëm

Përgjigje e plotë · 2 pikë

- Koncepti **saktë** + keqkuptim **real** i lidhur me të
- Detyrë që **nuk e jep përgjigjen** dhe dallon interpretimet; dëshmia si **sjellje e vëzhgueshme**; ndërhyrje që **varet nga dëshmia**
- Suksesi: argumenton me **elementet** te palët e reja

✓ Zgjidhjet B1–B2 · Bashkësia dhe kriteri

B1 · Përkufizimi operacional

Në nivel hyrës, bashkësia është koleksion objektesh **i përcaktuar qartë**, që për çdo objekt të vendoset nëse i përket apo jo. «Objektet e bukura» është i paplotë: përkatësia varet nga **gjykimi subjektiv**; duhet kriter i operacionalizuar, p.sh. «kartelat me figurë trekëndore».

Standardi universitar: shpjegon jo vetëm «koleksion», por edhe kërkesën për **vendim të njëkuptimshëm**.

B2 · Dy kritere dhe detyrë dalluese

Modeli: 3 trekëndësha të mbushur + 3 katrorë të pambushur – ndahen si «trekëndësha/katrorë» ose «të mbushura/të pambushura».

Diagnoza: shtojmë **trekëndësh të pambushur** dhe **katror të mbushur**. «Ku do ta vendosësh secilën kartelë të re dhe pse?» zbulon kriterin. Materiali fillestar nuk mjafton: dy hipoteza japin të njëjtin rezultat.

✓ Zgjidhjet B3–B4 · Përmbledhje e shkurtër

B3 · Koncepti, termi, paraqitja

Koncepti = ideja ose struktura matematikore; termi = emërtimi gjuhësor; paraqitja = mënyra konkrete, grafike ose simbolike.

Shembulli: për A = {a,b,c}, vetë bashkësia është objekti; «bashkësi» është termi; shkrimi A = {a,b,c}, diagrami me tre pika ose tre kartela të rrethuara janë **paraqitje**. Ndryshimi i paraqitjes nuk e ndryshon domosdoshmërisht bashkësinë.

B4 · Jo-shembull dhe kundërshembull

Pohimi: «Të gjitha kartelat trekëndore janë të mbushura.»

Jo-shembulli: një **katror i pambushur** – nuk i përket klasës «trekëndore»; nuk e rrëzon pohimin.

Kundërshembulli: një **trekëndësh i pambushur** – plotëson kushtin «është trekëndësh», jo përfundimin «është i mbushur» → rrëzon pohimin universal.

✓ Zgjidhjet B5–B6 · ∈ dhe ⊆

B5 · Katër pohime për A = {a,b,c}

a ∈ A – i vërtetë.

{a} ⊆ A – i vërtetë: elementi i vetëm i {a} është në A.

{a} ∈ A – i pavërtetë: elementet e A janë a, b, c, jo bashkësia {a}.

A ⊆ A – i vërtetë: çdo element i A është element i A.

Pika kyçe: identifikoni objektin majtas **para** se të zgjidhni simbolin.

B6 · x ∈ A kundrejt {x} ⊆ A

x ∈ A: objekti x është element i A.

{x} ⊆ A: bashkësia njëelementëshe {x} është nënbashkësi e A – çdo element i saj (vetëm x) i përket A.

Vërejtje: kur x ∈ A, atëherë {x} ⊆ A. Por pohimet kanë **lloje të ndryshme objektesh** majtas dhe nuk lexohen si sinonime.

✓ Zgjidhjet B7–B8 · Bashkësia boshe

B7 · ∅, {0} dhe {∅}

|ø| = 0.

|{0}| = 1 – elementi i vetëm është numri 0.

|{ø}| = 1 – elementi i vetëm është bashkësia boshe ø.

Përfundimi: tri objekte të ndryshme. Kllapat gjarpërore krijojnë një bashkësi që **përmban** objektin e shkruar brenda tyre.

B8 · ∅ ⊆ A gjithmonë; ∅ ∈ A jo

Përfshirja: ø ⊆ A kërkon që çdo element i ø të jetë në A. ø nuk ka elemente → asnjë element nuk e shkel kushtin → ø është nënbashkësi e **çdo** bashkësie.

Përkatësia: ø ∈ A kërkon që vetë ø të jetë një nga elementet e A. Ndodh p.sh. te **A = {ø, 1}**, por jo për çdo A.

✓ Zgjidhjet B9, B11 · Ekuinumerueshmëria; katër kategoritë

B9 · Kardinalitet i njëjtë, bashkësi të ndryshme

A = {a,b,c}, B = {1,2,3}: **|A| = |B| = 3**, por **A ≠ B**.

Korrespondenca: a ↔ 1, b ↔ 2, c ↔ 3 është bijeksion – tregon se bashkësitë janë **ekuinumerike**, jo të barabarta.

(**B10** · {a,b,c} = {c,a,b,b}: rendi s'ka rëndësi, përsëritja s'rrit kardinalitetin – shih zgjidhjen e zgjeruar.)

B11 · Dy kritere mbi 12 kartelat

Kriteret: T – «është trekëndore», M – «është e mbushur».

Kategoritë: $T \cap M$; $T \cap M^c$; $T^c \cap M$; $T^c \cap M^c$ (komplementet ndaj universit të 12 kartelave): trekëndore të mbushura; trekëndore të pambushura; jo trekëndore të mbushura; jo trekëndore të pambushura.

Arsyetimi: kategoritë janë **reciprokisht përjashtuese** dhe së bashku **mbulojnë** universin.

✓ Zgjidhjet B12, B13 · Strategjitë; dëshmia shtesë

B12 · «Cila kartelë mungon?»

Projektimi: gjashtë kartela me kombinime të ndryshme tiparesh; pas vëzhgimit hiqet njëra; identifikimi + shpjegimi i strategjisë.

Dy strategji: (1) **eliminim sistematik** – përpilohen kombinimet e mundshme dhe gjendet ai që mungon; (2) **kujtesë strukturore/pozicionale** – vendi dhe lidhja e kartelës me të tjerat.

Vlerësimi: «cila kartelë» nuk mjafton; studenti artikulon **si** arriti te përfundimi.

B13 · Përgjigje e shkurtër

Analiza: kur të gjithë trekëndëshat janë të mbushur dhe të gjitha jo-trekëndoret të pambushura, zgjedhja mund të vijë si nga «forma» ashtu edhe nga «mbushja». Një rezultat i vetëm nuk dallon arsyetimin.

Dëshmia shtesë: një **trekëndësh i pambushur** dhe një **jo-trekëndësh i mbushur** – dy kriteret japin vendime të ndryshme → interpretim më i besueshëm.

✓ Zgjidhjet B14 (shkurt), B15 · Barazia; ∈ dhe ⊆

B14 · Zinxhir diagnostik i shkurtër

Koncepti: barazia e bashkësive.

Keqkuptimi: «të barabarta kur kanë të njëjtin numër elementesh».

Detyra: A = {a,b,c} me B = {1,2,3}; pastaj A me C = {c,b,a}: cilat janë të barabarta dhe pse?

Dëshmia: A, B – kardinalitet i njëjtë, jo të barabarta; A = C.

Ndërhyrja: tabelë me dy pyetje: «**Sa** elemente?» dhe «**Cilët** elemente?»

B15 · Dy pyetje për ∈ / ⊆

Pyetja 1: «Te b ∈ T, çfarë lloj objekti është **b** dhe çfarë lloj objekti është **T**?»

Pyetja 2: «Te {b} ⊆ T, çfarë **ndryshoi** në anën e majtë? Cili kusht duhet kontrolluar që {b} të jetë nënbashkësi e T?»

Pse funksionojnë: e detyrojnë studentin të identifikojë **llojin e objektit** dhe **kushtin** e marrëdhënies, jo të zgjedhë simbolin nga pamja ose kujtesa.

B16

Zgjidhja B16 · Mikro-aktivitet 8-minutësh për ∅

0–2'

Kriter i pamundur: «njëkohësisht **rreth dhe katror**»; studentët kërkojnë objektet

2–4'

Verbalizim: «Asnjë objekt s'e plotëson kriterin; bashkësia ka **zero elemente**»

4–6'

Krahasohen **∅, {0}, {∅}** dhe kardinaliteti i secilit

6–8'

Futet shënimi **∅** + rast i ri për **transferim**

✓ **Kriter suksesi:** studenti shpjegon **pse** bashkësia është boshe dhe **nuk e ngatërron** me numrin 0.

Udhëzues për studim në dyshe ose në grup

Roli	Detyra
Lehtësuesi	mban grupin te pyetja matematikore dhe koha
Analisti	propozon interpretimin e përgjigjes së nxënësit
Verifikuesi	kërkon kundërshembull ose rast që dallon hipotezat
Raportuesi	paraqet përfundimin dhe dëshminë që e mbështet

- **Dyshe · 15'** – 6 pohime me $\in$ dhe $\subseteq$, me arsyetim verbal
- **Grup · 20'** – 12 kartelat sipas një kriteri, pastaj kriter i dytë me ndarje tjetër
- **Debat didaktik · 15'** – gabim tipik → 2 hipoteza → detyrë diagnostikuese → ndërhyrja
- **Vlerësim nga bashkëstudentët · 10'** – rubrika saktësi–dëshmi–ndërhyrje

Vetëvlerësimi: 0 = pasaktësi/mungesë argumenti · 1 = pjesërisht e saktë, arsyetim i paplotë · 2 = saktësi + arsyetim + lidhje didaktike. **Maksimumi: 32 pikë.**

ANEKS MATEMATIKOR

Zgjerim universitar

Kardinaliteti · prerja dhe bashkimi · komplementi dhe diferenca · bashkësia e fuqisë · produkti kartezian



∩ A1–A2 · Kardinaliteti; prerja dhe bashkimi

A1 · Kardinaliteti

|A| = n ⟺ ekziston bijeksion A ↔ {1, 2, …, n}; **|∅| = 0**.

Kardinalitet i njëjtë ⟺ ekziston bijeksion **f: A → B**.

Barazia (më e fortë): **A = B ⇔ ∀x: x ∈ A ⇔ x ∈ B**.

A2 · Prerja dhe bashkimi

A ∩ B = {x | x ∈ A **dhe** x ∈ B}

A ∪ B = {x | x ∈ A **ose** x ∈ B}

Prerja = elementet e përbashkëta; bashkimi = çdo element i të paktën njërës.

∩ **Shembull:** T = trekëndëshat, M = figurat e mbushura → **T ∩ M** = kartelat njëkohësisht trekëndore **dhe** të mbushura. Prerja ↔ kushti logjik «dhe».

A3–A5 · Komplementi, $\mathscr{P}(A)$, produkti kartezian

A3 · Diferenca, komplementi

A \ B = {x | x ∈ A, x ∉ B}

A^c = U \ A = {x ∈ U | x ∉ A}

Në përgjithësi **A \ B ≠ B \ A**.
Komplementi kërkon universin **U**.

A4 · Bashkësia e fuqisë

$\mathscr{P}(A)$ = {B | B ⊆ A}

|A| = n ⇒ **$|\mathscr{P}(A)| = 2^n$**

Përfshin **∅** dhe **A**. P.sh. $\mathscr{P}$({a,b}) = {∅, {a}, {b}, {a,b}}.

A5 · Produkti kartezian

A × B = {(a, b) | a ∈ A, b ∈ B}

Çifte **të renditura** → A × B ≠ B × A.

|A × B| = |A| · |B|

Zgjerim universitar; jo formalizim i kërkuar nga nxënësi i arsimit fillor.

Fjalorthi i shkurtër i Leksionit 1 · 1/2

Termi	Kuptimi që duhet zotëruar
Bashkësi	Koleksion elementesh i përcaktuar qartë sipas një kriteri ose përshkrimi.
Element	Objekt që i përket një bashkësie.
Përkatësi (∈)	Marrëdhënie midis një objekti dhe një bashkësie.
Nënbashkësi (⊆)	B është nënbashkësi e A kur çdo element i B është edhe element i A.
Bashkësi boshe (∅)	Bashkësi pa elemente; kardinaliteti i saj është 0.
Kardinalitet |A|	Numri i elementeve të një bashkësie të fundme.
Barazi e bashkësive	Dy bashkësi janë të barabarta kur kanë saktësisht të njëjtat elemente.

Fjalorthi i shkurtër i Leksionit 1 · 2/2

Termi	Kuptimi që duhet zotëruar
Ekuivalencë sipas kardinalitetit	Dy bashkësi kanë të njëjtin kardinalitet, edhe nëse elementet ndryshojnë.
Kriter klasifikimi	Veti/rregull sipas të cilit vendoset përfshirja e objekteve në kategori.
Dëshmi diagnostikuese	Veprim, shpjegim ose përgjigje që ndihmon të dallohen interpretimet e mundshme të të menduarit të nxënësit.
Shembull	Rast që plotëson përkufizimin ose kushtin e konceptit.
Jo-shembull	Rast që nuk e plotëson përkufizimin; përdoret për të sqaruar kufirin e konceptit.
Kundërshembull	Rast që rrëzon një pohim të përgjithshëm duke treguar se ai nuk vlen në të gjitha rastet e pretenduara.

Baza shkencore dhe institucionale

Formimi i konceptit

Përkufizim formal + shembuj + jo-shembuj + paraqitje; gjenerimi i shembujve teston hapësirën konceptuale.

Tall & Vinner 1981 · Watson & Mason 2005 · Steininger et al. 2022

Bashkësitë te mësuesit e ardhshëm

Vështirësi në përkufizimet simbolike, shembujt e përditshëm dhe dallimin barazi–kardinalitet.

Doruk & Çiltaş 2020

Dimensioni profesional

Përmbajtje + paraqitje + interpretim gabimesh + zgjedhje detyrash; kuptim konceptual, arsyetim, përdorim strategjik.

Shulman 1986 · Ball et al. 2008 · NRC 2001 · NCTM 2014

Përafrimi institucional

Përqendrim te studenti, rezultate të verifikueshme, lidhje aktivitet–vlerësim, transparencë e ngarkesës.

ENQA et al. 2015 · European Commission 2015

© Burimi dhe transparenca e përshtatjes

KONSULTUAR

Burimi kryesor

Kelly, E. «The Basics of Sets», në **Math for Elementary Teachers**, LOUIS: The Louisiana Library Network.

TRANSPARENCA

Origjinale / përshtatje

Figurat, 12 kartelat, dialogët, matricat diagnostikuese, pyetjet, mikroprojektimet – **jo materiale zyrtare të LOUIS**; nuk zëvendësojnë programin lokal.

Çfarë u mor si pikënisje

Koleksioni/klasifikimi, bashkësia, elementi, nënbashkësia, bashkësia boshe, përkatësia, kardinaliteti, materialet me tipare të shumëfishta.

Të drejtat e autorit

«Copyright © by Elizabeth Kelly. All Rights Reserved.» → figurat origjinale **nuk riprodhohen**; idetë parafrazohen me atribim të qartë.

Referencat · 1/2

Kelly, E. (n.d.). The Basics of Sets. In *Math for Elementary Teachers*. LOUIS: The Louisiana Library Network. Retrieved October 7, 2026, from https://louis.pressbooks.pub/math-for-elementary-teachers/chapter/the-basics-of-sets/

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Doruk, M., & Çiltaş, A. (2020). Pre-Service Mathematics Teachers' Concept Definitions and Examples Regarding Sets. *International Journal of Psychology and Educational Studies*, *7*(2), 21–36. https://doi.org/10.17220/ijpes.2020.02.003

Steininger, T. M., Wittwer, J., & Voss, T. (2022). Classifying Examples is More Effective for Learning Relational Categories Than Reading or Generating Examples. *Instructional Science*, *50*, 771–788. https://doi.org/10.1007/s11251-022-09584-7

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2023). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (11th ed.). Pearson. ISBN 9780136818038.

Referencat · 2/2

Jaka, B. (1987). *Metodika e mësimdhënies së matematikës: Për studentët e SHLP, Dega e Matematikës*. Prishtinë: Enti i Teksteve dhe i Mjeteve Mësimore i KSA të Kosovës.

ENQA, ESU, EUA, & EURASHE. (2015). *Standards and Guidelines for Quality Assurance in the European Higher Education Area (ESG)*. Brussels. https://www.enqa.eu/wp-content/uploads/2015/11/ESG_2015.pdf

European Commission. (2015). *ECTS Users' Guide 2015*. Luxembourg: Publications Office of the European Union. https://doi.org/10.2766/87192

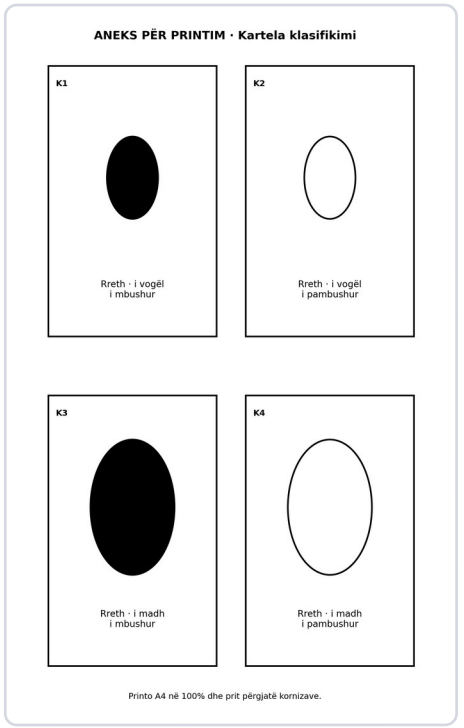
Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a Constructive Activity: Learners Generating Examples*. Routledge.

National Research Council. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: The National Academies Press. https://doi.org/10.17226/9822

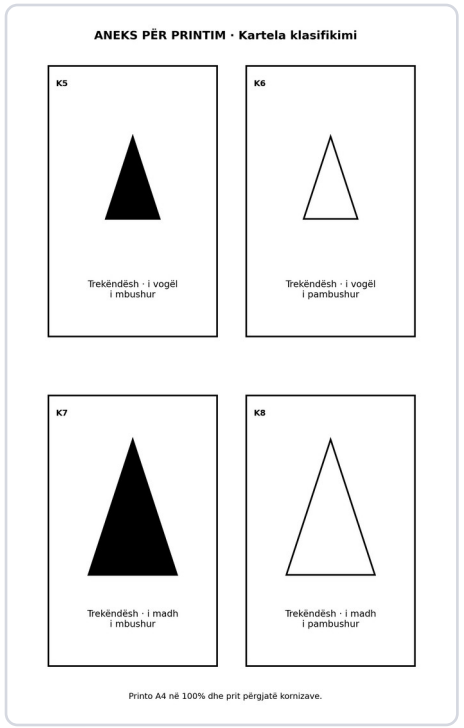
National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Reston, VA: NCTM.

Teksti i leksionit është në shqip; titujt e botimeve të huaja ruhen në origjinal, me DOI ose lidhje për verifikim.

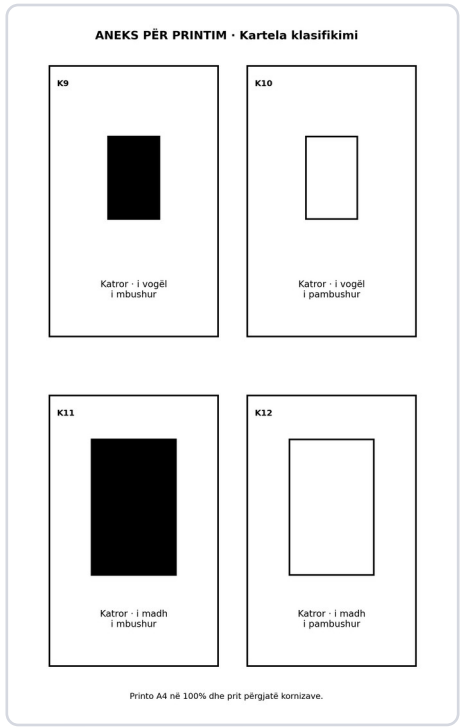
Aneks · Kartela për shtypje dhe prerje



Rrathë



Trekëndësha



Katrorë

Përdorimi

- **12 kartela:** 3 forma × 2 madhësi × 2 mbushje
- Klasifikim me **një ose dy kritere**
- «**Cila kartelë mungon?**»
- Krijim **nënbashkësish**
- **Detyra diagnostikuese**

Tri faqet shtypen veçmas në A4 nga dokumenti i leksionit.

PYETJE PËRMBYLLËSE

Një përgjigje e saktë nuk është ende dëshmi kuptimi

$\emptyset \subseteq A$

Koncepti → keqkuptimi i mundshëm → detyra diagnostikuese → dëshmia → ndërhyrja e argumentuar

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Metodika e Matematikës III · Leksioni 1 · Viti akademik 2026–2027